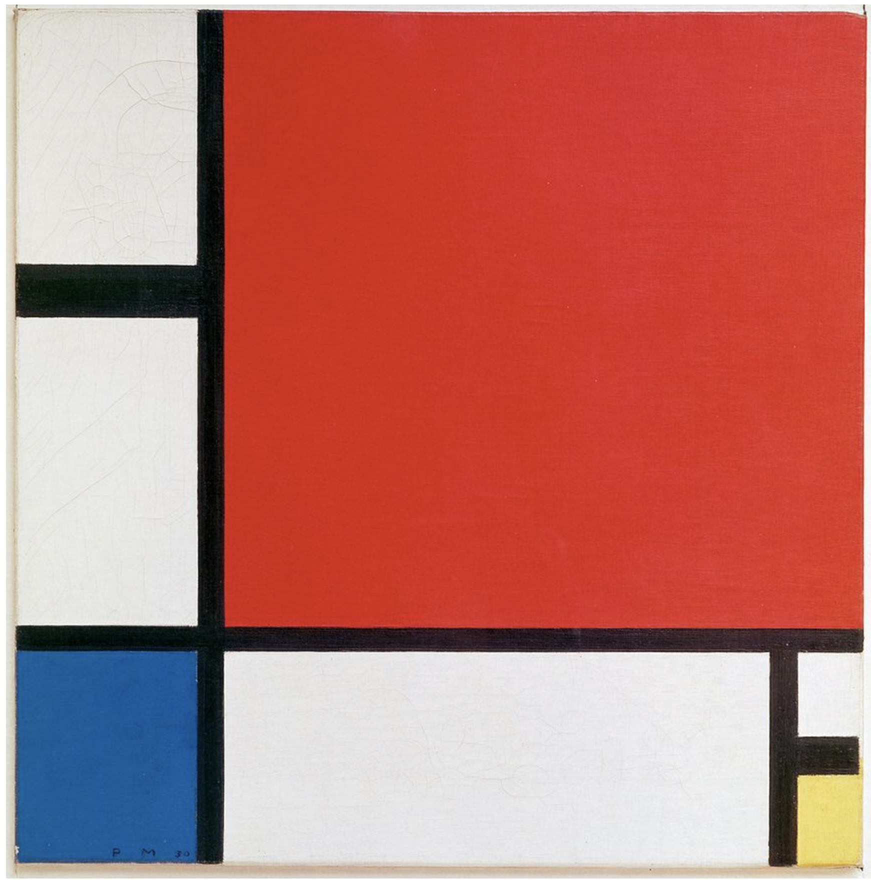
ALG 6 | Dénombrement

Les lettres majuscules désignent des ensembles (sauf mention contraire). Le cardinal d'un ensemble E *sera noté* |E|.



Composition with Red, Blue and Yellow, Piet Mondrian

1. Quizz

1 — Vrai ou faux ? *f*

1. Pour $(n,m)\in\mathbb{Z}^2$ tel que $n\leqslant m$, on a $\operatorname{card}[\![n,m]\!]=m-n$.
2. Il y a 10^n entiers naturels ayant exactement n chiffre(s) en base 10 (pour $n\in\mathbb{N}$).
3. Il y a 2^n matrices carrées de taille n à coefficients dans $\{0,1\}$.
4. Il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ couples (x,y) avec $x\neq y$ et $(x,y)\in[\![1,n]\!]^2$.
5. Il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ applications strictement croissantes de $[\![1,2]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
6. Il y a $\frac{n(n+1)}{2}$ applications croissantes de $[\![1,2]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$.
7. Il y a n^n-n applications non surjectives de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même.
8. Il y a 2^n-2 surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,2]\!]$.
9. Le mot MISSISSIPPI possède $\frac{11!}{4!4!2!}$ anagrammes.
10. L'ensemble $[\![1,n]\!]$ (pour $n\in\mathbb{N}^*$) admet 2^{n-1} parties de cardinal pair.
11. Pour $x\in\mathbb{R}_+$, le cardinal de $\mathbb{N}\cap[0,x]$ vaut $\lfloor x\rfloor$.
12. Pour A et B finis, on a $|\mathrm{A}\times\mathrm{B}|=|\mathrm{A}|\times|\mathrm{B}|$.
13. Pour A et B finis, on dénombre $|\mathrm{A}|^{|\mathrm{B}|}$ applications de A dans B.
14. Une application $f:[\![2019,n+2018]\!]\to[\![1,n]\!]$ surjective est injective (pour $n\in\mathbb{N}^*$).
15. L'ensemble $\left\{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\,;\,(i,j)\in[\![1,n]\!]\right\}$ est de cardinal $\frac{n(n+1)}{2}$.
16. Pour A et B parties de E fini, on a $|\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}|=|\mathrm{A}|+|\mathrm{B}|-2|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}|$.
17. Le nombre d'injections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$ est $\frac{n!}{(n-p)!}$.
18. Le nombre de surjections de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![n,2n]\!]$ est $n!$.

2 — QCM sur le dénombrement

1. On tire une main (sans ordre) de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.
   - **a.** On dénombre $\binom{32}{5}$ mains possibles.
   - **b.** On dénombre $\binom{8}{2}\binom{24}{3}$ mains comportant exactement 2 piques.
   - **c.** On dénombre $\binom{4}{1}\binom{31}{4}$ mains comportant au moins une dame.
   - **d.** On dénombre $2\binom{16}{5}$ mains ne comportant qu'une seule couleur.
   - **e.** On dénombre $3\times4\times21$ mains comportant exactement trois piques et une dame.
   - **f.** On dénombre $\binom{8}{5}4^5$ mains où toutes les cartes ont des valeurs différentes.
2. On écrit tous les entiers naturels de 0 à 999 en base 10.
   - **a.** Il y a 3^7 nombres dont aucun des chiffres n'appartient à $\{1,2,3\}$
   - **b.** Il y a 9^3 nombres où le chiffre 1 n'apparaît pas.

c. Il y a $10^3 - 9^3$ nombres où le chiffre 0 n'apparaît qu'une seule fois.

d. Il y a 9^3 nombres où le chiffre 0 n'apparaît pas.

e. On dénombre 300 fois le chiffre 1.

f. On dénombre 300 fois le chiffre 0.

3. Une urne contient 5 boules bleues (numérotées de 1 à 5) et 8 boules noires (numérotées de 6 à 13). On tire successivement 6 boules, en remettant à chaque fois la boule tirée. On dénombre :

a. 13^6 tirages au total ;

b. $\binom{6}{5} \times 8^5 \times 5$ tirages amenant 5 boules noires et une boule bleue ;

c. $5^6 + 6 \times 8 \times 5^5$ tirages amenant une boule noire au plus ;

d. $8^3 \times 5^3$ tirages amenant 3 boules noires et 3 boules bleues ;

e. $5 \times \binom{12}{5}$ tirages amenant une boule bleue au moins.

4. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, avec $n \geqslant 2$. On tire *successivement et sans remise* toutes les boules de l'urne et on note les numéros obtenus. On dénombre :

a. n^n tirages possibles ;

b. $n!$ tirages pour lesquels les numéros obtenus sont dans l'ordre croissant ;

c. $\dfrac{n!}{k!}$ tirages dont les k premiers numéros sont dans l'ordre croissant (où $k \in [\![1, n]\!]$) ;

d. $\dfrac{n!}{2}$ tirages où 1 arrive avant deux.

2. Exercices élémentaires

3 — *Fonctions impaires*

Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^2$. Dénombrer les applications impaires $f : [\![-p, p]\!] \to [\![-n, n]\!]$.

4 — *Jeux de cartes*

On appellera jeu *un ensemble* de 13 cartes parmi 52 (comportant les quatre couleurs usuelles : trèfle, pique, cœur et carreau). Calculer le nombre de jeux :

1. au total ;

2. contenant au moins un as ;

3. contenant exactement un as ;

4. contenant deux couleurs exactement.

5 — *Mains*

On considère les mains de 5 cartes que l'on peut extraire d'un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains comprenant exactement un as ?
3. Combien y a-t-il de mains comprenant au moins un valet ?
4. Combien y a-t-il de mains comprenant (à la fois) au moins un roi et au moins une dame ?

6 — *Applications respectant une partition*

Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{E_1, E_2\}$ une partition de E. On note n_1 le cardinal de E_1. Déterminer le nombre d'applications $f : E \to E$ laissant stables E_1 et E_2.

7 — *Dénombrements de couples de parties*

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $E := [\![1, n]\!]$. Dénombrer les couples (A, B) de parties de E telles que :

1. $|A| = 1$ et $|B| = 2$;
2. $|A \cup B| = 1$;
3. $|A \cap B| = 1$ et $|A \cup B| = 2$.

8 — *Formules de base*

Soit A, B et C des parties d'un ensemble.

1. Sachant que $|A \cup B| = 50$, $|A| = 15$ et $|A \cap B| = 5$, calculer $|B|$.
2. Si $|A \cup B| = 60$ et $|A| = 3 \times |B| = 45$ peut-on déduire que A et B sont disjoints ?
3. Si $|A \cup B| = 60$, $|A| = 10$ et $|B \setminus A| = 50$ peut-on déduire que $A \subset B$?

9 — *Doubles comptages* f

On considère des entiers naturels n, k et ℓ tels que $0 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant n$.

1. On suppose dans cette question que $k \geqslant 1$. On considère n personnes parmi lesquelles on choisit un ensemble de k personnes appelé *comité*. Les membres du comité choisissent ensuite un président parmi eux. Retrouver la formule comité-président au moyen d'un double comptage :
$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$$
2. On considère un ensemble E de cardinal n. En dénombrant de deux manières les couples (G, F) de parties de E telles que $G \subset F$, $|G| = \ell$ et $|F| = k$, démontrer que
$$\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$$

3. Exercices classiques plus techniques

10 — *Couples et triplets sous condition* f

Soit $n \in \mathbb{N}$. Dénombrer les ensembles E_1, E_2 et E_3 suivants :

$$\left\{(x, y) \in [\![0, n]\!]^2 ; x < y\right\} \quad , \quad \left\{(x, y, z) \in [\![0, n]\!]^3 ; z = \max(x, y, z)\right\} \quad \text{et} \quad \left\{(x, y, z) \in [\![0, n]\!]^3 ; z = x + y\right\}$$

11 — *Fonctions* f

Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Combien existe-t-il d'applications dont l'ensemble de départ est une partie de E et qui sont à valeurs dans $[\![1, p]\!]$?

12 — *Records* f

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On vide l'urne en tirant les boules une à une, sans remise. On dit que le k-ème tirage est un record *si et seulement si* la boule obtenue à ce tirage porte un numéro strictement supérieur aux précédents. On convient que le premier tirage est un record.

1. Combien y a-t-il de façons de vider l'urne pour lesquelles il y a un record et un seul ? n records ?
2. Pour p et $q \in \mathbb{N}$, montrer que
$$\sum_{k=0}^{q} \binom{p+k}{p} = \binom{p+q+1}{p+1}$$
3. Soient k, j avec $2 \leqslant k \leqslant j \leqslant n$. Combien y a-t-il de façons de vider l'urne pour lesquelles le k-ème tirage est un record avec la boule $n^\circ j$?
4. Soit $k \geqslant 2$. Combien y a-t-il de façons de vider l'urne en obtenant un record au k-ème tirage ?

13 — *Parties non comparables pour l'inclusion* ff

Soit E un ensemble à n éléments. Trouver le nombre de couples $(A, B) \in \mathscr{P}(E)^2$ tels que $A \not\subset B$ et $B \not\subset A$.

14 — *Dénombrement des mots sans le facteur ab* ff

On note u_n le nombre de mots de n lettres que l'on peut écrire avec les 26 lettres de l'alphabet et qui vérifient la propriété (P) : le mot ne contient pas le facteur « ab ». On note a_n le nombre de mots de n lettres qui vérifient (P) et qui se terminent par la lettre a.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et a_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Exprimer a_{n+1} en fonction de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, $u_{n+1} = 26u_n - u_{n-1}$.

4. Indications

1

2

3

On trouve $(2n+1)^p$.

4

Au 2., il est préférable de passer au complémentaire.

5

Cf. le cours pour des exemples similaires.

6

On trouve $n_1^{n_1}(n-n_1)^{n-n_1}$ solutions.

7

On trouve respectivement $\frac{n^2(n-1)}{2}$, $3n$ et $2n(n-1)$.

8

Utiliser la formule du crible (cardinal d'une réunion).

9

Choisir d'abord le comité puis son président ou l'inverse.

10

On peut remarquer que $\mathrm{E}_2 = \bigsqcup_{k=0}^{n} [\![0,k]\!]^2 \times \{k\}$ et $\mathrm{E}_3 = \bigsqcup_{k=0}^{n} \left\{(x,y) \in \mathbb{N}^2\,;\, x+y=k\right\}$.

11

Construire $f : \mathrm{A} \to [\![1,p]\!]$ où $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ en choisissant d'abord le cardinal k de A, puis A etc.

12

Raisonner par exemple par récurrence au b) (ou faire apparaître un télescopage).

13

On pourra s'intéresser au complémentaire.

14

Au 3., on distinguera les mots à $n+1$ lettres vérifiant (P) se terminant par un « b » et les autres.

5. Solutions

1

1. Faux. Il s'agit bien-sûr de $m-n+1$.
2. Faux. Les chiffres sont quelconques sauf celui de poids fort qui ne peut être nul (sauf s'il s'agit de zéro). On trouve $9\times 10^{n-1}$ si $n\in\mathbb{N}^*$ et 10 sinon.
3. Faux. Il y a n^2 coefficients et deux possibilités par coefficients, on dénombre donc 2^{n^2} matrices.
4. Faux. Il y a n choix possibles pour x et, à x fixé, $n-1$ possibilités pour y. On trouve $n(n-1)$.
5. Vrai. Construire une application strictement croissante de $[\![1,2]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ revient à choisir deux entiers distincts sans ordre entre 1 et n. On trouve $\binom{n}{2}$.
6. Vrai. On dénombre $\binom{n}{2}$ applications strictement croissantes et n applications constantes d'où $\frac{n(n+1)}{2}$ possibilités.
7. Faux. Le nombre recherché est $n^n-n!$ car on dénombre $n!$ surjections de $[\![1,n]\!]$ sur lui-même.
8. Vrai. Il existe en effet exactement 2 deux applications non surjectives de $[\![1,n]\!]$ sur $[\![1,2]\!]$.
9. Vrai. On construit un mot de 11 lettres en choisissant successivement les positions de : quatre « S », quatre « I », deux « P » et un « M ». On trouve
$$\binom{11}{4}\binom{7}{4}\binom{3}{2}=\frac{11!}{4!4!2!}$$
10. Vrai. Le nombre de parties de cardinal pair vaut $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{2n}{k}=2^{n-1}$.
11. Faux. On trouve $1+\lfloor x\rfloor$.
12. Vrai (cf. cours).
13. Faux (idem), on trouve $|\mathrm{B}|^{|\mathrm{A}|}$.
14. Vrai car les ensembles de départ et d'arrivée sont finis de même cardinal n.
15. Vrai. Ce cardinal vaut celui de $\{(i,i)\,;\, i\in[\![1,n]\!]\}$ plus celui de $\left\{(i,j)\,;\,1\leqslant i<j\leqslant n\right\}$ d'où $n+\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.
16. Vrai car $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}=(\mathrm{A}\cup\mathrm{B})\setminus(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$.
17. Vrai (cf. cours).
18. Faux. La réponse est zéro car le cardinal d'arrivé est strictement supérieur à celui de départ.

Enseignements à tirer de cet exercice

⇛ Il faut retenir que $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{2n}{k}=\frac{(1+1)^n+(1-1)^n}{2}=2^{n-1}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

2

1. Seuls a., b., d. et f. sont vrais.
   - **a.** Mains : on choisit sans ordre 5 cartes parmi 32, $\binom{32}{5}$.
   - **b.** Mains comportant exactement 2 piques : on choisit sans ordre 2 piques parmi 8 puis sans ordre 3 cartes parmi 24 (tout sauf pique), $\binom{8}{2}\binom{24}{3}$.
   - **c.** Mains comportant au moins une dame : on dénombre plutôt les mains sans dame, $\binom{32}{5}-\binom{28}{5}$.
   - **d.** Mains ne comportant qu'une seule couleur : on choisit 5 cartes parmi 16 rouges ou 16 noires, $2\binom{16}{5}$.
   - **e.** Mains comportant exactement trois piques et une dame. On dénombre d'abord les cas où la dame n'est pas de pique : $\binom{7}{3}\times 3\times\binom{21}{1}$. On dénombre ensuite les cas où la dame est de pique : $\binom{7}{2}\binom{24}{2}$. Le résultat est la somme des deux.
   - **f.** Mains où toutes les cartes ont des valeurs différentes : on choisit 5 valeurs parmi 8 puis, pour chaque valeur, une couleur : $\binom{8}{5}4^5$.
2. Seuls a,b, et e sont vrais.
   - ⇛ Aucun des chiffres n'appartient à $\{1,2,3\}$: il y a 7 choix possibles pour chacune des trois décimales, 3^7.
   - ⇛ Le chiffre 1 n'apparaît pas : 9 choix possibles pour chacune des trois décimales, 3^9.
   - ⇛ Le chiffre 0 n'apparaît qu'une seule fois : 2×9^2.
   - ⇛ Le chiffre 0 n'apparaît pas : on dénombre le complémentaire, $10^3-(2\times 9^2+9)$.
   - ⇛ Nombre d'occurrences du chiffre 1 : on dénombre 10^2 possibilités pour chacune des trois positions, 300.
   - ⇛ Nombre d'occurrences du chiffre 0 : on dénombre 10^2 possibilités pour chacune des deux positions, 200.
3. Tout est vrai sauf d et e. L'ensemble des tirages possibles est modélisable par $[\![1,13]\!]^6$. On en déduit les réponses suivantes :
   - **a.** On a directement 13^6 ;
   - **b.** ⇛ On choisit les positions des cinq boules noires : $\binom{6}{5}$ possibilités ;
     - ⇛ On choisit les numéros des boules noires avec ordre : 8^5 possibilités ;
     - ⇛ On choisit le numéro de la boule bleue : 5 possibilités ;

     d'où $\binom{6}{5}\times 8^5\times 5$ par le lemme des bergers.
   - **c.** ⇛ On compte les tirages sans boule noire : 5^6 possibilités ;
     - ⇛ On compte les tirages avec une seule boule noire :
       - ➰ On choisit la position de la boule noire : 6 possibilités ;
       - ➰ On choisit la boule noire : 8 possibilités ;
       - ➰ On complète le tirage par des boules bleues : 5^5 possibilités.

       On trouve donc $6\times 8\times 5^5$ configurations.

     D'où le résultat final : $5^6+6\times 8\times 5^5$ solutions.

d. ⇛ On choisit les positions des trois boules noires : $\binom{6}{3}$ possibilités ;

⇛ On choisit les numéros des boules noires avec ordre : 8^3 possibilités ;

⇛ On complète le tirage par des boules bleues : 5^3 possibilités.

D'où $\binom{6}{3} \times 8^3 \times 5^3$ solutions par le lemme des bergers.

e. On passe par le complémentaire. Comme il y a 8^6 tirages sans boule bleue, on obtient $13^6 - 8^6$ solutions.

4. Seuls c et d sont vrais.

a. L'ensemble des tirages est en bijection avec l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$, on trouve donc $n!$ possibilités.

b. Il n'y a évidemment qu'un seul tirage pour lequel les numéros obtenus sont dans l'ordre croissant.

c. On choisit les k premiers termes que l'on ordonne dans l'ordre croissant : $\binom{n}{k}$ possibilités. Puis on permute sans contrainte les $n-k$ termes restants afin de compléter le tirage. On a donc $\binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}$.

d. On trouve $\frac{n!}{2}$ car il y a autant de permutations telles que 1 arrive avant 2 que l'inverse. On peut par exemple remarquer que $\sigma \mapsto \tau \circ \sigma$ est une bijection du premier ensemble sur le second, où τ est la permutation qui échange 1 et 2 en fixant tous les autres termes.

Enseignements à tirer de cet exercice

⇛ On peut facilement généraliser le 4. à plus de deux ensembles.

3

L'ensemble des applications impaires $f : [\![-p, p]\!] \to [\![-n, n]\!]$ est clairement en bijection avec l'ensemble des applications de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![-n, n]\!]$. On trouve donc $(2n+1)^p$.

4

1. Le nombre total de jeux possibles est $\binom{52}{13}$.
2. On dénombre $\binom{48}{13}$ jeux ne contenant aucun as. La réponse est donc $\binom{52}{13} - \binom{48}{13}$.
3. Construisons un jeu contenant exactement un as. On choisit l'as (4 possibilités) puis on choisit 12 cartes parmi les 48 cartes qui ne sont pas des as ($\binom{48}{12}$ possibilités). On trouve donc $4\binom{48}{12}$.
4. Construisons un jeu contenant exactement deux couleurs. On choisit les deux couleurs : $\binom{4}{2}$ possibilités. Puis on choisit le jeu : $\binom{26}{13} - 2$. D'où $\binom{4}{2}\left(\binom{26}{13} - 2\right)$ possibilités au total.

5

1. On dénombre $\binom{52}{5}$ mains.
2. Construisons une main comprenant exactement un as.

⇛ Choisissons l'as : 4 choix possibles.

⇛ On complète la main en choisissant une main de 4 cartes parmi 48 restantes (on enlève les 4 as) : $\binom{48}{4}$ poissibilités.

On obtient un total de $4\binom{48}{4}$ par le lemme des Bergers.

3. Il y a $\binom{48}{5}$ mains sans valets d'où $\binom{52}{5}-\binom{48}{5}$ mains avec au moins un valet.

4. Notons R (resp. D) l'ensemble des mains avec au moins un roi (resp. au moins une dame). Il s'agit de calculer $|\mathrm{R}\cap\mathrm{D}|$. On a

$$|\mathrm{R}\cap\mathrm{D}| = \binom{52}{5} - \left|\overline{\mathrm{R}}\cup\overline{\mathrm{D}}\right| = \binom{52}{5} - \left|\overline{\mathrm{R}}\right| - \left|\overline{\mathrm{D}}\right| + \left|\overline{\mathrm{R}}\cap\overline{\mathrm{D}}\right| = \binom{52}{5} - 2\binom{48}{5} + \binom{44}{5}$$

6

Construisons une fonction $f : \mathrm{E}\to\mathrm{E}$ telle que $f\langle \mathrm{E}_1\rangle\subset \mathrm{E}_1$ et $f\langle \mathrm{E}_2\rangle\subset \mathrm{E}_2$.

⇛ On définit f sur E_1 par une fonction quelconque de E_1 dans E_1 : il y a $n_1^{n_1}$ possibilités.

⇛ On complète en définissant f sur E_2 par une fonction quelconque de E_2 dans E_2 : il y a $(n-n_1)^{n-n_1}$ possibilités.

⇛ On déduit du lemme des bergers $n_1^{n_1}(n-n_1)^{n-n_1}$ solutions.

7

1. Il y a n choix pour A et $\binom{n}{2}$ pour B donc $\frac{n^2(n-1)}{2}$ au total par le lemme des bergers.

2. Les solutions sont exactement les couples de la forme $\left(\{a\},\varnothing\right)$, $\left(\varnothing,\{a\}\right)$ et $\left(\{a\},\{a\}\right)$ où $a\in[\![1,n]\!]$. On en dénombre $3n$.

3. On construit $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$ en choisissant un élément x de E, puis on construit A et B en fixant y dans $\mathrm{E}\setminus\{x\}$, il y a deux possibilités $\mathrm{A}=\{x\}$ et $\mathrm{B}=\{x,y\}$, ou $\mathrm{B}=\{x\}$ et $\mathrm{A}=\{x,y\}$, $2n(n-1)$.

8

1. On a $|\mathrm{B}| = |\mathrm{A}\cup\mathrm{B}| + |\mathrm{A}\cap\mathrm{B}| - |\mathrm{A}| = 50+5-15 = 40$.

2. On a $|\mathrm{A}\cap\mathrm{B}| = |\mathrm{A}\cup\mathrm{B}| - |\mathrm{A}| - |\mathrm{B}| = 60-45-15 = 0$. Donc $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\varnothing$, c'est-à-dire A et B sont disjoints.

3. Non. Contre-exemple $\mathrm{A}=[\![1,10]\!]$ et $\mathrm{B}=[\![2,60]\!]$.

9

1. ⇛ Commençons par choisir le comité : $\binom{n}{k}$ possibilités. Puis un président parmi celui-ci : k choix possibles. On a donc $k\binom{n}{k}$ choix au total par le lemme des bergers.

⇛ On peut aussi choisir le président : n possibilités. Puis on complète le comité : $\binom{n-1}{k-1}$ possibilités. D'où un total de $n\binom{n-1}{k-1}$ par le lemme des bergers.

On retrouve donc $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

2. ⇛ Choisissons d'abord F : $\binom{n}{k}$ possibilités. Puis on choisit G : $\binom{k}{\ell}$ possibilités. D'où un total de $\binom{n}{k}\binom{k}{\ell}$ par le lemme des bergers.

⇛ Choisissons d'abord G : $\binom{n}{\ell}$ possibilités. Puis on choisit F en complétant G par une partie de E \ G de cardinal $k-\ell$: $\binom{n-\ell}{k-\ell}$ possibilités. D'où un total de $\binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$ par le lemme des bergers.

On en déduit que $\binom{n}{k}\binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k-\ell}$.

10

⇛ On a $\#E_1 = \dbinom{n+2}{2}$ car E_1 est en bijection avec l'ensemble des paires de $[\![0, n]\!]$.

⇛ On a $E_2 = \displaystyle\bigsqcup_{k=0}^{n} [\![0, k]\!]^2 \times \{k\}$. Ainsi, $\#E_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$.

⇛ On a $E_3 = \displaystyle\bigsqcup_{k=0}^{n} \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^2 \,;\, x+y=k\right\}$. Ainsi, $\#E_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

11

Construisons une application ϕ dont l'ensemble de départ est une partie de E et à valeurs dans $[\![1, p]\!]$:

⇛ On choisit le cardinal de l'ensemble de départ A de ϕ : $k \in [\![0, n]\!]$.

⇛ On choisit les éléments de A : $\binom{n}{k}$ possibilités.

⇛ On construit $\phi : A \to [\![1, p]\!]$: on sait qu'il y a exactement p^k possibilités.

On en déduit le nombre total de solutions $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k = (p+1)^n$.

Commentaire

On peut aussi procéder de la façon suivante : pour construire une solution, à tout x dans E, on associe ou non un élément de E. On a donc $p+1$ choix possibles pour chaque x dans E, d'où $(p+1)^n$ possibilités au total.

12

1. Le premier tirage est un record (par convention) et le tirage où l'on obtient le numéro n est toujours un record. De plus, une fois le numéro n tiré, il ne peut plus y avoir de record. On déduit de ces deux remarques que :

⇛ il y a un record et un seul *si et seulement si* on tire n en premier ;

⇛ il y a n records *si et seulement si* on tire les numéros dans l'ordre ;

Il y a donc $(n-1)!$ tirages avec un seul record et un seul tirage avec n records.

2. On prouve la formule à p fixé, par récurence sur q. La formule est claire pour $q=0$. Supposons la formule vérifiée pour $q \in \mathbb{N}$. On a
$$\sum_{k=0}^{q+1}\binom{p+k}{p}=\binom{p+q+1}{p}+\sum_{k=0}^{q}\binom{p+k}{p}=\binom{p+q+1}{p}+\binom{p+q+1}{p+1}=\binom{p+q+2}{p+1}$$
par la formule de Pascal. La formule est donc vérifiée au rang $q+1$.

3. Soient k, j avec $2 \leqslant k \leqslant j \leqslant n$. Le k-ème tirage est un record avec la boule $n^\circ j$ *si et seulement si* les numéros tirés aux tirages $1, 2, \ldots, k-1$ appartiennent à $[\![1, j-1]\!]$; pour construire un tel tirage, on choisit d'abord avec ordre $k-1$ numéros distincts dans $[\![1, j-1]\!]$, puis on complète par une permutation quelconque des $n-k$ numéros restants. On en dénombre donc
$$(j-1)(j-2)\cdots(j-k+1)(n-k)!=(k-1)!\binom{j-1}{k-1}(n-k)!$$

4. Soit $k \geqslant 2$. Si on obtient un record au k-ème tirage avec une boule numérotée j, alors nécessairement $k \leqslant j$. On déduit des deux questions précédentes que le nombre de tirages avec record au k-ème tirage vaut
$$\sum_{j=k}^{n}(k-1)!\binom{j-1}{k-1}(n-k)!=(k-1)!(n-k)!\sum_{j=k}^{n}\binom{j-1}{k-1}=(k-1)!(n-k)!\binom{n}{k}=\frac{n!}{k}$$

13

On s'intéresse au complémentaire : l'ensemble des couples (A,B) de parties de E telles que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ ou $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$. Notons F_1 et F_2 l'ensembles des couples (A,B) de parties de E vérifiant respectivement $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$.

- ⇛ Construisons point par point un élément (A,B) de F_1. Pour $x \in \mathrm{E}$, il y a trois possibilités : $x \in \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{B}$, $x \notin \mathrm{A}$ et $x \in \mathrm{B}$, $x \notin \mathrm{A}$ et $x \notin \mathrm{B}$. On a donc 3^n solutions par le lemme des bergers. On a donc $|\mathrm{F}_1| = |\mathrm{F}_2| = 3^n$.
- ⇛ On a $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \{(\mathrm{A},\mathrm{A})\,;\, \mathrm{A} \subset \mathrm{E}\}$ d'où $|\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2| = 2^n$.
- ⇛ On en déduit que $|\mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2| = 2 \times 3^n - 2^n$ d'où
$$\left|\mathscr{P}(\mathrm{E})^2\right| - |\mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2| = 4^n + 2^n - 2 \times 3^n$$

14

1. On a clairement $u_1 = 26$ et $u_2 = 26^2 - 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Les mots à $n+1$ lettres vérifiant (P) sont de deux types :
   - ⇛ Ceux dont la $(n+1)$-ème lettre est b. On dénombre $u_n - a_n$ choix possibles des n premières lettres (un mot de n lettres quelconque vérifiant (P) et ne se terminant pas par « a ») ;
   - ⇛ Ceux dont la $(n+1)$-ème lettre est différente de b. On choisit celle-ci : il y a 25 possibilités. On dénombre ensuite u_n choix possibles des n premières lettres, d'où $25u_n$ possibilités au total.

   Ainsi $u_{n+1} = u_n - a_n + 25u_n = 26u_n - a_n$.

3. On a $a_{n+1} = u_n$ car un mot de longueur $n+1$ finissant par a est de type (P) *si et seulement si* ses n premières lettres vérifient (P).

4. On déduit de ce qui précède que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, on a

$$u_{n+1} = 26u_n - a_n = 26u_n - u_{n-1}$$