ALG 4 | Calculs algébriques

Une certaine aisance calculatoire avec les sommes et les produits est nécessaire au mathématicien débutant. Nous étudierons à cette occasion les coefficients binomiaux (sans insister sur les aspects combinatoires) et reviendrons sur les relations trigonométriques usuelles.

Le calcul mental, Magritte

1. Quizz

1 — *Vrai ou faux ?*

Dans tout ce qui suit, n est un entier naturel non nul et les variables a, b, a_i, b_i, t_k, u_k, etc. désignent des nombres complexes.

1. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+1} 1 = n$;
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k! = \sum_{i=0}^{n}(n-i)!$;
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{i=1}^{n}(n-i)$;
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} t_k = \sum_{i=0}^{n} t_{2i}$;
5. $\displaystyle\sum_{\substack{k\in[\![0,2n]\!]\\ k \text{ impair}}} t_k = \sum_{i=0}^{n-1} t_{2i+1}$;
6. $\displaystyle\sum_{k=-n}^{n+1} (-1)^k = 0$;
7. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^n = 0$;
8. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}$;
9. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^n - 1$;
10. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^k = 3^{n+1} - 1$;
11. $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1 = \binom{n}{2}$;
12. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (t_{k+2} - 2t_{k+1} + t_k) = t_0 + t_{n+2}$;
13. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i \sum_{i=0}^{n} b_i = \sum_{i=0}^{n} a_i b_i$;
14. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} i^2 = \sum_{k=0}^{n^2} k$;
15. $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2-1}{k} = \frac{(n+1)!}{2n}$;
16. $\displaystyle\sum_{i=n+1}^{2n} \frac{2i}{i+1} = \sum_{i=n}^{2n-1} \frac{2i+2}{i+2}$;
17. $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i+1}^{n+1} \frac{1}{j} = n$;
18. $\displaystyle\binom{2n+2}{n+1} = 2\binom{2n+1}{n}$;
19. $\displaystyle n \geqslant 2 \implies \forall \omega \in \mathbb{U}_n,\ \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$;
20. $\displaystyle(a+b)^{2n} + (a-b)^{2n} = 2\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}a^{2n-2i}b^{2i}$;
21. $\displaystyle a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^i b^{n-i}$;
22. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n+1} u_k = \sum_{i=0}^{2n} (u_i + u_{i+1})$.

2 — *QCM sur les sommes doubles* f

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et toute matrice complexe $(t_{i,j})$, la somme $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} t_{i,j}$ est égale à :

   a. $\displaystyle\sum_{i=0}^{j}\sum_{j=i}^{n} t_{i,j}$; **b.** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} t_{i,j}$; **c.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{n-k} t_{\ell,\ell+k}$; **d.** $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} t_{i,j}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} (2i - j)$ est égale à :

a. $\displaystyle 2\sum_{i=0}^{n} i - \sum_{j=0}^{n} j$; **b.** $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$; **c.** $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} (2j - i)$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et tous nombres $z_k = r_k e^{i\theta_k}$ avec $(r_k, \theta_k) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2$ est égal à :

a. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} z_k \overline{z_\ell}$;

b. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2 + 2\sum_{1 \leqslant k<\ell \leqslant n} \mathrm{Re}\left(z_k \overline{z_\ell}\right)$;

c. $\displaystyle\sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} z_k z_\ell$;

d. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r_k^2 + 2\sum_{1 \leqslant k<\ell \leqslant n} r_k r_\ell \cos(\theta_k - \theta_\ell)$.

3 — *QCM sur les produits* f

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 4k^2$ est égal à :

a. $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2k\right)^2$; **b.** $4^n (n!)^2$; **c.** $(2n)!^2$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et toute suite complexe $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le produit $\displaystyle\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n}^{n} t_i t_j$ est égal à :

a. $\left(\displaystyle\prod_{i=1} t_i\right)^2$; **b.** $\left(\displaystyle\prod_{i=1} t_i\right)^{2n}$; **c.** $\left(\displaystyle\prod_{i=1} t_i\right)^{n+1}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k^k$ est égal à :

a. $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k\right)^{\sum_{k=1}^{n} k}$; **b.** $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} k$; **c.** $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k}{n}\right)$ est égal à :

a. $\displaystyle\prod_{i=n+1}^{2n} \frac{i}{n}$; **b.** $\dfrac{(2n)!}{n^n n!}$; **c.** $\dfrac{(2n)!}{n^n}$.

2. Exercices élémentaires

4 — *Variation binomiale*

Simplifier $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{2k+1}2^{n-3k}$ pour $n\in\mathbb{N}$.

5 — *Une équation*

Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ l'équation $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3}=5n$.

6 — *Une somme télescopique*

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\alpha_n := \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

1. Démontrer l'existence de $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x(x+1)(x+2)}=\frac{a}{x(x+1)}+\frac{b}{(x+1)(x+2)}$.
2. En déduire une simplification de α_n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

7 — *Binôme et nombres complexes*

Simplifier la somme $\mathrm{T}=\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$. INDICATION : utiliser les nombres complexes.

8 — *Deux sommes binomiales classiques*

Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$. Simplifier les sommes $\mathrm{S}_n=\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$ et $\mathrm{T}_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}$.

9 — *Une somme double*

Soit $n\in\mathbb{N}$. Simplifier la somme $\sigma_n := \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}2^{2i-j}$.

10 — *À propos de la factorielle f*

Les trois questions suivantes sont indépendantes.

1. Démontrer sans récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}^*, 2^{n-1}\leqslant n!\leqslant n^{n-1}$.
2. Comparer $2^n n!$ et $(2n)!$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, simplifier $\prod_{k=1}^{n}(2k-1)$ au moyen de factorielles.

3. Exercices classiques plus techniques

11 — *Exploiter une symétrie f*

Simplifier $S_n := \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{i}{i+j}$. Indication : Justifier que l'on a aussi $S_n := \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{j}{j+i}$.

12 — *Sommes de Newton des racines n-èmes de l'unité f*

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et $m \in \mathbb{Z}$. On pose $S_m := \sum_{z\in\mathbb{U}_n} z^m$.

1. Montrer que, si m est un multiple de n, alors $S_m = n$.
2. On suppose que m n'est pas un multiple de n. Simplifier S_m. On utilisera la formule des sommes géométriques.

13 — *Le one trick en action f*

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $S_n := \sum_{k=1}^{n} kz^k$ en remarquant que $S_n = \sum_{1\leqslant \ell\leqslant k\leqslant n} z^k$.

14 — *Somme alternée des cubes f*

Calculer $S_n := \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i i^3$.

Indication : On pourra sommer « par paquets » de deux termes consécutifs :

$$\left(-1+2^3\right)+\left(-3^3+4^3\right)+\cdots+\left(-(2n-1)^3+(2n)^3\right)$$

15 — *La formule de Huygens f*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{C}^n$. On pose $s := \sum_{k=1}^{n} x_k$ et $\sigma := \sum_{k=1}^{n} x_k^2$.

Exprimer $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (x_i - x_j)^2$ en fonction de n, s et σ.

16 — *Sommes partielles de Poisson ff*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\theta \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$. Simplifier $\sum_{k=0}^{n-1} x^k \cos k\theta$ en utilisant les nombres complexes.

17 — *Itération dans la suite de Fibonacci ff*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0=0$, $u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$.

Montrer que $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_{p+k}=u_{p+2n}$.

18 — *Penser aux diagonales ff*

Simplifier $\mathrm{S}_n:=\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|$. INDICATION : Sommer sur les diagonales (par exemple).

4. Indications

1

Au brouillon, il ne faut pas hésiter à écrire les sommes sans sigma avec des $\cdots$ afin de mieux comprendre les éventuelles simplifications, voire à choisir des petites valeurs de n.

2

Le c. du 1. est une somme par diagonales. Les diagonales d'une matrice sont repérées par leurs « équations » $j-i=k$ où $k\in[\![1-n,n-1]\!]$:

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} k=3 \\ k=2 \\ k=1 \\ k=0 \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \begin{array}{r} k=-1 \\ k=-2 \\ k=-3 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} \end{array}$$

3

Mettre au même dénominateur au 4.

4

On trouve $3\dfrac{17^n}{4^n}$.

5

Se ramener à une équation du second deré.

6

On trouve $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$ après télescopage.

7

T est la partie réelle d'une somme de nombres complexes « facile » à calculer.

8

Utiliser le polynôme $x\mapsto(1+x)^n$ vu en cours.

9

Remarquer que $2^{2i-j}=4^i\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^j$.

10

Une idée est de comparer terme à terme les produits : $n! = 2 \times \cdots \times k \times \cdots \times n$ et $2 \leqslant k \leqslant n$ pour $n \geqslant 2$.

11

Les indices i, j étant muets, on peut les permuter dans la somme.

12

Se ramener à une somme géométrique en posant $\omega := \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

13

On a $S_n = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} z^k$.

14

Les paquets sont de la forme $(2k)^3 - (2k-1)^3$.

15

Développer le carré. On trouve $2n\sigma - 2s^2$

16

Se ramener à une somme géométrique de raison complexe.

17

On pourra par exemple montrer que la propriété est vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ en remarquant que $u_{p+2(n+1)} = u_{p+2+2n}$.

18

Les diagonales sont d'équations $j - i = k$ où $k \in [\![1-n, n-1]\!]$.

5. Solutions

1 ↺

1. Vrai.
2. Vrai (symétrie).
3. Faux. Symétrie mal écrite :
$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{i=0}^{n}(n-i) = \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)$$
4. Faux : à gauche on somme tous les termes de l'indice 0 à $2n$, à droite seulement les termes d'indice pair.
5. Vrai.
6. Vrai car il y a un nombre pair de termes.
7. Faux. La somme vaut $(-1)^n 2^n$. En revanche, on a
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(-1)^i = (1-1)^n = 0$$
8. Vrai par la formule du binôme (ou par symétrie).
9. Faux, la somme vaut $2^{n+1}-2$.
10. Faux, la somme vaut $\left(3^{n+1}-1\right)/2$.
11. Vrai, il y a $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ termes.
12. Faux, on trouve $t_{n+2} - t_1 + t_0 - t_{n+1}$ en écrivant par exemple :
$$t_{k+2} - 2t_{k+1} + t_k = (t_{k+2} - t_{k+1}) + (t_k - t_{k+1})$$
et en télescopant deux fois.
13. Faux : tous les termes de droite se retrouvent dans la somme de gauche mais l'inverse est faux (par exemple $a_0 b_1$).
14. Faux (tentative de changement d'indice désastreuse) :
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 \neq 1 + 2 + 3 + \cdots + n^2$$
dès que $n > 1$.
15. Vrai :
$$\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \times (k+1) = \frac{1}{n}\,\frac{(n+1)!}{2}$$
par télescopage.
16. Vrai (changement d'indice $j = i - 1$).

17. Faux :

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n+1}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n+1}\sum_{i=0}^{j-1}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{n+1}1=n+1$$

18. Vrai par la formule comité-président.

19. Faux (cf. le cas $\omega=1$). En revanche, le résultat est vrai si on corrige par $\forall\omega\in\mathbb{U}_n\setminus\{1\}$ (cf. la formule des sommes géométriques).

20. Vrai. On applique la formule du binôme :

$$(a+b)^{2n}+(a-b)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}a^{2n-k}b^k\left(1+(-1)^k\right)=2\sum_{i=0}^{n}\binom{2n}{2i}a^{2n-2i}$$

21. Faux : collusion entre la formule du binôme et celle de factorisation.

22. Faux. La somme vaut $u_0+2u_1+2u_2+\cdots+2u_{2n}+u_{2n+1}$. La somme du c. ne contient que des termes d'indice impair.

Enseignements à tirer de cet exercice

⇛ Il faut toujours vérifier vos changement de variables. Soyez critiques : retrouve-t-on les mêmes termes ? sans doublons ? etc.

⇛ En cas de doute, ne pas hésiter à revenir au brouillon à des écritures du type $u_0+u_1+\cdots+u_n$ avec « des petits points » : le plus important est de comprendre avec précision ce que l'on somme.

⇛ Revenir (en cas de difficultés) à des écritures du type $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_{i,j}$ pour intervertir dans une somme (ou un produit).

⇛ La formule du binôme s'écrit $(u+v)^n=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}u^iv^{n-i}$ mais aussi $(u+v)^n=\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}v^iu^{n-i}$.

2 ↺

1. Le a. n'a aucun sens car la borne j n'est pas définie dans la somme portant sur l'indice i. Les autres réponses sont correctes : le b. est une somme en lignes, le c. par diagonales et de d. par colonnes.
2. Seuls b. et c. sont vrais. D'une manière générale,

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{i,j}=\text{somme de tous les termes du tableau}=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_{j,i}$$

On a

$$\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}(2i-j)=2\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}i-\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}j=2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}i-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}j=2n\frac{n(n+1)}{2}-n\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2(n+1)}{2}$$

3. Tout est vrai sauf c. En effet,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n}z_k\right|^2&=\left(\sum_{k=1}^{n}z_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\overline{z_k}\right)=\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}z_k\overline{z_\ell}=\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2+\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n}\left(z_k\overline{z_\ell}+z_\ell\overline{z_k}\right)\\&=\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2+\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n}2\,\mathrm{Re}\left(z_k\overline{z_\ell}\right)=\sum_{k=1}^{n}r_k^2+2\sum_{1\leqslant k<\ell\leqslant n}r_kr_\ell\cos(\theta_k-\theta_\ell)\end{aligned}$$

3

1. Seuls a. et b. sont vrais. En effet,

$$\prod_{k=1}^{n} 4k^2 = \prod_{k=1}^{n} (2k)^2 = \left(\prod_{k=1}^{n} 2k\right)^2 = \left(2^n n!\right)^2 = 4^n n! \quad \text{et} \quad (2n)! \neq 2^n n! \text{ dès que } n > 1$$

2. Seul b. est correct : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, t_i apparaît $2n$ fois dans la matrice des $t_i t_j$ (n fois dans la colonne i et n fois dans la ligne i), d'où

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}^{n} t_i t_j = \left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right)^{2n}$$

Variante

On peut aussi appliquer les règles de calcul :

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}^{n} t_i t_j = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} t_i t_j = \prod_{i=1}^{n}\left(t_i^n \prod_{j=1}^{n} t_j\right) = \left(\prod_{j=1}^{n} t_j\right)^n \prod_{i=1}^{n} t_i^n = \left(\prod_{j=1}^{n} t_j\right)^n \left(\prod_{i=1}^{n} t_i\right)^n = \left(\prod_{j=1}^{n} t_j\right)^{2n}$$

3. Seuls b. et c. sont corrects :

$$\prod_{k=1}^{n} k^k = \prod_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{k} k = \prod_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n} k = \prod_{i=1}^{n}\prod_{k=i}^{n} k = \prod_{i=1}^{n} \frac{n!}{(i-1)!} = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{n!}{k!}$$

4. Seuls a. et b. sont vrais :

$$\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+n}{n} = \prod_{k=n+1}^{2n} \frac{k}{n} = \frac{1}{n^n}\prod_{k=n+1}^{2n} i = \frac{1}{n^n}\frac{(2n)!}{n!}$$

4

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 3^{2k+1} 2^{n-3k} = 3\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(9/4)^k 2^{n-k} = 3\left(2+\frac{9}{4}\right)^n = 3\frac{17^n}{4^n}\cdot$

5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned}\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\binom{n}{3} = 5n &\iff n + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n \\ &\iff 6+3(n-1)+(n-1)(n-2) = 30 \\ &\iff n^2 = 25\end{aligned}$$

La seule solution est donc 5.

6 ↺

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)} = \dfrac{1}{2(x+1)}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x+2}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}\right)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\alpha_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k(k+1)} - \dfrac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}$.

7 ↺

On a $\mathrm{T} = \operatorname{Re}\mathrm{U}$ où $\mathrm{U} = \displaystyle\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\exp\left(\dfrac{ik\pi}{3}\right) = \left(1 + e^{i\pi/3}\right)^6 = \left(2e^{i\pi/6}\cos(\pi/6)\right)^6$. Ainsi $\mathrm{T} = -27$.

8 ↺

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{P}(x) = (1+x)^n$. On remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \ \text{ et } \ \mathrm{P}'(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}$$

d'où $\mathrm{S}_n = \mathrm{P}'(1) = n2^{n-1}$. De même, on a $\mathrm{T}_n = -\mathrm{P}'(-1) = 0$.

9 ↺

On a

$$\sigma_n = \sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{2i-j} = \left(\sum_{i=0}^{n} 4^i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} 2^{-j}\right) = \frac{4^{n+1}-1}{3} \times \frac{2^{-n-1}-1}{-1/2} = \frac{2}{3}(4^{n+1}-1)\left(1-2^{-n-1}\right)$$

10 ↺

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![2, n]\!]$, on a $2 \leqslant k \leqslant n$. Ainsi $\displaystyle\prod_{k=2}^{n} 2 = 2^{n-1} \leqslant \prod_{k=2}^{n} k = n! \leqslant \prod_{k=2}^{n} n = n^{n-1}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2^n n! = 2 \times 4 \times \cdots \times 2n \leqslant 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (2n) = (2n)!$. Le cas $n = 0$ est évident.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \dfrac{\prod_{k=1}^{2n} k}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \dfrac{(2n)!}{2^n n!}$.

11 ↺

En permutant les indices i et j, on obtient

$$\mathrm{S}_n = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{i}{i+j} = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \frac{j}{j+i}$$

d'où $2\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} 1 = n^2$ ainsi $\mathrm{S}_n = \frac{n^2}{2}$.

12

1. Supposons que m est un multiple de n. On a alors $\forall z \in \mathbb{U}_n,\ z^m = 1$, d'où $S_m = n$.
2. Posons $\omega := \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$. On a

$$S_m = \sum_{z \in \mathbb{U}_n} z^m = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{km} = \frac{\omega^{nm} - 1}{\omega^m - 1} = 0$$

car $\omega^m = \exp\left(\frac{2mi\pi}{n}\right) \neq 1$.

13

Pour $z = 1$, on a $S_n = n + 1$. Supposons dans la suite que $z \neq 1$. On a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} kz^k = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\ell=1}^{k} z^k = \sum_{1 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant n} z^k = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} z^k = \sum_{\ell=1}^{n} z^\ell \frac{z^{n-\ell+1} - 1}{z - 1} = \frac{1}{z-1} \sum_{\ell=1}^{n} \left(z^{n+1} - z^\ell\right)$$
$$= \frac{1}{z-1}\left(nz^{n+1} - z\frac{z^n - 1}{z - 1}\right)$$

14

On a

$$S_n = \sum_{i=1}^{2n} (-1)^i i^3 = \sum_{k=1}^{n} \left((2k)^3 - (2k-1)^3\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(12k^2 - 6k + 1\right) = 12\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 6\frac{n(n+1)}{2} + n$$
$$= 2n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1) + n = n^2(4n+3)$$

15

On a

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (x_i - x_j)^2 = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \left(x_i^2 - 2x_i x_j + x_j^2\right) = n\sigma - 2s^2 + n\sigma = 2n\sigma - 2s^2$$

Un bref coup d'œil aux probabilités

L'identité démontrée ci-dessus est n'est autre que la formule de Huygens $\mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \mathbf{E}(X)^2$ pour une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur un ensemble fini.

16

Notons u_n la somme de l'énoncé et posons $\sigma_n := \sum_{k=0}^{n-1} x^k e^{ik\theta}$.

⇛ Si $\theta = 0\,[\pi]$ et $x = e^{i\theta}$, alors $u_n = n$.

⇛ Sinon, on a $xe^{i\theta} \neq 1$ donc $\sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} \left(xe^{i\theta}\right)^k = \frac{1-x^n e^{in\theta}}{1-xe^{i\theta}}$, d'où

$$\begin{aligned} u_n &= \operatorname{Re} \sigma_n = \operatorname{Re} \frac{\left(1-x^n e^{in\theta}\right)\left(1-xe^{-i\theta}\right)}{\left(1-xe^{i\theta}\right)\left(1-xe^{-i\theta}\right)} = \operatorname{Re} \frac{1-x^n e^{in\theta} - xe^{-i\theta} + x^{n+1} e^{i(n-1)\theta}}{1+x^2-2x\cos\theta} \\ &= \frac{1-x^n \cos n\theta - x\cos\theta + x^{n+1}\cos(n-1)\theta}{1+x^2-2x\cos\theta} \end{aligned}$$

17

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\forall p \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_{p+k} = u_{p+2n}$.

⇛ La propriété est clairement vraie au rang $n = 0$.

⇛ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n. Pour $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{p+2(n+1)} &= u_{p+2+2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_{p+2+k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (u_{p+1+k} + u_{p+k}) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u_{p+k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_{p+k} = u_{p+n+1} + u_p + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) u_{p+k} \\ &= u_{p+n+1} + u_p + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} u_{p+k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u_{p+k} \end{aligned}$$

d'où le résultat au rang $n+1$.

18

En sommant sur les diagonales :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |i-j| = \sum_{k=1}^{n-1} 2k \times (n-k) = 2n\frac{n(n-1)}{2} - 2\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} \\ &= \frac{n(n-1)}{3} (3n - 2n + 1)) = \frac{n(n-1)(n+1)}{3} \end{aligned}$$

Variante

On peut aussi remarquer que

$$S_n = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |i-j| + \sum_{1 \leqslant j > i \leqslant n} |i-j| = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (j-i)$$

puis sommer classiquement sur j puis i (ou l'inverse).