AN 10 | Équations linéaires en analyse

La résolution des équations linéaires est un premier jalon de l'algèbre linéaire.

Grand Bouddha de Kamakura, Hiroshige

1. Quizz

1 — *Vrai ou Faux ?*

1. Les solutions de $y' + \lambda y = 0$ sont de la forme $t \mapsto \mathrm{C}e^{\lambda t}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.
2. Les solutions de $y' = a(t)y$ sont de la forme $t \mapsto \mathrm{C}e^{a(t)t}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.
3. Les solutions de $y'' - 4y' = 0$ sont de la forme $t \mapsto \mathrm{C}e^{-2t} + \mathrm{D}e^{2t}$ où $(\mathrm{C},\mathrm{D}) \in \mathbb{R}^2$.
4. Les solutions de $y'' - y = 0$ sont de la forme $t \mapsto \mathrm{C}e^{t} + \mathrm{D}e^{-t}$ où $(\mathrm{C},\mathrm{D}) \in \mathbb{R}^2$.
5. Les solutions de $y'' + 9y = 0$ sont de la forme $t \mapsto \mathrm{C}\cos(3t) + \mathrm{D}\sin(3t)$ où $(\mathrm{C},\mathrm{D}) \in \mathbb{R}^2$.
6. Deux solutions de $y' = a(t)y$ sont proportionnelles où $a : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue.
7. Les solutions de $y'' - 5y' + 6y = 0$ sont de la forme $t \mapsto \mathrm{C}e^{2t} + \mathrm{D}e^{3t}$ où $(\mathrm{C},\mathrm{D}) \in \mathbb{R}^2$.
8. Les solutions de $y' = e^t y$ sont de la forme $t \mapsto \mathrm{C}e^{e^t}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.
9. Les solutions de $y'' + 4y' + 4y = 0$ sont de la forme $t \mapsto \mathrm{C}e^{-2t}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.
10. Une primitive de $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ est $x \mapsto \ln|u(x)|$ où $u : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue et ne s'annule pas.
11. Une primitive de $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2}(\ln t)^2$.
12. Pour $a \in \mathbb{R}^*$, une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x^2 - a^2}$ est $x \mapsto \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$.
13. Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$ est $x \mapsto \ln(|\ln t|)$.
14. Une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{1-t}$ est $x \mapsto \ln|1-t|$.

2 — *QCM sur les équations différentielles linéaires f*

1. L'ensemble des solutions de $y' - (\ln x)y = x^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est :
   a. vide ; **b.** $\{x \mapsto x^x + \mathrm{C}x^x e^{-x} ; \mathrm{C} \in \mathbb{R}\}$; **c.** $\{x \mapsto \mathrm{C}x^x e^{-x} ; \mathrm{C} \in \mathbb{R}\}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des solutions sur $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ de l'équation $2ty' + y = t^n$ est :
   a. $\left\{t \in \mathrm{I} \mapsto \dfrac{t^n}{2n+1} + \dfrac{\lambda}{\sqrt{t}} ; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ **b.** $\left\{t \in \mathrm{I} \mapsto \dfrac{t^n}{2n-1} + \lambda\sqrt{t} ; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$
3. L'ensemble des solutions sur $]-\infty, 1[$ de $(1-x)^2 y' = (2-x)y$ est :
   a. $\{x \mapsto k(1-x)e^{1/(x-1)} ; k \in \mathbb{R}\}$ **b.** $\left\{x \mapsto \dfrac{k}{1-x}e^{1/(1-x)} ; k \in \mathbb{R}\right\}$ **c.** $\left\{x \mapsto \dfrac{k}{1-x}e^{1/(x-1)} ; k \in \mathbb{R}\right\}$
4. L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' + y = t\cos t$ est :
   a. $\left\{t \mapsto \dfrac{t}{2}\sin(t) + \lambda e^{-t} ; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$ **b.** $\left\{t \mapsto \dfrac{t\cos(t)}{2} + \dfrac{t-1}{2}\sin(t) + \lambda e^{-t} ; \lambda \in \mathbb{R}\right\}$

5. L'ensemble des solutions du problème de Cauchy $y'' - 4y' + 4y = 0,\ \ y(0) = 0,\ \ y'(0) = 0$ est :

a. $\{x \mapsto 0\}$ **b.** $\left\{x \mapsto xe^{2x}\right\}$ **c.** $\left\{x \mapsto (ax+b)e^{2x}\,;\,(a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$

6. L'ensemble des solutions de $y'' + y' - 2y = e^{3x} + e^{-2x}$ est :

a. $\left\{x \mapsto \dfrac{e^{3x}}{10} - \dfrac{xe^{-2x}}{3} + \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{-2x}\,;\,(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$ **b.** $\left\{x \mapsto \dfrac{e^{3x}}{10} - \dfrac{xe^{-2x}}{3} + \mathrm{A}e^{-x} + \mathrm{B}e^{2x}\,;\,(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$

7. L'ensemble des solutions de $y'' - 2y' + 2y = e^{x}\sin x$ est :

a. $\left\{x \mapsto -\dfrac{x\cos(x)e^{x}}{2} + \mathrm{A}\cos(x-\varphi)e^{x}\,;\,(\mathrm{A},\varphi) \in \mathbb{R}^2\right\}$ **b.** $\left\{x \mapsto \dfrac{\sin(x)e^{x}}{2} + \mathrm{A}\cos(x-\varphi)e^{x}\,;\,(\mathrm{A},\varphi) \in \mathbb{R}^2\right\}$

8. L'ensemble des solutions de $y''' - y'' = 0$ est :

a. $\left\{x \mapsto \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}\,;\,(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}) \in \mathbb{R}^2\right\}$ **b.** $\left\{x \mapsto \mathrm{A}e^{x} + \mathrm{B}e^{-x} + \mathrm{C}\,;\,(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}) \in \mathbb{R}^3\right\}$

2. Exercices élémentaires

3 — *Une EDL d'ordre deux à coefficients constants*

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 3y' + 2y = te^{2t}$.

4 — *Une EDL d'ordre un*

Soit $\mathrm{I} =]0, +\infty[$ et $\mathrm{E} : \left(1 - e^{-t}\right)y' + y = e^{-t}$.

1. Résoudre l'équation homogène E_{H} sur I.

2. Résoudre E sur I.

5 — *Variations sur la constante*

On cherche à résoudre $\mathrm{E} : (1-x)y' + xy = e^{x}$. On pose $\mathrm{I}_- =]-\infty, 1[$ et $\mathrm{I}_+ =]1, +\infty[$.

1. Soit $\mathrm{I} = \mathrm{I}_-$ ou I_+, et $a : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto a(x) = \dfrac{x}{1-x}\cdot$ Déterminer une primitive de a sur I.

2. Résoudre, séparément sur les intervalles I_- et I_+, l'équation différentielle $\mathrm{E}_{\mathrm{H}} : (1-x)y' + xy = 0$. On simplifiera au maximum l'expression des fonctions solutions.

3. Résoudre, séparément sur les intervalles I_- et I_+, l'équation différentielle E. On notera respectivement $\mathscr{S}_-$ et $\mathscr{S}_+$ les ensembles de solutions.

6 — *Une récurrence d'ordre un*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 := 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = 2u_n + 2^n - 1$.

Expliciter u_n en fonction de n.

7 *Une équation d'ordre un f*

Résoudre sur $\mathrm{I} =]0, \pi[$ l'équation différentielle (E) : $y' + (\cotan t)\, y = \cos^2 t$.

8 *Une équation d'ordre deux à coefficients constants f*

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$.

9 *Une exemple d'ordre trois*

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y''' - y' = 1$.

3. Exercices classiques plus techniques

10 *Une EDL d'ordre un f*

Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ puis $\mathbb{R}_-^*$ l'équation $\mathrm{E} : |x|y' + (x-1)y = x^2$.

11 *Une famille paramètrée d'équations f*

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\mathbf{E}_\lambda$: $y'' + 2\lambda y' + y = 0$.

1. Expliciter les solutions de $\mathbf{E}_\lambda$ pour $\lambda = 0$, $\lambda = \dfrac{1}{2}$, $\lambda^2 = 1$ et $\lambda = \sqrt{2}$.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que toutes les solutions de $\mathbf{E}_\lambda$ soient bornées sur $\mathbb{R}_+$.

12 *Deux équations ff*

Soit $\omega \in \mathbb{R}$. Résoudre les équations $y'' + y = \sin \omega x$ puis $y'' + y = \sin^3 x$.

13 *Une équation qui se ramène à une équation différentielle ff*

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables vérifiant $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f(1-t)$.

14 *Une non-équation différentielle ff*

Résoudre l'équation $y' + y = y(0) + y(1)$.

4. Indications

1 ↺

Appliquer les méthodes et les formulaires du cours.

2 ↺

Au 5., aucun calcul n'est nécessaire.

3 ↺

Le cours permet de déterminer la forme d'une solution particulière.

4 ↺

Les solutions homogènes sont de la forme $t \in \mathrm{I} \mapsto \frac{\lambda}{e^t - 1}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

5 ↺

On trouve $x \mapsto \lambda(1-x)e^x$ sur I_- et I_+.

6 ↺

Appliquer la méthode de la variation de la constante.

7 ↺

Les solutions homogènes sont $t \in \mathrm{I} \mapsto \frac{\lambda}{\sin t}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

8 ↺

Passer sur $\mathbb{C}$.

9 ↺

Se ramener à une équation d'ordre deux.

10 ↺

Faire varier la constante.

11 ↺

Toutes les solutions de $\mathbf{E}_\lambda$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\lambda \in [0, +\infty[$.

12 ↺

Distinguer les cas $\omega = 1$ et $\omega \neq 1$.

13

Attention, ce n’est pas une équation différentielle, on l’abordera par une Analyse-Synthèse. On montrera en particulier que, si f est solution, alors f est deux fois dérivable et solution d’une équation différentielle linéaire d’ordre deux.

14

Ce n’est pas une équation différentielle : procédez par analyse-synthèse.

5. Solutions

1

1. Faux. La bonne réponse est $t \mapsto \mathrm{C}e^{-\lambda t}$.
2. Faux, la formule proposée n'est valable que si la fonction a est constante. La bonne réponse est $t \mapsto \mathrm{C}e^{\mathrm{A}(t)}$ où A est une primitive de a.
3. Faux. L'équation caractéristique s'écrit $r^2 - 4r = 0$ (et non pas $r^2 - 4 = 0$). La bonne réponse est $t \mapsto \mathrm{A} + \mathrm{B}e^{4t}$ où (A, B) est un couple de réels.
4. Vrai. On peut aussi écrire les solutions sous la forme $t \mapsto \mathrm{A}e^{t} + \mathrm{B}e^{-t}$ où (A, B) est un couple de réels.
5. Vrai.
6. Vrai.
7. Vrai.
8. Vrai.
9. Faux. La bonne réponse est $t \mapsto (\mathrm{A} + \mathrm{B}t)e^{-2t}$ où $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.
10. Vrai.
11. Vrai : la fonction est de la forme $u'(t)u(t)$.
12. Vrai, décomposer en éléments simples : $\dfrac{1}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\left(\dfrac{1}{x-a} - \dfrac{1}{x+a}\right)$
13. Vrai : la fonction est de la forme $u'(t)/u(t)$.
14. Faux. La bonne réponse est $t \mapsto -\ln|1-t|$.

Enseignements à tirer de cet exercice

⇛ Les étourdis ont intérêt à dériver ce qu'ils pensent être une primitive d'une fonction f afin de vérifier leur calcul. C'est particulièrement important dans le cadre des EDL où toute erreur dans la résolution de l'équation homogène impacte la variation de la constante qui suit.

⇛ Il faut reconnaître l'équation d'un oscillateur ($y'' + \omega^2 y = 0$ avec $\omega \in \mathbb{R}^*$, cf. le 5.) et donner ses solutions sans passer pas l'équation caractéristique.

2

1. Seul le b. est vrai. On peut, par exemple, appliquer la méthode de la variation de la constante pour obtenir le résultat.
2. Seul le a. est vrai (variation de la constante).
3. Seul le b. est vrai (variation de la constante).
4. Seul le b. est vrai.
5. Seul a. est vrai et aucun calcul n'est nécessaire : un problème de Cauchy admet une unique solution, comme la fonction nulle vérifie les équations posées, il s'agit de la seule solution.

6. Seul a. est vrai. Utiliser le principe de superposition et rechercher des solutions particulières sous forme polynôme-exponentielle.
7. Seul a. est vrai. Passer sur $\mathbb{C}$ (second membre $e^{(1+i)x}$) afin de trouver une solution particulière.
8. Seul a. est vrai : y est solution *si et seulement si* $z := y''$ est solution de $z' = z$.

Enseignements à tirer de cet exercice

⇛ Au 5., on utilise l'unicité de la solution à un problème de Cauchy.

⇛ Au 6., on exploite le théorème de superposition.

3

⇛ Il existe une solution particulière de la forme $t \mapsto \mathrm{P}(t)e^{2t}$ avec P polynôme. En remplaçant dans l'équation, on trouve $\mathrm{P}''(t) - \mathrm{P}'(t) = t$, donc P est de degré deux et, après tout calcul, $\mathrm{P}(t) = t^2/2 - t$ convient.

⇛ Les solutions sont de la forme $t \mapsto \left(\dfrac{t^2}{2} - t\right)e^{2t} + \lambda e^t + \mu e^{2t}$ où $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

4

1. Puisque sur I, $1 - e^{-t} = e^{-t}(e^t - 1) \neq 0$, l'équation homogène $\mathrm{E_H}$ est équivalente à $\mathrm{E} : y' + \frac{e^t}{e^t-1}y = 0$. Comme $e^t - 1 > 0$ sur I, on a $\int \frac{e^t}{e^t-1}dt = \ln(|e^t - 1|) = \ln(e^t - 1)$, les solutions de $\mathrm{E_H}$ sur I sont les fonctions de la forme $t \in \mathrm{I} \mapsto \frac{\lambda}{e^t-1}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. Appliquons la méthode de la variation de la constante. D'après ce qui précède, les solutions de E sur I sont les fonctions de la forme $t \in \mathrm{I} \mapsto \frac{\lambda(t)}{e^t-1}$ avec λ définie et dérivable sur I et vérifiant $\forall t \in \mathrm{I},\ \ \frac{\lambda'(t)}{e^t-1} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \frac{1}{e^t-1}$, ie $\forall t \in \mathrm{I},\ \ \lambda'(t) = 1$, ce qui équivaut à $\forall t \in \mathrm{I}$, $\lambda(t) = t + \mathrm{C}$, où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme, $t \in \mathrm{I} \mapsto \frac{t+\mathrm{C}}{e^t-1}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.

5

1. On a $\forall x \in \mathrm{I},\ \ a(x) = \frac{x}{1-x} = \frac{x-1+1}{1-x} = -1 + \frac{1}{1-x}$, d'où, sur I, $\int a(x)dx = -x - \ln|1 - x|$.
2. Résolvons $\mathrm{E_H}$ sur les intervalles I_- et I_+.
   - ⇛ *Résolution sur* I_- : d'après la question précédente, les solutions de $\mathrm{E_H}$ sur I_- sont les fonctions de la forme
   $$x \in \mathrm{I}_- \mapsto \lambda e^{x+\ln(1-x)} = \lambda(1 - x)e^x,\ \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$
   - ⇛ *Résolution sur* I_+ : d'après la question précédente, les solutions de $\mathrm{E_H}$ sur I_+ sont les fonctions de la forme
   $$x \in \mathrm{I}_+ \mapsto \mu_1 e^{x+\ln(x-1)} = \mu_1(x - 1)e^x = \mu(1 - x)e^x,\ \text{ avec } \mu = -\mu_1 \in \mathbb{R}.$$

3. Puisque les solutions de E_H sur I_+ et I_- sont de la même forme, nous recherchons une solution particulière de E sur $I = I_+$ ou I_-. Appliquons la méthode la variation de la constante : il existe une solution particulière de E sur I de la forme

$$y_0 : x \in I \mapsto \lambda(x)(1-x)e^x \quad \text{avec } \lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ dérivable.}$$

On a

$$\forall x \in I,\ \ y_0'(x) = \lambda'(x)(1-x)e^x - \lambda(x)e^x + \lambda(x)(1-x)e^x$$

$$\begin{aligned} y_0 \text{ sol. de E} &\iff \forall x \in I,\ \ (1-x)y_0'(x) + xy_0(x) = e^x \\ &\iff \forall x \in I,\ \ (1-x)^2\lambda'(x)e^x - (1-x)\lambda(x)e^x + \lambda(x)(1-x)^2e^x + x\lambda(x)(1-x)e^x = e^x \\ &\iff \forall x \in I,\ \ (1-x)^2\lambda'(x)e^x = e^x \\ &\iff \forall x \in I,\ \ \lambda'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

La fonction $y_0 : x \in I \mapsto \frac{(1-x)e^x}{1-x} = e^x$ est donc une solution particulière de E sur I. D'après ce qui précède, on a

$$\mathscr{S}_+ = \left\{ y : x \in I_+ \mapsto e^x + \lambda(1-x)e^x\,;\, \lambda \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{et} \quad \mathscr{S}_- = \left\{ y : x \in I_- \mapsto e^x + \mu(1-x)e^x\,;\, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

6

L'équation homogène a pour solutions les suites géométriques de raison deux. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on

$$\frac{u_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{u_n}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

d'où

$$\frac{u_n}{2^n} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{u_{k+1}}{2^{k+1}} - \frac{u_k}{2^k} \right) = \frac{n}{2} - 1 + \frac{1}{2^n}$$

puis $u_n = (n-2)2^{n-1} + 1$.

7

- Puisque sur I le sinus est strictement positif, $\int \operatorname{cotan} t\,\mathrm{d}t = \ln|\sin t| = \ln \sin t$ et les solutions sur cet intervalle de l'équation homogène (**E_H**) sont donc les fonctions de la forme, $t \in I \mapsto \frac{\lambda}{\sin t}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Appliquons la méthode de la variation de la constante pour résoudre (**E**) sur I. D'après le point précédent, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $t \in I \longmapsto \frac{\lambda(t)}{\sin(t)}$ où λ est une fonction définie et dérivable sur I vérifiant $\forall t \in I,\ \frac{\lambda'(t)}{\sin(t)} = \cos^2(t)$, c'est-à-dire $\lambda = \int \sin\cos^2 = -\frac{1}{3}\cos^3 + C$, où $C \in \mathbb{R}$. Les solutions sont donc les fonctions de la forme $t \in I \mapsto -\frac{\cos^3 t}{3\sin t} + \frac{C}{\sin t}$, où $C \in \mathbb{R}$.

8

⇛ Passons sur $\mathbb{C}$ et recherchons une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 5y = e^{(1+2i)x}$. Il en existe une de la forme $y_0 : x \mapsto \mathrm{Q}(x)e^{(1+2i)x}$ avec Q polynomiale. Après tout calcul, on trouve que $\mathrm{Q}(x) = -ix/4$ convient. La partie réelle de y_0 est une solution de l'équation initiale et vaut $x \mapsto \frac{x\sin(2x)e^x}{4}$.

⇛ Puisque les solutions de l'équation caratéristique sont $1 \pm 2i$, les solutions de l'équation homogène sont de la forme

$$x \mapsto \big(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)\big)e^x \quad \text{où} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

⇛ Les solutions sont de la forme $x \mapsto \dfrac{x\sin(2x)e^x}{4} + \big(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)\big)e^x$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

9

En posant $z = y'$, l'équation est équivalente à $z'' - z = 1$.

⇛ Cette équation admet des solutions de la forme $x \mapsto -1 + \lambda e^x + \mu e^{-x}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

⇛ On en déduit que les solutions de l'équation initiale sont de la forme $x \mapsto -x + \mathrm{A}e^x + \mathrm{B}e^{-x} + \mathrm{C}$ avec $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}) \in \mathbb{R}^3$.

10

⇛ Sur $]0, +\infty[$ l'équation s'écrit $y' + \dfrac{x-1}{x}y = x$. On note $\mathrm{E_H}$ l'équation homogène.

- Puisque $-\int \frac{x-1}{x}\mathrm{d}x = \ln(x) - x$, les solutions de $\mathrm{E_H}$ sont de la forme $x \mapsto \lambda x e^{-x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Méthode la variation de la constante : il existe une solution de la forme $x \mapsto \lambda(x)xe^{-x}$ avec λ dérivable. L'équation est équivalente à :

$$\forall x > 0, \quad \lambda'(x)xe^{-x} = x, \quad \text{ie.} \quad \lambda'(x) = e^x$$

  Ainsi $x \mapsto x$ est une solution particulière.
- Les solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ sont donc de la forme $x \mapsto x + \lambda x e^{-x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

⇛ Sur $]-\infty, 0[$, l'équation s'écrit $y' + \dfrac{1-x}{x}y = -x$. On note $\mathrm{E_H}$ l'équation homogène.

- Puisque $-\int \frac{1-x}{x}\mathrm{d}x = x - \ln(-x)$, les solutions de $\mathrm{E_H}$ sont de la forme $x \mapsto \lambda\frac{e^x}{x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Méthode de la variation de la constante : il existe une solution de la forme $x \mapsto \lambda(x)\frac{e^x}{x}$ avec λ dérivable. L'équation est équivalente à :

$$\forall x < 0, \quad \lambda'(x)\frac{e^x}{x} = x \quad \text{ie.} \quad \lambda'(x) = x^2e^{-x}$$

  Recherchons une primitive de $x \mapsto x^2e^{-x}$ sous la forme $x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{-x}$. On aboutit à $a = -1, b = -2$ et $c = -2$. Ainsi, $x \mapsto \frac{x^2+2x+2}{x}$ est une solution particulière.
- Les solutions sont de la forme $x \mapsto \dfrac{x^2+2x+2}{x} + \lambda\dfrac{e^x}{x}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

11

1. L'équation caractéristique de $\mathbf{E}_\lambda$ s'écrit $z^2+2\lambda z+1=0$ et admet $\Delta := 4\left(\lambda^2-1\right)$ pour discriminant. On en déduit les solutions de $\mathbf{E}_\lambda$ dans les cas suivants :
   - ⇛ Cas 1, $\lambda=0$: $x\longmapsto \mathrm{A}\cos x+\mathrm{B}\sin x$ avec $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2$.
   - ⇛ Cas 2, $\lambda=\dfrac{1}{2}$: $x\longmapsto e^{-\frac{x}{2}}(\mathrm{A}\cos\sqrt{3}x+\mathrm{B}\sin\sqrt{3}x)$ avec $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2$.
   - ⇛ Cas 3, $\lambda=1$: $x\longmapsto e^{-x}(\mathrm{A}x+\mathrm{B})$ avec $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2$.
   - ⇛ Cas 4, $\lambda=-1$: $x\longmapsto e^{x}(\mathrm{A}x+\mathrm{B})$ avec $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2$.
   - ⇛ Cas 5, $\lambda=\sqrt{2}$: $x\longmapsto \mathrm{A}e^{(-\sqrt{2}+1)x}+\mathrm{B}e^{(-\sqrt{2}-1)x}$ avec $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathbb{R}^2$.

2. Discutons la forme des racines de l'équation caractéristique $\mathscr{E}_\lambda$ de $\mathbf{E}_\lambda$.
   - ⇛ Cas 1 : $\Delta>0$. Les solutions r_1 et r_2 de $\mathscr{E}_\lambda$ sont distinctes et réelles. Les solutions de $\mathbf{E}_\lambda$ sont de la forme $x\longmapsto \mathrm{A}e^{r_1x}+\mathrm{B}e^{r_2x}$; elles sont toutes bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $x\longmapsto e^{r_1x}$ et $x\longmapsto e^{r_2x}$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$, ce qui équivaut à r_1 et r_2 appartiennent à $\mathbb{R}_-$. Puisque $r_1r_2=1$, r_1 et r_2 sont de même signe. Puisque $2\lambda=-(r_1+r_2)$, r_1 et r_2 appartiennent à $\mathbb{R}_-$ équivaut à $\lambda\in\mathbb{R}_+$.
   - ⇛ Cas 2 : $\Delta<0$. Les solutions de $\mathscr{E}_\lambda$ sont de la forme $r\pm is$ avec $(r,s)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*$. Les solutions de $\mathbf{E}_\lambda$ sont de la forme $x\longmapsto \mathrm{A}\cos(sx-\varphi)e^{rx}$; elles sont toutes bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $r\leqslant 0$. Puisque $\lambda=-r$, $r\in\mathbb{R}_-$ équivaut à $\lambda\in\mathbb{R}_+$.
   - ⇛ Cas 3 : $\Delta=0$. Comme $x\longmapsto xe^{-x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$ mais pas $x\longmapsto e^{x}$, on déduit des cas 3 et 4 de la question précédente que seule la valeur $\lambda=1$ correspond à des solutions bornées sur $\mathbb{R}_+$.

   Ainsi, toutes les solutions de $\mathbf{E}_\lambda$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ si et seulement si $\lambda\in[0,+\infty[$.

12

- ⇛ Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x\longmapsto\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$ où $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
- ⇛ Premier cas : $\omega=\pm1$.
  - ➰ Passons sur $\mathbb{C}$ et résolvons les équations $y''+y=e^{\varepsilon ix}$, où $\varepsilon=\pm1$. Il existe une solution particulière de la forme $x\longmapsto \mathrm{P}(x)e^{\varepsilon i\omega x}$ avec P polynôme. En remplaçant dans l'équation, on trouve $\mathrm{P}''(x)+2\varepsilon i\mathrm{P}'(x)=1$, ainsi P est degré un et, après tout calcul, obtient que $\mathrm{P}(x)=-\varepsilon xi/2$ convient. Ainsi $x\longmapsto-\varepsilon x\cos(x)/2$ est une solution particulière de l'équation initiale.
  - ➰ Les solutions sont donc de la forme $x\longmapsto -\varepsilon\dfrac{x\cos(x)}{2}+\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$, où $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
- ⇛ Second cas : $\omega\neq\pm1$.
  - ➰ Passons sur $\mathbb{C}$ et résolvons l'équation $y''+y=e^{i\omega x}$. Cette équation admet une solution particulière de la forme $x\longmapsto \mathrm{P}(x)e^{i\omega x}$ avec P polynôme. On obtient $\mathrm{P}(x)=1/(1-\omega^2)$ en remplaçant dans l'équation. Ainsi $x\longmapsto\sin(\omega x)/(1-\omega^2)$ est solution particulière de l'équation initiale.
  - ➰ Les solutions sont de la forme $x\longmapsto\dfrac{\sin(x)}{1-\omega^2}+\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$, où $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.
- ⇛ Puisque $\forall x\in\mathbb{R}$, $\sin^3(x)=(3\sin(x)-\sin(3x)/4$ d'après les calculs précédents et le principe de superposition, $x\longmapsto-\frac{3x\cos(x)}{8}+\frac{\sin(3x)}{32}$ est une solution particulière de l'équation.
- ⇛ Les solutions sont donc de la forme $x\longmapsto-\dfrac{3x\cos(x)}{8}+\dfrac{\sin(3x)}{32}+\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)$, où $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$.

Méthodologie

Il est indispensable de linéariser avant de passer sur $\mathbb{C}$ car $\sin^3 t \neq \operatorname{Im}\left(\left(e^{it}\right)^3\right)$ en général (la relation $(\operatorname{Im} z)^3 \neq \operatorname{Im}(z^3)$ n'est pas vraie en général pour $z \in \mathbb{C}$).

13

On aborde cette question ouverte par une analyse-synthèse.

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f(1-t)$. La fonction f' est alors dérivable en tant que composée de fonctions dérivables et, pour tout réel t, $f''(t) = -f'(1-t) = -f(t)$. Ainsi, f est de la forme $f : t \mapsto \mathrm{A}\cos(t-\phi)$, avec $(\mathrm{A},\phi) \in \mathbb{R}^2$.
- Réciproquement, soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$ et $f : t \mapsto \mathrm{A}\cos(t-\phi)$. Cette fonction est dérivable et

$$\begin{aligned}
\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = f(1-t) &\iff \forall t \in \mathbb{R},\ -\mathrm{A}\sin(t-\phi) = \mathrm{A}\cos(1-t-\phi) \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{A}\left(\cos\left(t+\frac{\pi}{2}-\phi\right) - \cos(1-\phi-t)\right) = 0 \\
&\iff \forall t \in \mathbb{R},\ -2\mathrm{A}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\phi\right)\sin\left(t+\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) = 0 \\
&\iff \mathrm{A}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}-\phi\right) = 0 \\
&\iff \mathrm{A} = 0 \ \text{ ou } \ \phi = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\,[\pi]
\end{aligned}$$

  Les solutions au problème posé sont donc les fonctions de la forme $t \mapsto \mathrm{A}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$ où $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$.

14

On procède à nouveau par analyse-synthèse.

- Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $\forall t \in \mathbb{R},\ y'(t) + y(t) = y(0) + y(1)$. En notant $k := y(0) + y(1)$, on a donc $y' + y = k$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = \lambda e^{-t} + k$.
- Réciproquement, soit $(k,\lambda) \in \mathbb{R}^2$ et $y : t \mapsto \lambda e^{-t} + k$. Cette fonction est dérivable et vérifie l'équation de l'énoncé si et seulement si $k = \lambda(1+e^{-1}) + 2k$, ie $k = -\lambda(1+e^{-1})$. On en déduit que les solutions au problème posé sont les fonctions de la forme $t \mapsto \lambda e^{-t} - \lambda(1+e^{-1})$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.