AN 11 | Développements limités

L'analyse asymptotique, bien qu'élémentaire en tant que théorie, est un outil très efficace et omniprésent en analyse.

La conversion de Saint-Paul, Michelange

1. Quizz

1 — *Vrai ou faux ? f*

1. $(1+x)^x \underset{0}{=} 1+x^2+o\left(x^2\right)$.
2. L'application $f : x \mapsto x|x|$ admet un $\mathrm{DL}_2(0)$.
3. L'application $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ n'admet pas de $\mathrm{DL}_2(2)$.
4. $\cosh(\tan x) \underset{0}{=} 1+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^4+o\left(x^4\right)$.
5. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un $\mathrm{DL}_0(0)$, alors f est continue en 0.
6. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admet un $\mathrm{DL}_1(0)$, alors f est dérivable en 0.
7. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable et admet un $\mathrm{DL}_2(0)$, alors f est deux fois dérivable en 0.
8. L'application $f : x \mapsto \dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}$ est bornée sur $]0,1]$.
9. L'équation $xy'+2y = \dfrac{x}{x^2+1}$ admet une seule solution sur $\mathbb{R}$.
10. Si $u_n = o\left(\sqrt{n}\right)$, alors $\left(1+\dfrac{u_n}{n}\right)^n \sim e^{u_n}$.
11. $\sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n} \sim \dfrac{1}{n^2}$.
12. Si f admet un $\mathrm{DL}_{2n}(0)$, alors $x \mapsto f\left(x^2\right)$ admet un $\mathrm{DL}_{4n}(0)$.
13. Si f admet un $\mathrm{DL}_{2n}(0)$, alors $x \mapsto f\left(\sqrt{x}\right)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0+)$.
14. Si $f(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x+1}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, alors $f(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x}+o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.
15. On a $\arccos(x) \underset{1/2}{=} \dfrac{\pi}{3}-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+o\left(x-\dfrac{1}{2}\right)$.
16. On a $\arccos(x) \underset{1^-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.

2. Exercices élémentaires

2 — *Généralités sur les ordres de développement*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x) \underset{0}{=} x^2-2x^3+x^4+o\left(x^4\right) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{0}{=} -x^3+3x^4+o\left(x^6\right)$$

Déterminer l'ordre maximal auquel on peut développer $f+g$, fg, $\dfrac{f}{g}$, $f\circ g$ et $g\circ f$ en 0.

3 — *Une étude en $+\infty$*

Soit $f: x \mapsto x(\ln(1+2x)-\ln x)$. Déterminer le comportement de f en $+\infty$. Déterminer l'équation de la droite asymptote à la courbe en $+\infty$ ainsi que les positions de la courbe et de son asymptote en $+\infty$.

4 — *Lever d'une forme indéterminée*

Déterminer un équivalent en 0 de $f(x) := \dfrac{1}{\sin 2x} - \dfrac{1}{2\sin x}$.

5 — *Premières salves f*

Calculer le développement limité à l'ordre n au voisinage de 0 des expressions suivantes :

1. $\exp\circ\sin$, $n=3$;
2. $\exp\circ\cos$, $n=4$;
3. $(1+\sin)^{\cos}$, $n=3$;
4. $\ln(3e^x - e^{-x})$, $n=3$;
5. $\ln(1+\cos)$, $n=3$;
6. $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$, $n=3$;
7. $\sqrt{1+\ln(1+x)}$, $n=3$;
8. $\dfrac{\arctan}{\sin}$, $n=4$;
9. $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}}$, $n=3$;
10. $\dfrac{\cos(x)}{1+x^2}$, $n=5$;
11. $\dfrac{1-\cos}{1+\sin}$, $n=3$.

6 — *Une disjonction asymptotique f*

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$. Déterminer un équivalent de u_n.

7 — *Équivalent d'une suite récurrente f*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}$.

1. Démontrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Établir que $\dfrac{1}{u_{n+1}^2} - \dfrac{1}{u_n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. En déduire un équivalent de u_n au moyen du théorème de Cesàro.

3. Exercices classiques plus techniques

8 — *Une forme indéterminée f*

Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par $u_n := \left(2\cos\left(\dfrac{n}{n+1}\dfrac{\pi}{3}\right)\right)^n$.

9 — *Une variation sur les puissances* *f*

Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par $u_n = \sqrt[n]{\cosh n}$.

10 — *Une forme indéterminée en $+\infty$* *f*

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq \frac{\pi}{2}\,[\pi]$. Étudier le comportement asymptotique de $u_n = \left(\dfrac{\cos\left(a+\frac{b}{n}\right)}{\cos a}\right)^n$.

11 — *Supplice de la grande roue* *f*

Étudier le comportemant de $\left(2^x+3^x-12\right)^{\tan\left(\pi\frac{x}{4}\right)}$ au voisinage de 1.

12 — *Développement asymptotique d'une suite récurrente* *f*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \ln(n+u_n)$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ possède une limite et la déterminer.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ u_n \leqslant \ln(2n)$.
3. Montrer que $u_n \sim \ln n$.
4. Montrer que $u_n - \ln n \sim \frac{\ln n}{n}$.

13 — *Une suite définie implicitement* *ff*

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\sinh\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Justifier que $\forall x > 0,\ \tanh x < x$.
2. En déduire le tableau de variations de f.
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution $u_n > 0$.
4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante. Quelle est sa limite ?
5. Déterminer un équivalent de u_n.

14 — *Un petit calcul* *ff*

Déterminer le $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f : x \mapsto \arctan\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{2x+1}}\right)$. On commencera par développer $f'(x)$.

4. Indications

1

Attention au 1., le DL de $x \longmapsto (1+x)^{\alpha}$ ne peut-être utilisé car α ne peut dépendre de x.

2

Ordre 4 pour $f+g$ et 7 pour fg.

3

On trouve $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\ln(2) + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{8x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

4

Développer le sinus à l'ordre trois en 0.

5

Aucune difficulté particulière : utiliser les opérations sur les DL.

6

Mettre $\sqrt{n}$ en facteur puis développer.

7

Suivre la méthode du cours, ici détaillée. On trouve $u_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$.

8

Développer à l'ordre un le cosinus en $\frac{\pi}{3}$.

9

Factoriser par e^n dans le cosinus hyperbolique.

10

Développer le cosinus à l'ordre un en a.

11

Long live Taylor ! On trouve $\left(2^4 3^9\right)^{-\frac{4}{\pi}}$.

12

On pourra utiliser l'inégalité $\ln x \leqslant x$ pour $x > 0$.

13

Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ puis utiliser les DL de sinh en 0.

14

On pourra dériver f en x voisin de 0 et développer de préférence $f'(x)$.

5. Solutions

1

1. Vrai car $(1+x)^x = e^{x\ln(1+x)} = \exp\left(x^2 + o\left(x^2\right)\right) = 1 + x^2 + o\left(x^2\right)$.
2. C'est faux. Raisonnons par l'absurde en supposant que f admette un $\mathrm{DL}_2(0)$. Comme $f(x) \underset{0}{=} o(x)$, $\exists a \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \underset{0}{=} ax^2 + o\left(x^2\right)$. Ainsi, $|x| \underset{0}{=} ax + o(x)$ ce qui est absurde car la valeur absolue n'est pas dérivable en 0.
3. Faux. Petite erreur de calcul : $\cosh(\tan x) \underset{0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o\left(x^4\right)$.
4. Vrai, c'est du cours.
5. Vrai, c'est du cours.
6. Faux. Cex :
$$f(0) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
On a $f(x) \underset{0}{=} o\left(x^2\right)$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais on vérifie facilement que f' n'est pas continue en 0 donc a fortiori f' n'est pas dérivable en 0.
7. Faux. Cette fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ donc admet des DL à tout ordre en tout point de cet intervalle.
8. Vrai. Cette fonction est prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = -1/2$. On applique le théorème de Weierstrass à ce prolongement pour conclure.
9. Vrai. Après tout calcul, les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont de la forme :
$$f_\lambda : t \mapsto \frac{1}{t} - \frac{\arctan t}{t^2} + \frac{\lambda}{t^2} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$
   - *Analyse.* Soit y une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation. Il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y|_{\mathbb{R}_+^*} = f_a|_{\mathbb{R}_+^*}$ et $y|_{\mathbb{R}_-^*} = f_b|_{\mathbb{R}_-^*}$. Comme
   $$f_\lambda(t) \underset{0}{=} \frac{\lambda}{t^2} - \frac{t}{3} + o(t)$$
   la fonction y est dérivable en 0 *si et seulement si* $a = b = 0$.
   - *Synthèse.* Posons $y(0) = 0$ et
   $$\forall t \in \mathbb{R}^*,\ y(t) = \frac{1}{t} - \frac{\arctan t}{t^2}$$
   Comme $\frac{1}{t} - \frac{\arctan t}{t^2} = -\frac{t}{3} + o(t)$, y est dérivable en 0 avec $y'(0) = -1/3$ et y est bien solution de l'équation initiale.
10. Vrai. Supposons que $u_n = o\left(\sqrt{n}\right)$. On a alors $\frac{u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où
$$\left(1 + \frac{u_n}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{u_n}{n}\right)\right) = \exp\left(u_n - \frac{u_n^2}{2n} + o\left(\frac{u_n^2}{n}\right)\right) = \exp(u_n + o(1)) \sim e^{u_n}$$

11. Faux. En effet, en posant $u_n = \sqrt[n]{n}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \exp\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right) = \exp\left(\frac{\ln(n)+\ln(1+1/n)}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right) = \exp\left(\frac{\ln(n)}{n} - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right) \\ &= u_n\left(1 - \frac{\ln n}{n^2} + o\left(\frac{\ln n}{n^2}\right)\right) \end{aligned}$$

d'où $u_{n+1} - u_n \sim -\dfrac{\ln n}{n^2}$ car $u_n \sim 1$.

12. Vrai par composition *à droite* dans les DL.

13. Faux; cex : sin pour $n = 2$.

14. Faux. Comme $\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{-1} \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$, on a $f(x) \underset{+\infty}{=} \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

15. Vrai : arccos est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, on obtient le résultat par la formule de Taylor-Young à l'ordre un en $1/2$.

16. Comme $\arccos(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} 0$, on a $f(x) \underset{1^-}{\sim} \sin\big(f(x)\big) = \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x}\sqrt{1+x} \underset{1^-}{\sim} \sqrt{2}\sqrt{1-x}$.

Enseignements à tirer de cet exercice

- ⇛ On ne « somme » pas des équivalents (c'est la source d'erreur la plus fréquente en asymptotique).
- ⇛ La plupart des règles de calcul asymptotique sont évidentes, on les retrouvent de tête : par exemple, $f(x) = o(x) \iff f(x) = o(2x)$ car $f(x)/x \xrightarrow[x\to a]{} 0 \iff f(x)/(2x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.

2

- ⇛ On peut développer $f+g$ au maximum à l'ordre 4.
- ⇛ On peut développer fg au maximum à l'ordre 7 (on compare $-x^3 \times o\left(x^4\right)$ et $x^2 \times o\left(x^6\right)$).
- ⇛ On a $\dfrac{g(x)}{f(x)} \underset{0}{=} \dfrac{-x^3+3x^4+o\left(x^6\right)}{x^2-2x^3+x^4+o\left(x^4\right)} = \dfrac{-x+3x^2+o\left(x^4\right)}{1-2x+x^2+o\left(x^2\right)}$. L'inverse du numérateur est développable au maximum à l'ordre deux sous la forme $1+ax+bx^2+o\left(x^2\right)$ donc g/f est développable au maximum à l'ordre 3 (on compare $1 \times o\left(x^4\right)$ et $-x \times o\left(x^2\right)$).
- ⇛ Comme $g(x)^2$ est développable au maximum à l'ordre 9, c'est aussi le cas de $f \circ g$.
- ⇛ Comme $f(x)^3$ est développable au maximum à l'ordre 8, c'est aussi le cas de $g \circ f$.

3

On a

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(\ln\left(2x\left(1+\frac{1}{2x}\right)\right) - \ln x\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\left(\ln 2 + \frac{1}{2x} - \frac{1}{8x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} x\ln 2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit que la droite d'équation $y = x\ln 2 + \frac{1}{2}$ est asymptote à la courbe représentative de f en $+\infty$.

Comme $f(x) - x\ln 2 - \frac{1}{2} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{8x}$, expression négative au voisinage de $+\infty$, la courbe de f est située au-dessous de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

4

Au voisinage épointé de zéro, on a :

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)}\right) = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right) = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + o(x)$$

Ainsi $f(x) = \dfrac{1}{\sin 2x} - \dfrac{1}{2\sin x} = \dfrac{x}{4} + o(x) \sim \dfrac{x}{4}$.

5

1. $\Rrightarrow$ Comme $u = \sin(x) \underset{0}{\sim} x$ et il faut développer e^u à l'ordre 3 en u : $e^u = 1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + o\left(u^3\right)$.

   $\Rrightarrow$ Il faut donc développer de u à l'ordre 3 en x : $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$.

   $\Rrightarrow$ Comme $\sin^2(x) = x^2 + o\left(x^3\right)$ et $\sin^3(x) = x^3 + o\left(x^3\right)$, on obtient $e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$.
2. Comme $\cos(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, il faut utiliser les DL de e^y au voisinage de 1.

   $\Rrightarrow$ Comme $u = \cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$, on développe e^{1+u} à l'ordre 2 : $e^{1+u} = e\left(1 + u + \dfrac{u^2}{2} + o\left(u^2\right)\right)$.

   $\Rrightarrow$ Il faut donc développer u à l'ordre 4 : $u = \cos(x) - 1 = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)$.

   $\Rrightarrow$ Comme $u^2 = x^4/4 + o\left(x^4\right)$, on obtient $e^{\cos(x)} = e - \dfrac{ex^2}{2} + \dfrac{ex^4}{6} + o\left(x^4\right)$.
3. On se ramène à des formes connues : $f(x) := (1+\sin(x))^{\cos(x)} = e^{\cos(x)\ln(1+\sin(x))}$.

   $\Rrightarrow$ Comme $u = \cos(x)\ln(1+\sin(x)) \sim x$, il faut développer e^u à l'ordre 3 : $1 + u + \dfrac{u^2}{2} + \dfrac{u^3}{6} + o\left(u^3\right)$.

   $\Rrightarrow$ Il faut donc développer u à l'ordre 3 :

   $$\ln(1+\sin(x)) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right),\ \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \quad \text{d'où} \quad u(x) = x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$$

   $\Rrightarrow$ Comme $u(x)^2 = x^2 - x^3 + o\left(x^3\right)$ et $u(x)^3 = x^3 + o\left(x^3\right)$, on obtient : $f(x) = 1 + x - \dfrac{2x^3}{3} + o\left(x^3\right)$.
4. Notons $g(x) := \ln(3e^x - e^{-x})$ et $u = 3e^x - e^{-x} - 2$.

   $\Rrightarrow$ Comme $u \sim 4x$, on développe $\ln(2+u)$ à l'ordre 3 : $\ln(2+u) = \log 2 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \dfrac{u^3}{24} + o\left(u^3\right)$.

   $\Rrightarrow$ Il faut donc développer u à l'ordre 3 : $u = 4x + x^2 + \frac{2x^3}{3} + o\left(x^3\right)$.

   $\Rrightarrow$ Comme $u^2 = 16x^2 + 8x^3 + o\left(x^3\right)$ et $u^3 = 64x^3 + o\left(x^3\right)$, on a $g(x) = \ln(2) + 2x - \dfrac{3x^2}{2} + 2x^3 + o\left(x^3\right)$.
5. Notons $f(x) := \ln(1+\cos(x))$ et $u = (1+\cos(x)) - 2$.

⇛ Comme $u \sim -\dfrac{x^2}{2}$, il faut développer $\ln(2+u)$ à l'ordre 1 : $\ln(2+u) = \ln(2) + \dfrac{u}{2} + \mathrm{O}\left(u^2\right)$.

⇛ Il faut donc développer u à l'ordre 3 : $u = -\dfrac{x^2}{2} + o\left(x^3\right)$.

⇛ Come $u^2 = o\left(x^3\right)$, on obtient $f(x) = \ln(2) - \dfrac{x^2}{4} + o\left(x^3\right)$.

6. On pose $g(x) := \sqrt{1+\sqrt{1+x}}$ et $u = \sqrt{1+x} - 1$.

⇛ Comme $u \sim \dfrac{x}{2}$, on développe $\sqrt{2+u}$ à l'ordre 3 : $\sqrt{2+u} = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}u}{4} - \dfrac{\sqrt{2}u^2}{32} + \dfrac{\sqrt{2}u^3}{128} + o\left(u^3\right)$.

⇛ Il faut donc développer u à l'ordre 3 : $u = \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + o\left(x^3\right)$.

⇛ Comme $u^2 = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x^3}{16} + o\left(x^3\right)$ et $u^3 = \dfrac{x^3}{8} + o\left(x^3\right)$, on a $f(x) = \sqrt{2}\left(1 + \dfrac{x}{8} - \dfrac{5x^2}{128} + \dfrac{21x^3}{1\,024} + o\left(x^3\right)\right)$.

7. On pose $g(x) := \sqrt{1+\ln(1+x)}$ et $u = \ln(1+x)$.

⇛ Comme $u \sim x$, on développe $\sqrt{1+u}$ à l'ordre 3 : $\sqrt{1+u} = 1 + \dfrac{u}{2} - \dfrac{u^2}{8} + \dfrac{u^3}{16} + o\left(u^3\right)$.

⇛ Il faut donc développer u à l'ordre 3 : $u = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$.

⇛ Comme $u^2 = x^2 - x^3 + o\left(x^3\right)$ et $u^3 = x^3 + o\left(x^3\right)$, on obtient $g(x) = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{3x^2}{8} + \dfrac{17x^3}{48} + o\left(x^3\right)$.

8. Comme les DL de arctan et sin commencent par x, on pourra développer le quotient de ces deux expressions après factorisation par x. Il faut donc partir de DL à l'ordre 5 :

$$\arctan(x) = x\left(x - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + o\left(x^4\right)\right),\ \sin(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)\right)$$

Posons $u = \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right) = o\left(x^2\right)$. Comme $\dfrac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o\left(u^2\right)$ et $u^2 = \dfrac{x^4}{36} + o\left(x^4\right)$, on en déduit que

$$\frac{\arctan(x)}{\sin(x)} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{59x^4}{360} + o\left(x^4\right)$$

9. Il s'agit d'un simple produit. Comme $\sin(x) \sim x$ et $(1+x)^{-1/2} \sim 1$, il suffit de développer le sinus à l'ordre 3 et l'autre expression à l'ordre deux :

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right),\ (1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{8} + o\left(x^2\right)$$

d'où $\dfrac{\sin(x)}{\sqrt{1+x}} = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^3}{24} + o\left(x^3\right)$.

10. C'est un produit de deux expressions équivalentes à 1, il suffit de les développer à l'ordre 5. Après tout calcul :

$$\frac{\cos(x)}{1+x^2} = 1 - \frac{3x^2}{2} + \frac{37x^4}{24} + o\left(x^5\right)$$

11. Comme $1 - \cos(x) \sim \dfrac{x^2}{2}$, il suffit de développer $(1+\sin(x))^{-1}$ l'ordre 1 et $1-\cos(x)$ à l'ordre 3. On trouve

$$\frac{1-\cos(x)}{1+\sin(x)}=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right)$$

6

On a

$$\begin{aligned}u_n&=\sqrt{n}\left(1+a\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/2}+b\left(1+\frac{2}{n}\right)^{1/2}\right)=\sqrt{n}\left(1+a\left(1+\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}\right)+b\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\\&=(1+a+b)\sqrt{n}+\frac{a+2b}{2\sqrt{n}}-\frac{a+4b}{8n\sqrt{n}}+o\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\end{aligned}$$

On en déduit la discussion suivante :

⇛ Cas 1 : $a+b\neq-1$. On a $u_n\sim(1+a+b)\sqrt{n}$.

⇛ Cas 2 : $a+b=-1$ et $a+2b\neq 0$. On a $u_n\sim\dfrac{a+2b}{2\sqrt{n}}\cdot$

⇛ Cas 3 : $a=-2$ et $b=1$. On a $u_n\sim-\dfrac{1}{4n\sqrt{n}}\cdot$

7

Pour x positif, on pose $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}\cdot$

1. Puisque $f(\mathbb{R}_+^*)\subset\mathbb{R}_+^*$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive. On en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_n^2}\leqslant u_n$$

   Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car est minorée par zéro et décroissante. Comme f est continue, sa limite ℓ est un point fixe de f. Il est facile de vérifier que l'équation $f(x)=x$ n'admet que 0 comme solution d'où $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$\frac{1}{u_{n+1}^2}-\frac{1}{u_n^2}=\frac{(1+u_n^2)^2-1}{u_n^2}=2+u_n^2$$

   d'où $\dfrac{1}{u_{n+1}^2}-\dfrac{1}{u_n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}2$. On déduit du théorème de Césaro que

$$\frac{1}{nu_n^2}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1}^{-2}-u_k^{-2}\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}2$$

   donc $\dfrac{1}{nu_n^2}\sim 2$ donc $u_n\sim\dfrac{1}{\sqrt{2n}}$ (car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs positives).

8

Par la formule de Taylor-Young, on a

$$2\cos\left(\frac{n}{n+1}\frac{\pi}{3}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)=1+\frac{\pi}{\sqrt{3}n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Ainsi $\ln u_n=\frac{\pi}{\sqrt{3}}+o(1)$ d'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\frac{\pi}{\sqrt{3}}}$ (composition des limites).

9

On a

$$\ln u_n = \frac{1}{n}\ln\left(e^n\frac{1+e^{-2n}}{2}\right) = 1+\frac{1}{n}\ln\left(1+e^{-2n}\right)-\frac{\ln 2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

par opérations sur les limites usuelles. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$ par continuité de l'exponentielle en 1.

10

On a

$$\begin{aligned}\ln u_n &= n\ln\left(\frac{\cos\left(a+\frac{b}{n}\right)}{\cos a}\right) = n\ln\left(\frac{\cos a-\frac{b\sin a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)}{\cos a}\right) = n\ln\left(1-\frac{b\tan a}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\\ &= -b\tan a+o(1)\end{aligned}$$

Ainsi $\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -b\tan a$ d'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-b\tan a}$.

11

On a $2^{u+2}+3^{u+2}-12=4e^{u\ln 2}+9e^{u\ln 3} \underset{0}{=} 1+\ln\left(2^4 3^9\right)u+o(u)$. De plus, $\tan\left(\frac{\pi}{4}(2+u)\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}u\right)^{-1}$ d'où

$$\ln\left(f(2+u)\right) \underset{0}{\sim} -\frac{4}{\pi}\ln\left(2^4 3^9\right) \quad \text{donc } f(x) \xrightarrow[x\to 2]{} (2^4 3^9)^{-\frac{4}{\pi}} \text{ (composition des limites)}$$

12

1. On a $u_n>0$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ par une récurrence facile. Ainsi, $u_{n+1}\geqslant \ln n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
2. Prouvons le résultat par récurrence sur $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
   - ⇛ On a $u_2=\ln 2\geqslant \ln 4$.
   - ⇛ Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $\geqslant 2$. Supposons que $u_n\leqslant \ln(2n)$. Comme $\ln(2n)=\ln 2+\ln n\leqslant 2+n$, on a
   $$u_{n+1}=\ln(n+u_n)\leqslant \ln(n+n+2)=\ln(2n+2)$$
   d'où l'inégalité au rang $n+1$.
3. Pour tout $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant 2$, on a $u_n=\ln(n-1+u_{n-1})\geqslant \ln(n-1)$, ainsi $\ln(n-1)\leqslant u_n\leqslant \ln 2+\ln n$. Comme $\ln 2+\ln n\sim \ln n$ et $\ln(n-1)\sim\ln n$, on a $u_n\sim\ln n$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, on a

$$u_n - \ln n = \ln\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n}\right) \sim -\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n} \sim \frac{u_{n-1}}{n} \sim \frac{\ln(n-1)}{n} \sim \frac{\ln n}{n}$$

puisque $\frac{1}{n} = o\left(\frac{\ln(n-1)}{n}\right)$ et $\frac{u_{n-1}}{n} \sim \frac{\ln(n-1)}{n}$ (cf. la question précédente).

13

1. Posons $\phi(x) = x - \tanh x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$; ϕ est dérivable et $\phi'(x) = 1 - \left(1 - \tanh^2 x\right) = \tanh^2 x \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et ϕ' ne s'annule qu'en zéro. Ainsi ϕ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ et, puisque $\phi(0) = 0$, ϕ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (opérations sur les fonctions dérivables, un produit et une composée) et, sur cet intervalle :

$$f'(x) = \sinh\left(\frac{1}{x}\right) + x \times \frac{-1}{x^2} \times \cosh\left(\frac{1}{x}\right) = \cosh\left(\frac{1}{x}\right)\left(\tanh\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x}\right) < 0$$

par la question précédente. De plus, on a $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x \times \frac{1}{x} = 1$ et $f(x) \xrightarrow[x \to 0+]{} +\infty$ par croissances comparées.

3. Par ce qui précède et le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f réalise une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]1, \infty[$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n+1}{n} > 1$ donc l'équation $f(x) = \frac{n+1}{n}$ admet une unique solution $u_n > 0$.

4. Par ce qui précède $u_n = f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f strictement décroissante, f^{-1} l'est aussi et puisque $\left(1 + \frac{1}{n}\right)_{n \geqslant 1}$ est strictement décroissante, $(u_n)_{n \geqslant 1}$ est strictement croissante. Comme $f^{-1}(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ (cf. les variations de f) et $1 + \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1$, on a $u_n = f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ par composition des limites.

5. Puisque $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, on a

$$1 + \frac{1}{n} = u_n \sinh\left(\frac{1}{u_n}\right) = u_n\left(\frac{1}{u_n} + \frac{1}{6u_n^3} + o\left(\frac{1}{u_n^3}\right)\right) = 1 + \frac{1}{6u_n^2} + o\left(\frac{1}{u_n^2}\right)$$

d'où $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{6u_n^2}$, ie $u_n^2 \sim \frac{n}{6}$ puis $u_n \sim \sqrt{\frac{n}{6}}$ car $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

14

La fonction f est dérivable au voisinage de 0 en tant que composée de fonctions dérivables et au voisinage de 0 ,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1 + \dfrac{x+1}{2x+1}} \times \frac{-1}{(2x+1)^2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{2x+1}}} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{3x+2} \times \frac{1}{\sqrt{(x+1)(2x+1)}} \\ &= -\frac{1}{4} \times \frac{1}{1 + \frac{3}{2}x} \times \left(1 + 3x + 2x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Puisqu'au voisinage de 0, $\dfrac{1}{1+u} \underset{u \to 0}{=} 1 - u + o(u)$, $(1+u)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2}u + o(u)$ on a

$$\frac{1}{1+\frac{3}{2}x} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{3}{2}x+o(x) \quad \text{et} \quad \left(1+3x+2x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \underset{x\to 0}{=} 1-\frac{3}{2}x+o(x)$$

ainsi, par produit puis troncature à l'ordre un, $f'(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x+o(x)$ d'où, après intégration et puisque $f(0)=\arctan(1)=\frac{\pi}{4}$, $f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{\pi}{4}-\frac{x}{4}+\frac{3}{8}x^2+o\left(x^2\right)$.