



On étudie la structure d'espace vectoriel et en particulier les espaces de dimension finie qui généralisent les espaces de coordonnées $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ bien connus.



Paysage, Wang Wei

9	Espaces vectoriels et applications linéaires	1
1	Quizz	2
2	Exercices élémentaires	3
3	Exercices classiques plus techniques	4
4	Indications	6
5	Solutions	8

1. Quizz

1 ?

Vrai ou faux ? *f*

Dans ce qui suit, u et v désignent des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -ev E non nul.

1. Soit F et G deux sev de E tels que $F + G = F \cap G$. Alors $F = G$.
2. L'ensemble des suites monotones est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
3. L'ensemble des suites périodiques est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
4. Soit F et G deux sev de E tels que $F + G = F$. Alors $F = G$.
5. Si v est un isomorphisme, alors $\text{Im}(u \circ v) = \text{Im } u$ et $\text{Ker}(v \circ u) = \text{Ker } u$.
6. Si $G \oplus H = E$ et F est un sev de E , alors $(G \cap F) \oplus (H \cap F) = F$.
7. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\text{Im}(\lambda u) = \text{Im } u$ et $\text{Ker}(\lambda u) = \text{Ker } u$.
8. $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}; f \text{ constante}\}$ et $\{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}; f(0) = -f(1)\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
9. $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$ sont supplémentaires dans E .
10. Si F est un sev de E , alors $\text{Ker } u|_F = F \cap \text{Ker } u$.
11. $u \circ v = 0 \iff \text{Im } v \subset \text{Ker } u$.
12. $\text{Ker } u \circ v = \text{Ker } u \cap \text{Ker } v$.
13. $\text{Im}(u + v) = \text{Im } u + \text{Im } v$.
14. Le seul projecteur bijectif de E est id_E .
15. Si p est un projecteur de E , alors $\text{Ker}(\text{id}_E - p) = \text{Im } p$ et $\text{Im}(\text{id}_E - p) = \text{Ker } p$.
16. Si $\text{Ker } u = \text{Ker } v$ et $\text{Im } u = \text{Im } v$, alors $u = v$.
17. Si u et v commutent, alors $\text{Im } u$ est stable par v .
18. Si u et v commutent, alors $\text{Ker } u$ est stable par v .

2 ?

QCM sur les applications linéaires *f*

1. Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -ev E . Vrai ou faux ?
 - a. $(\text{Ker } u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(\text{Im } u^k)_{k \in \mathbb{N}}$ sont respectivement décroissante et croissante pour l'inclusion;
 - b. Si $\text{Ker } u^p = \text{Ker } u^{p+1}$, alors $\forall k \geq p$, $\text{Ker } u^k = \text{Ker } u^p$;
 - c. Si $\text{Im } u^p = \text{Im } u^{p+1}$, alors $\forall k \geq p$, $\text{Im } u^k = \text{Im } u^p$;
 - d. Pour tout sev F et G de E , on a $u(F + G) = u(F) + u(G)$;
 - e. Si F et G sont en somme directe, alors $u(F \oplus G) = u(F) \oplus u(G)$;
 - f. Si F et G sont en somme directe et u est injective, alors $u(F \oplus G) = u(F) \oplus u(G)$.
2. Soit A , B et C des sev d'un $\mathbb{K}$ -ev E . On note $F = (A \cap B) + (A \cap C)$, $G = A \cap (B + (A \cap C))$ et $H = A \cap (B + C)$. Vrai ou faux ?

a. F et G sont des sev de H .	b. $F = H$.	c. $F = G$.
-------------------------------------	--------------	--------------
3. Soit F et G des sev de E . Vrai ou faux ?

a. $F \cap G \subset F + G$;	c. $F \subset F + G$;	e. $F \cup (F \cap G) \subset F + G$;
b. $F \cup G \subset F + G$;	d. $F + F = F$;	f. $F + G = G + F$.

4. Soit $k \in \mathbb{R}_+$, I intervalle de $\mathbb{R}$ et $E_k := \{f \in \mathbb{R}^I; f \text{ } k\text{-lipschitzienne}\}$. Vrai ou faux ?
- Pour tout $k \in \mathbb{R}_+$, E_k est un sev de $\mathbb{R}^I$.
 - L'ensemble $E := \bigcup_{k \in \mathbb{R}_+} E_k$ n'est pas un sev de $\mathbb{R}^I$.
 - Si I est un segment de $\mathbb{R}$, alors $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est un sous espace vectoriel de E .
5. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F et G deux sev supplémentaires dans E . On note respectivement p et s la projection sur F parallèlement à G et la symétrie par rapport à F parallèlement à G . Vrai ou faux ?
- $s = 2p - \text{id}_E$;
 - $\text{id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F ;
 - $\text{id}_E - s$ est la symétrie par rapport à G parallèlement à F ;
 - Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, F est stable par u si et seulement si $p \circ u = u$;
 - Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, si $p \circ u = u \circ p$ alors F est stable par u .
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\phi(X) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) u$ où $u = (1, \dots, 1)$. Vrai ou faux ?
- ϕ est une symétrie;
 - ϕ est un projecteur;
 - $\text{Im } \phi = \text{Vect}(u)$.

2. Exercices élémentaires

3 ?

Somme de deux plans

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z); x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

- Établir que F et G sont des sev de E .
- Déterminer $F \cap G$. Prouver que $F + G = E$. La somme est-elle directe ?

4 ?

Un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

On note E l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles qu'il existe $a \in \mathbb{R}_+$ et $A \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $|f(x)| \leq A|x|$ pour tout $x \geq a$. Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel pour les lois usuelles.

5 ?

Combinaison linéaire inversible

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev, u et v dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $au + bv \in \text{GL}(E)$. Montrer que $\text{Ker } u \cap \text{Ker } v = \{0\}$.

6 ?

Composées

Soit f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis par $g : (x, y) \mapsto (y, x)$ et $f : (x, y) \mapsto (x + y, 2x)$.

- Montrer que f et g sont des isomorphismes de $\mathbb{R}^2$. Déterminer f^{-1} et g^{-1} .
- On note $h = f \circ g - g \circ f$. A-t-on $h \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$?
- A-t-on $f \circ g = g \circ f$? h est-elle injective ?
- L'application h est-elle surjective ?

7 ?

De la simplification

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F, F', G trois sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G = F' \oplus G$.

1. Peut-on en déduire que $F' = F$?
2. On suppose de plus que $F' \subset F$. Peut-on en déduire que $F' = F$?

8 ?

Sommes directes

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F un sous-espace vectoriel strict (ie distinct) de E et $u \in E \setminus F$.

1. Soit $v \in E \setminus F$. Peut-on affirmer que $F \oplus \text{Vect}(u, v)$?
2. Même question en supposant que v est un vecteur de E tel que $v \notin F \oplus \text{Vect}(u)$.

9 ?

Inversibilité à droite

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, f et g deux endomorphismes de E tels que $f \circ g = \text{id}_E$.

1. Établir que f est surjective et g injective.
2. Montrer que $p = g \circ f$ est un projecteur de E .
3. Établir que $\text{Im } p = \text{Im } g$ et $\text{Ker } p = \text{Ker } f$.
4. Montrer que $\text{Ker } f \oplus \text{Im } g = E$.

10 ?

Question de stabilité

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F et G deux sev supplémentaires de E . On note p la projection sur F parallèlement à G et on considère $f \in \mathcal{L}(E)$.

Démontrer que $f(F) \subset F$ si et seulement si $q \circ f \circ p = 0$.

11 ?

Linéarité f

On considère des $\mathbb{K}$ -ev E, F et G , une application g de F dans G et une application f linéaire surjective de E dans F .
Montrer que, si $g \circ f$ est linéaire, alors g est linéaire.

12 ?

Sommes et intersections f

Soit A, B et C des sev d'un $\mathbb{K}$ -ev E tels que $A \cap C \subset B$, $C \subset A + B$ et $B \subset C$. Montrer que $B = C$.

3. Exercices classiques plus techniques

13 ?

Images directes et réciproque d'un sev f

Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Soit A et B des sous-espaces vectoriels de E et F . Établir que :

1. L'image directe $f\langle A \rangle$ est un sous-espace vectoriel de F .
2. L'image réciproque $f^{-1}\langle B \rangle$ est un sous-espace vectoriel de E .

14 ?

Commutation à un projecteur

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, f et g dans $\mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$.

1. Montrer que $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ sont stables par g .
2. Soit p un projecteur de E . Montrer que p et f commutent si et seulement si $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont stables par f .

15 ?Endomorphismes vérifiant $f^7 = f$ *ff*

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^7 = f$. Montrer que $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

16 ?Espace vectoriel produit *ff*

Soit E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$ -ev. Est-ce que tout sev de l'espace vectoriel produit $E_1 \times E_2$ est de la forme $F_1 \times F_2$, où F_1 et F_2 sont des sev de E_1 et E_2 ?

17 ?Sommes directes *ff*

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F, G, F' et G' des sous-espaces. On suppose $E = F \oplus G$, $E = F' \oplus G'$ et $F' \subset G$.

1. Démontrer que $F + F'$ est directe. On note $F'' := F \oplus F'$.
2. Montrer que $F'' \oplus (G \cap G') = E$.

18 ?Espaces fonctionnels *ff*

Soit $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}; f(0) = f(1)\}$.

1. Montrer que F est un espace vectoriel pour les lois usuelles.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

4. Indications

1 ↪ _____

Pour les questions relatives aux sev, se forger une intuition dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

2 ↪ _____

Revenir aux définitions, se forger une intuition dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ quand la question s'y prête.

3 ↪ _____

Les sev F et G sont des plans, $F \cap G$ une droite.

4 ↪ _____

Montrer que E est un sev du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ usuel.

5 ↪ _____

Considérer un vecteur x dans $\text{Ker } u \cap \text{Ker } v$.

6 ↪ _____

La linéarité peut se démontrer directement en utilisant que des composées et des combinaisons linéaires d'applications linéaires sont linéaires.

7 ↪ _____

Se forger une intuition en considérons des exemples dans le plan.

8 ↪ _____

Réponse négative au 1. Visualiser dans le cas où F est un plan de l'espace.

9 ↪ _____

Penser au noyau pour l'injectivité.

10 ↪ _____

Raisonner par double implication.

11 ↪ _____

Développez $g(\lambda x + x')$ en écrivant x et x' comme images par f de vecteurs de E .

12 ↪ _____

Considérer un élément de C et le décomposer dans $A + B$.

13 ↪ _____

Il suffit de revenir aux définitions du cours.

14

Ne pas oublier que $\forall x \in \text{Im } p, p(x) = x$.

15

Procéder par analyse-Synthèse.

16

Se forger une intuition avec $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

17

Au 2., on pourra décomposer un élément de E dans $F \oplus G$ et $F' \oplus G'$.

18

Au 2., s'aider d'une fonction n'appartenant pas à F .

5. Solutions

1 ↺

1. Vrai car $F \subset F + G = F \cap G \subset G$ et $G \subset F$ par symétrie.
2. Faux. Cex : la somme de $(6n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(-n^3)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
3. Vrai. La suite nulle est périodique et, si u et v sont respectivement p et q -périodiques, alors $u + \lambda v$ est pq -périodique pour tout λ dans $\mathbb{R}$.
4. Faux car $F + G = F \iff G \subset F$.
5. Vrai. Supposons v bijective. On a alors $u(x) = 0 \iff \lambda(v \circ u)(x) = 0$ pour tout x dans E ; ainsi $\text{Ker } u = \text{Ker}(v \circ u)$. De plus,

$$\text{Im}(u \circ v) = \{u(v(x)) ; x \in E\} = \{u(y) ; y \in \text{Im } v\} = \text{Im } u$$

car $\text{Im } v = E$ (par surjectivité de v).

6. Faux. Cex : dans $E := \mathbb{R}^2$, $F := \text{Vect}(u)$, $G := \text{Vect}(v)$ et $H := \text{Vect}(w)$ où u, v et w sont respectivement définis par $(1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 1)$. On a $F \oplus G = E$ mais

$$(F \cap H) \oplus (G \cap H) = \{0\} \neq H$$

7. Vrai. Notons $v : x \mapsto \lambda x$. Cette endomorphisme est bijectif (car λ est non nul). On conclut par le 5. en remarquant que

$$\lambda u = u \circ v = v \circ u$$

8. Vrai. Les deux ensembles sont bien des sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ en somme directe et $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ se décompose dans cette somme en $f = c + g$ où c est la fonction constante égale à $\frac{f(0)+f(1)}{2}$ et $g := f - c$.
9. Faux. Cex : $E = \mathbb{R}^2$ et $u((x, y)) = (y, 0)$ (on a $\text{Ker } u = \text{Im } u$).
10. Vrai car $x \in \text{Ker } u|_F \iff u(x) = 0$ et $x \in F$
11. Vrai car $u \circ v = 0 \iff \forall x \in E, v(x) \in \text{Ker } u$.
12. Faux. Cex : $v = \text{id}_E$ et u non injectif.
13. Faux. Cex : $(f, g) = (\text{id}_E, -\text{id}_E)$.
14. Vrai car, pour un projecteur p , $\text{Ker } p = \{0\}$ équivaut à $p = \text{id}_E$.
15. Vrai. Si p est la projection sur F parallèlement à G , alors $\text{id}_E - p$ est la projection sur G parallèlement à F .
16. Faux. Cex : $(u, v) = (\text{id}_E, 2\text{id}_E)$.
17. Vrai. Supposons que $u \circ v = v \circ u$. Comme $\forall x \in E, u(v(x)) = v(u(x)) \in \text{Im } v$, $\text{Im } v$ est stable par u .
18. Vrai. Supposons que $u \circ v = v \circ u$. Comme $\forall x \in \text{Ker } v, v(u(x)) = u(v(x)) = u(0) = 0$ (par linéarité de u), $\text{Ker } v$ est stable par u .

Enseignements à tirer de cet exercice

- ⇒ Compléments à propos de la question 5. : pour un endomorphisme v de E quelconque, on a $\text{Im}(v \circ u) = v(\text{Im } u)$ et $\text{Ker}(u \circ v) = v^{-1}(\text{Ker } u)$. En particulier, si v est bijective, alors $\text{Im } u$ et $\text{Im}(v \circ u)$ sont isomorphes (de même que $\text{Ker } u$ et $\text{Ker}(u \circ v)$).
- ⇒ Commentaire sur la question 6. : on a vu en TD que l'intersection n'est pas distributive sur l'addition des sev, c'est-à-dire que si $G + H = E$, alors on ne peut affirmer en général que $F = F \cap G + F \cap H$. Comme d'habitude, nous recherchons des contre-exemples dans le plan $\mathbb{R}^2$ ou l'espace $\mathbb{R}^3$, afin de profiter de l'intuition géométrique (il faut dessiner!).

2

1. Seuls b., c., d. et f. sont vraies.

⇒ Faux. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme $\forall x \in E, u^{k+1}(x) = u^k(u(x)) \in \text{Im } u^k$, on a $\text{Im } u^{k+1} \subset \text{Im } u^k$. Pour $x \in \text{Ker } u^k$, on a $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0) = 0$ par linéarité de u . Ainsi $\text{Ker } u^k \subset \text{Ker } u^{k+1}$.

⇒ Vrai. Supposons que $\text{Ker } u^p = \text{Ker } u^{p+1}$. Soit $x \in \text{Ker } u^{p+2}$. Comme $u^{p+2}(x) = u^{p+1}(u(x)) = 0$, d'où $u(x) \in \text{Ker } u^{p+1}$ et donc $u(x) \in \text{Ker } u^p$, ie $u^{p+1}(x) = 0$. Ainsi $\text{Ker } u^{p+2} \subset \text{Ker } u^{p+1}$. Comme l'inclusion réciproque est universelle, on a $\text{Ker } u^{p+2} = \text{Ker } u^{p+1}$. Et ainsi de suite, par une récurrence facile, on démontre que $\text{Ker } u^k = \text{Ker } u^p$ pour tout $k \geq p$.

⇒ Vrai. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\text{Im } u^k = u^k(E)$. Supposons $\text{Im } u^p = \text{Im } u^{p+1}$. On a alors $u^p(E) = u^{p+1}(E)$ d'où

$$u^{p+1}(E) = u(u^p(E)) = u(u^{p+1}(E)) = u^{p+2}(E)$$

et ainsi de suite par une récurrence facile $\text{Im } u^k = \text{Im } u^p$ pour tout $k \geq p$.

⇒ Vrai car, par linéarité de u , on a $u(F + G) = \{u(x) + u(y); (x, y) \in F \times G\}$.

⇒ Faux. Cex dans $E := \mathbb{R}^2$ avec $F := \text{Vect } e_1, G := \text{Vect } e_2, e_1 := (1, 0), e_2 := (0, 1)$ et

$$u : (x, y) \mapsto (x - y, x - y)$$

On a $u(F) = u(G) = \text{Vect}(e_1 + e_2)$ donc $u(F) \cap u(G) \neq \{0\}$.

⇒ Vrai. On sait déjà que $u(F \oplus G) = u(F) + u(G)$. Soit $y \in u(F) \cap u(G)$. Il existe $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $y = u(x_F) = u(x_G)$. En particulier, $u(x_F - x_G) = 0$ d'où $x_F = x_G$ par injectivité de u . On a donc $x_F = x_G = 0$ car $F \cap G = \{0\}$. Finalement, on a $y = u(x_F) = 0$. Ainsi $u(F \oplus G) = u(F) \oplus u(G)$.

2. Seuls a. et b. sont vrais.

a. Puisque les intersections et les sommes de sev de E sont des sev de E , F et G sont des sev de E . Il reste à vérifier que $F \subset H$ et $G \subset H$.

⇒ Comme $A \cap B \subset A$ et $A \cap C \subset A$, on a $F \subset A + A = A$. De plus, $A \cap B \subset B$ et $A \cap C \subset C$ et donc $F \subset B + C$ et ainsi $F \subset A \cap (B + C) = H$.

⇒ Comme $A \cap C \subset C$, on a $B + (A \cap C) \subset B + C$ et donc $G = A \cap (B + (A \cap C)) \subset A \cap (B + C) = H$.

b. Procédons par double inclusion.

⇒ Comme $A \cap B \subset A$ et $A \cap C \subset A$, on a $F \subset A + A = A$ mais aussi $F \subset B + (A \cap C)$.

Ainsi $F \subset A \cap (B + (A \cap C)) = G$.

⇒ Soit $u \in A \cap (B + (A \cap C))$: il existe $a \in A, b \in B$ et $a' \in A \cap C$ tels que $u = a + b + a'$. On a donc $b = a - a' \in A$ en tant que somme de deux vecteurs du sev A de E . Comme $b \in B$, on a $u = b + a' \in (A \cap B) + (A \cap C)$.

c. Cex : lorsque $E = \mathbb{R}^2$ et F, G, H sont des droites vectorielles deux à deux distinctes de E , on a $F = G = \{0\}$ mais $H = A \neq \{0\}$.

3. Tout est vrai. Les a., b., c. et e. découlent trivialement du fait que F et G sont inclus dans $F + G$ (car F et G contiennent 0). On a $F + F \subset F$ car F est stable par $+$ (cf. la définition d'un sev) et $F \subset F + F$ car $0 \in F$. Le dernier point vient de la commutativité de la loi $+$ (c'est un axiome de la théorie des espaces vectoriels).

4. Seul c. est vrai.

a. Pour $k > 0$, E_k n'est pas stable par somme : par exemple $\text{id}_{\mathbb{R}} \in E_2$ mais $2\text{id}_{\mathbb{R}} \notin E_k$.

b. Si f et g sont respectivement k_1 et k_2 -lipschitziennes, alors $f + \lambda g$ est $(k_1 + |\lambda|k_2)$ -lipschitzienne (par l'inégalité triangulaire). Comme E contient 0, on en déduit que c'est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

c. Vrai. En effet, $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (cf. les opérations sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ démontrées dans le cours d'analyse) et $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R}) \subset E$ (par l'inégalité des accroissements finis).

5. Tout est vrai sauf c. et d.

⇒ Les points a. b. sont directement du cours. Le c. est faux, la symétrie en question vaut $-s$.

⇒ Cex au d. : $u = \text{id}_E - p$ avec $G \neq \{0\}$.

⇒ Preuve du e. Supposons $u \circ p = p \circ u$. Soit $x \in F = \text{Im } p$. On a $p(u(x)) = u(p(x)) = u(x)$ donc $u(x) \in \text{Im } p = F$. Ainsi F est stable par u .

6. Seuls b. et c. sont vrais.

⇒ L'application ϕ est clairement linéaire et

$$\phi(\phi(x)) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \phi(u) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) u = \phi(x)$$

Ainsi ϕ est une projection et $\phi \neq \text{id}_E$ donc ϕ n'est pas une symétrie.

⇒ Par le calcul précédent, $\text{Im } \phi \subset \text{Vect}(u)$. Comme $\phi(u) = u$, l'inclusion réciproque est vraie donc $\text{Im } \phi = \text{Vect}(u)$.

Enseignements à tirer de cet exercice

⇒ Au 1.e., l'idée est de trouver u , F et G tels que $u(F) = u(G)$ et $u(F) \neq \{0\}$ (ceci suffira à assurer que $u(F) + u(G)$ n'est pas directe).

3



- On a $X \in F \iff \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2, X = x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)$. Ainsi $F = \text{Vect}((1, 0, 1), (0, 1, 1))$ et F est un sev de E . De même, $X \in G \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, X = a(1, 1, 1) + b(-1, 1, -3)$. Ainsi $G = \text{Vect}((1, 1, 1), (-1, 1, -3))$ et G est un sev de E .
- Un vecteur X appartient à $F \cap G$ si et seulement si il est de la forme $X = (a - b, a + b, a - 3b)$ où a et b sont deux nombres réels vérifiant $(a - b) + (a + b) - (a - 3b) = 0$, ie $a = -3b$. On a donc

$$F \cap G = \{(-4b, -2b, -6b); b \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}((-4, -2, -6)) = \text{Vect}((2, 1, 3))$$

Puisque $F \cap G \neq \{0\}$, la somme $F + G$ n'est pas directe.

4



Montrons que E est un sev du $\mathbb{R}$ -ev usuel $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

⇒ La fonction nulle appartient à E donc $E \neq \emptyset$.

⇒ Soit $(f, g) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ et $(A, B) \in \mathbb{R}_+^2$ vérifiant $|f(x)| \leq A|x|$ pour tout $x \geq a$ et $|g(x)| \leq B|x|$ pour tout $x \geq b$. Soit $x \geq \max(a, b)$, on a

$$|(f + \lambda g)(x)| = |f(x) + \lambda g(x)| \leq |f(x)| + |\lambda| |g(x)| \leq C|x|$$

où $C := A + |\lambda|B$. Ainsi $f + \lambda g \in E$.

5



Soit $x \in \text{Ker } u \cap \text{Ker } v$. On a $(au + bv)(x) = au(x) + bv(x) = 0$ donc $x = 0$ par injectivité de $au + bv$. Ainsi $\text{Ker } u \cap \text{Ker } v = \{0\}$.

6



- Les applications f et g sont clairement linéaires.

⇒ On a immédiatement que g est un isomorphisme d'inverse $g^{-1} = g$.

⇒ Pour tout $(x, y, x', y') \in \mathbb{R}^4$,

$$\begin{aligned} f(x, y) = (x', y') &\iff \begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = y'/2 \\ y = x' - y'/2 \end{cases} \end{aligned}$$

L'application f est donc un isomorphisme de E et sa réciproque est définie par $(x, y) \mapsto (y/2, x - y/2)$.

2. Puisque $\mathcal{L}(E)$ est une algèbre, $h = f \circ g - g \circ f \in \mathcal{L}(E)$.
3. Pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a $h(x, y) = (y - x, y - x)$. Ainsi h est pas nul. De plus $(1, 1) \in \text{Ker } h$ donc h n'est pas injective.
4. Puisque $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $h(x, y) = (y - x)(1, 1)$, l'image de h vaut $\text{Im } h = \text{Vect}(1, 1) \neq \mathbb{R}^2$ donc h n'est pas surjective.

7

1. Si G est non nul et distinct de E , alors G admet une infinité de supplémentaires et on ne peut donc en conclure que $F = F'$ dans ce cas.
2. Soit $x \in F$. On a $x \in F' \oplus G$ donc il existe $(x', g) \in F' \times G$ tel que $x = x' + g$. En particulier, on a $g = x - x' \in F$ car $(x, x') \in F^2$ d'où $g \in F \cap G = \{0\}$ et $x = x'$ d'où $x \in F'$. On en déduit que $F = F'$.

8

1. Non, voici un contre-exemple : $E = \mathbb{R}^2$, $F = \text{Vect}((0, 1))$, $u = (1, 1)$ et $v = (-1, 1)$ car $\text{Vect}(u, v) = \mathbb{R}^2$.
2. Comme $v \notin F \oplus \text{Vect}(u)$, on a $(F \oplus \text{Vect}(u)) \oplus \text{Vect}(v)$ donc $F \oplus (\text{Vect}(u) \oplus \text{Vect}(v)) = F \oplus \text{Vect}(u, v)$.

9

1. Comme $f \circ g$ est injective, g est injective. On déduit la surjectivité de f de celle de $f \circ g$.
2. On a clairement, par associativité de la composition :

$$(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ id_E \circ f = g \circ f$$

Comme $p = g \circ f \in \mathcal{L}(E)$ en tant que composée d'endomorphismes de E , on en déduit que p est un projecteur de E .

3. On a $\text{Im } p = g(f(E)) = g(E) = \text{Im } g$ car la surjectivité de f (cf. le a) équivaut à $f(E) = E$. De plus, pour tout x dans E , $p(x) = g(f(x)) = 0$ équivaut à $f(x) = 0$ par injectivité de g (idem). On a donc $\text{Ker } p = \text{Ker } f$.
4. Puisque p est un projecteur de E , on a $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p = \text{Ker } f \oplus \text{Im } g$.

10

- $\Rightarrow$ Supposons $f(F) \subset F$. Comme $\text{Im } p \subset F$ et $f(F) \subset F$, on a $\text{Im } f \circ p \subset F = \text{Ker } q$, on a $q \circ f \circ p = 0$.
- $\Rightarrow$ Supposons $q \circ f \circ p = 0$. Soit $x \in F$. On a $p(x) = x$ d'où $q(f(x)) = 0$, i.e. $f(x) \in \text{Ker } q = F$. On a donc $f(F) \subset F$.

11

Supposons $g \circ f$ linéaire. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $(y, y') \in F^2$. Il existe $(x, x') \in E^2$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. Ainsi,

$$g(y + \lambda y') = g(f(x) + \lambda f(x')) = (g \circ f)(x + \lambda x') = (g \circ f)(x) + \lambda(g \circ f)(x') = g(y) + \lambda g(y')$$

par linéarité de f puis de $g \circ f$. Ainsi, g est linéaire.

12

Soit $c \in C$. Comme $C \subset A + B$, il existe $(a, b) \in A \times B$ tel que $c = a + b$. Comme $B \subset C$, on a $a = b - c \in C$ d'où $a \in A \cap C \subset B$ d'où $c = a + b \in B$. Ainsi $C \subset B$. Puisque $B \subset C$, on en déduit que $B = C$.

13

1. Soit $y_1, y_2 \in f\langle A \rangle$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Alors il existe $a_1, a_2 \in A$ tels que $f(a_1) = y_1$ et $f(a_2) = y_2$. Donc $y_1 + \mu y_2 = f(a_1) + \mu f(a_2) = f(a_1 + \mu a_2) \in f\langle A \rangle$ car $a_1 + \mu a_2 \in A$ (car A sev de E).
2. Soit $u, v \in f^{-1}\langle B \rangle$ et $\mu \in \mathbb{K}$. Alors $f(u)$ et $f(v)$ sont dans B . Donc $f(u + \mu v) = f(u) + \mu f(v) \in B$ (car B sev de F), i.e. $\lambda u + \mu v \in f^{-1}\langle B \rangle$.

14



1. $\Rightarrow$ Soit $x \in \text{Ker } f$. On a $f(g(x)) = g(f(x)) = g(0) = 0$ par linéarité de f . Ainsi $g(x) \in \text{Ker } f$.
 $\Rightarrow$ Soit $x \in \text{Im } f$. il existe $a \in E$ tel que $x = f(a)$ d'où $g(x) = g(f(a)) = f(g(a)) \in \text{Im } f$.
Ainsi $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont stables par g .
2. $\Rightarrow$ Supposons que p et f commutent. Par le a., $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ sont stables par f .
 $\Rightarrow$ Supposons que $\text{Im } p$ et $\text{Ker } p$ soient stables par f .
 $\color{red}\Rightarrow$ Soit $x \in \text{Ker } p$. On a $(f \circ p)(x) = f(p(x)) = f(0) = 0$ par linéarité de f . De plus, $(p \circ f)(x) = p(f(x)) = 0$ car $\text{Ker } p$ est stable par f .
 $\color{red}\Rightarrow$ Soit $x \in \text{Im } p$. On a $(f \circ p)(x) = f(p(x)) = f(x)$. De plus, $(p \circ f)(x) = p(f(x)) = f(x)$ car $\text{Ker } p$ est stable par f .
Ainsi $p \circ f = p \circ f$ car ces deux endomorphismes sont égaux sur $\text{Ker } p$ et $\text{Im } p$ qui sont supplémentaires dans E .

15



- $\Rightarrow$ Supposons $E = \text{Ker } f + \text{Im } f$. Soit x dans E et $(x_K, a) \in \text{Ker } f \times E$ tel que $x = x_K + f(a)$. On a $f^6(x) = f^7(a) = f(a)$ d'où $x_K = x - f^6(x)$. On en déduit l'unicité de la décomposition dans $\text{Ker } f + \text{Im } f$ donc le caractère direct de cette somme.
- $\Rightarrow$ Soit $x \in E$. On a $x = x - f^6(x) + f^6(x)$. De plus $f^6(x) \in \text{Im } f$ et $f(x - f^6(x)) = f(x) - f^7(x) = 0$ donc $x - f^6(x) \in \text{Ker } f$. Ainsi $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.

16



C'est faux en général. Dans le cas où $E_1 = E_2 = \mathbb{R}$, le sev $\text{Vect}(u)$ où $u = (1, 1)$ n'est pas de la forme $F_1 \times F_2$, où F_1 et F_2 sont des sev de $\mathbb{R}$. Démontrons ce résultat par l'absurde. Si c'était le cas, on aurait $1 \in F_1$ et $1 \in F_2$ donc $F_1 = F_2 = \mathbb{R}$ (car les seuls sev du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}$ sont $\mathbb{R}$ et $\{0\}$), ainsi $F_1 \times F_2 = \mathbb{R}^2 = \text{Vect}(u)$ ce qui est absurde.

17



1. On a $F \cap F' \subset F \cap G = \{0\}$ car $F + G$ est supposée directe. On en déduit que $F \cap F' = \{0\}$.
2. $\Rightarrow$ Soit $x \in F'' \cap G \cap G'$. Il existe $(x_F, x'_F) \in F \times F'$ tel que $x = x_F + x'_F$. Comme $F' \subset G$, on a $x_F = x - x'_F \in G$ d'où $x_F \in F \cap G = \{0\}$. Ainsi $x_F = 0$ et donc $x = x'_F \in F' \cap G' = \{0\}$. On en conclut que $x = 0$. La somme $F'' + G \cap G'$ est donc directe.
 $\Rightarrow$ Soit $x \in E$. Il existe $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$ et $(x'_F, x'_G) \in F' \times G'$ tel que $x = x'_F + x'_G$. On a $x'_G = x_G - x'_F \in G$ car $F' \subset G$. Ainsi $x'_G \in G \cap G'$ et $x = x_F + x'_F + x'_G \in F'' \oplus G \cap G'$.
Ainsi $F'' \oplus G \cap G' = E$.

18



1. Montrons que F est un sev du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ usuel. On a clairement $0 \in F$. Soit $(f, g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$(f + \lambda g)(0) = f(0) + \lambda g(0) = f(1) + \lambda g(1) = (f + \lambda g)(1)$$

d'où $f + \lambda g \in F$.

2. Montrons que $G := \text{Vect}(\text{id}_{\mathbb{R}})$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.
 $\Rightarrow$ Comme $\text{id}_{\mathbb{R}} \notin F$, la somme $F + G$ est directe.
 $\Rightarrow$ Soit $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Posons $\lambda := f(1) - f(0)$. On a $f = (f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}}) + \lambda \text{id}_{\mathbb{R}}$ avec $f - \lambda \text{id}_{\mathbb{R}} \in F$ et $\lambda \text{id}_{\mathbb{R}} \in G$. Ainsi $f \in F \oplus G$. On en déduit que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F \oplus G$.