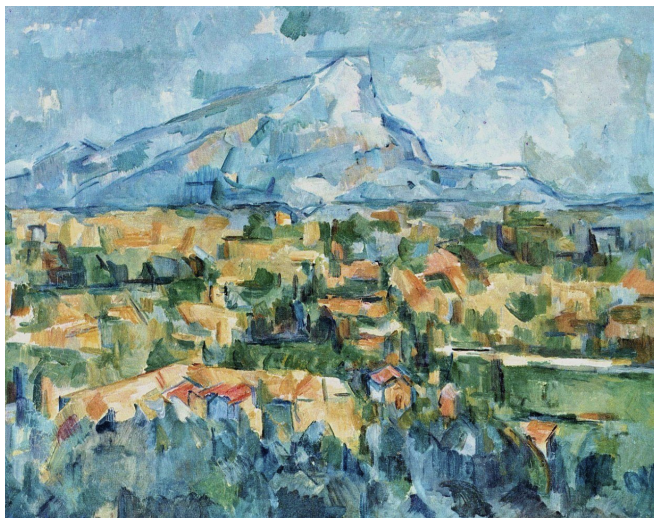




On étudie la structure d'espace vectoriel et en particulier les espaces de dimension finie qui généralisent les espaces de coordonnées $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ bien connus.



Montagne Sainte-Victoire, Paul Cézanne

10	Théorie de la dimension	1
1	Quizz	2
2	Exercices élémentaires	3
3	Exercices classiques plus techniques	4
4	Indications	6
5	Solutions	8

1. Quizz

1 ?

Vrai ou faux ? *f*

On note E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ des familles de vecteurs de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1} \iff \text{Im } u^k = \text{Im } u^{k+1}$.
2. u est injectif $\iff u$ est surjectif
3. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective (F est $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie), alors $\dim E \leq \dim F$.
4. Une famille de vecteurs de E deux à deux non-colinéaires est libre.
5. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est libre et $x \in E$, alors $(e_1 + x, \dots, e_n + x)$ est libre.
6. Si $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ sont libres, alors $(e_1 + f_1, \dots, e_n + f_n)$ est libre.
7. Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre, alors $(-e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre.
8. Le commutant de $E_{1,2}$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ de dimension deux.
9. L'ensemble $\{x \mapsto A \cos(x - \varphi); (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ de dimension deux.
10. L'ensemble $\{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}); \text{tr } X = 0\}$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ de dimension deux.
11. Si F est un sev de E et $x \notin F$, alors $\text{Vect } x$ et F sont en somme directe.
12. Si F est un sev de E , $x \notin F$ et $y \notin F$, alors $\text{Vect}(x, y)$ et F sont en somme directe.
13. Si $\text{rg}(e_1, \dots, e_n) = 1$, alors $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists \lambda_k \in \mathbb{K}, e_k = \lambda_k e_1$.
14. Si A, B et C sont trois sev de E vérifiant $A \cap B \cap C = \{0\}$, alors $A + B + C$ est directe.
15. Si $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, alors $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ l'est aussi.
16. Si $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est libre, alors $(e_1, \dots, e_n)$ l'est aussi.

2 ?

QCM sur la théorie de la dimension *f*

1. On note $E = \mathbb{R}^4$, $F = \{(x, y, z, t) \in E; z = y + t = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t); x = y + z = 0\}$.
 - a. $\dim F = 3$ et $\dim G = 1$;
 - b. F et G sont supplémentaires dans E ;
 - c. La projection sur F parallèlement à G est $p : (x, y, z, t) \mapsto (x, y + z, 0, -y - z)$;
 - d. La symétrie par rapport à F parallèlement à G est $s : (x, y, z, t) \mapsto (-x, -y - 2z, z, y + z + t)$.
2. Soit n et m dans $\mathbb{R}^*$.
 - a. Il existe une application linéaire injective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si $n \geq m$;
 - b. Il existe une application linéaire surjective de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ si et seulement si $n \geq m$;
 - c. $\mathbb{R}^m$ et $\mathbb{R}^n$ sont isomorphes si et seulement si $m = n$;
 - d. Tout élément de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ est de la forme $X \mapsto MX$ avec $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$;
 - e. Tout sev de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n équations.
3. On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{C}$ -ev.
 - a. Sa dimension vaut un.
 - b. $(1, i)$ est une base de $\mathbb{C}$.
 - c. $\mathbb{R}$ est un sev de $\mathbb{C}$.
 - d. Les seuls sev de $\mathbb{C}$ sont $\mathbb{C}$ et $\{0\}$.

2. Exercices élémentaires

3 ? _____ Un plan de $\mathbb{K}^4$ _____

Soit $F = \{(\lambda + \mu, 2\lambda - \mu, 3\lambda + 4\mu, 2\mu); (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$.
2. Déterminer la dimension de F .

4 ? _____ Matrices symétriques de trace nulle _____

Montrer que $E = \{X \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}); \text{tr } X = 0\}$ est un sev de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et calculer sa dimension.

5 ? _____ Liberté _____

Montrer que les fonctions $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto x \sin x$ et $x \mapsto x \cos x$ sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

6 ? _____ Étude d'une application linéaire _____

Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (x + z, y - z, x + y + z, x - y - z)$.

1. L'application ϕ est-elle injective ?
2. Étudier la surjectivité de ϕ . Donner une base de $\text{Im } \phi$.

7 ? _____ Étude d'une application du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$ _____

On considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. On définit l'application u par $u : z \mapsto iz - i\bar{z}$.

1. Prouver que $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$.
2. Déterminer $\text{Ker } u$ et $\text{Im } u$.
3. Calculer u^2 . En déduire que l'endomorphisme $\text{id}_{\mathbb{C}} + 2u$ est inversible et calculer son inverse.

8 ? _____ Projections et symétries _____

Soit $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x + y - z = 0\}$ et $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 2x - 2y + z = x - y - z = 0\}$.

1. Démontrer que P et D sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$.
3. Déterminer la projection p de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D .
4. Déterminer la symétrie s de $\mathbb{R}^3$ par rapport à P parallèlement à D .

9 ? _____ Endomorphismes vérifiant $\text{Ker } f = \text{Im } f$ _____

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et f un endomorphisme de E . Montrer que $\text{Ker } f = \text{Im } f \iff f^2 = 0$ et $n = 2 \text{rg } f$.

10 ?

Inversibilité à droite au à gauche f

Soit $0 < p \leq n$, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$ tels que $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^p}$.

1. Calculer $\text{rg } f$ et $\text{rg } g$.
2. Quelle est la nature de l'endomorphisme $g \circ f$ de $\mathbb{R}^n$?

11 ?

Images directes et réciproques f

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) := (x, 0, y)$. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer des bases de $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$.
2. On note $E = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Déterminer des bases des sev $f\langle E \rangle$ et $f^{-1}\langle E \rangle$.

12 ?

Algorithme du pivot dans $\mathbb{R}^4$ f

Soit $E = \mathbb{R}^4$, $u_1 = (1, -1, 2, 3)$, $u_2 = (1, 1, 2, 0)$, $u_3 = (3, -1, 6, -6)$, $v_1 = (0, -2, 0, -3)$ et $v_2 = (1, 0, 1, 0)$. On pose $F = \text{Vect}(u_1, u_2, u_3)$ et $G = \text{Vect}(v_1, v_2)$.

1. Déterminer des bases et les dimensions des sev F et G de E .
2. Déterminer la dimension de $F + G$ et extraire de $(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2)$ une base de $F + G$. Que vaut $F + G$?
3. Calculer $\dim F \cap G$? Déterminer un système d'équations cartésiennes de F et G . En déduire une base de $F \cap G$.

3. Exercices classiques plus techniques

13 ?

Autour de la trace f

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\phi(X) := X + (\text{tr } X)I_n$

1. Justifier que ϕ est linéaire.
2. Démontrer que ϕ est un isomorphisme de deux façons différentes.

14 ?

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie, V un sev de E et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $V \subset f\langle V \rangle$. Montrer que $f\langle V \rangle = V$.

15 ?

Mines-Ponts PC-2015 f

Soit $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $v_1 + v_2 + v_3 = 1$. On pose, pour tout vecteur $x = (x_1, x_2, x_3)$ dans $\mathbb{R}^3$, $\phi(x) := x - (x_1 + x_2 + x_3)v$. Montrer que cette application définit un projecteur de $\mathbb{R}^3$. Déterminer son image et son noyau.

16 ?

Mines-Ponts PSI-2015 ff

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$, $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E et $\phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow E^n$, $u \mapsto (u(e_1), u(e_2), u(e_3))$.

1. Montrer que ϕ est linéaire.
2. Montrer que ϕ est un isomorphisme *si et seulement si* $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de l'espace E .

17

Centrale PC-2014 *ff*

Soit E, F, G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. On pose $w = v \circ u$. Montrer que w est un isomorphisme si et seulement si v est surjective, u est injective et $\text{Ker } v \oplus \text{Im } u = F$.

4. Indications

1 ↪ _____

On se forgera une intuition en dimension deux ou trois.

2 ↪ _____

L'ensemble $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$ -ev de dimension un pour les deux opérations $+$ et $\times$ usuelles.

3 ↪ _____

On trouve $\dim(F) = 2$.

4 ↪ _____

Exhiber une base de E . On trouve que $\dim E = 5$.

5 ↪ _____

Considérer une combinaison linéaire nulle des quatre vecteurs.

6 ↪ _____

L'application ϕ est injective mais pas surjective.

7 ↪ _____

On a $\text{Ker } u = \text{Im } u = \mathbb{R}$ donc $u^2 = 0$. Calculer $(2u + \text{id}_{\mathbb{C}})^2$ pour conclure.

8 ↪ _____

Cf. les méthodes utilisées dans le cours.

9 ↪ _____

Utiliser le théorème du rang.

10 ↪ _____

Que dire de la surjectivité ou injectivité de f et g ?

11 ↪ _____

Au 2., remarquer que $(x, y, z) \in f^{-1}\langle E \rangle \iff (x, 0, y) \in E$.

12 ↪ _____

Pivoter à tous les étages.

13 ↪ _____

La bijectivité de ϕ équivaut à son injectivité. On peut aussi résoudre $\phi(X) = Y$ d'inconnue X directement.

14

15

L'image est le plan d'équation $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ et le noyau la droite Vect v .

16

Lorsque ϕ est un isomorphisme, on pourra considérer un endomorphisme u de E tel que $\phi(u)$ soit une base de E .

17

Si w est un isomorphisme, alors $\dim G = \dim E$. Appliquer le théorème du rang.

5. Solutions

1



1. Vrai. Comme $\text{Ker } u^k \subset \text{Ker } u^{k+1}$ et $\text{Im } u^{k+1} \subset \text{Im } u^k$, on a

$$\begin{aligned} \text{Ker } u^k = \text{Ker } u^{k+1} &\iff \dim \text{Ker } u^k = \dim \text{Ker } u^{k+1} \\ &\iff \text{rg } u^k = \text{rg } u^{k+1} \\ &\iff \text{Im } u^k = \text{Im } u^{k+1} \end{aligned}$$

par le théorème du rang.

2. Faux. Cex : $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D : f \mapsto f'$ (surjectif mais non injectif).
3. Vrai. Par le théorème du rang, $\dim E = \text{rg } f$ si f est injective puis $\text{rg } f \leq \dim F$ car $\text{Im } f$ est un sev de F .
4. Faux dès que $n \geq 3$. Cex : $(u, v, u + v)$ pour (u, v) libre.
5. Faux. Cex : $x = -e_1$.
6. Faux. Cex : $f_i = -e_i$ pour tout i .
7. Vrai (immédiat par la définition).
8. Vrai. Après tout calcul, le commutant de $E_{1,2}$ est $\text{Vect}(I_2, E_{1,2})$.
9. Vrai car l'ensemble est égal à $\text{Vect}(\cos, \sin)$ d'après le cours de trigonométrie.
10. Faux. C'est bien un sev mais sa dimension vaut trois.
11. Vrai (cf. le cours).
12. Faux. Cex pour $y = x + v$ où $v \in F \setminus \{0\}$.
13. Faux. Pour $n \geq 2$ et $u \in E \setminus \{0\}$, la famille $(0, u, \dots, u)$ ($n-1$ fois u) est de rang égale à 1.
14. Faux. Cex dans $\mathbb{R}^2$, considérer trois droites vectorielles distinctes.
15. Faux. Cex : choisir $u = 0$.
16. Vrai. Supposons $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ libre. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$. On a alors $\sum_{k=1}^n \lambda_k u(e_k) = 0$ par linéarité de u . Ainsi $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ et $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

Enseignements à tirer de cet exercice

- ⇒ Aux 11. et 12., il faut s'appuyer sur des figures afin de se forger une intuition.
- ⇒ Attention au 13., une famille de vecteur est de rang un si et seulement si ces vecteurs sont deux à deux colinéaires.

2



1. Seuls b. et c. sont vrais.
- ⇒ On a clairement $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$ où $f_1 = (1, 0, 0, 0)$ et $f_2 = (0, 1, 0, -1)$. Les deux vecteurs n'étant pas colinéaires, F est un plan vectoriel de E . De même, $G = \text{Vect}(g_1, g_2)$ où $g_1 = (0, 0, 0, 1)$ et $g_2 = (0, 1, -1, 0)$. Les deux vecteurs n'étant pas colinéaires, G est un plan vectoriel de E .
- ⇒ Puisque F et G sont des plans vectoriels de E qui est de dimension quatre, F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F \cap G = \{0\}$. Soit donc $(x, y, z, t) \in F \cap G$. On a $x = z = 0 = y + t = y + z$ ainsi $x = y = z = t = 0$.
- ⇒ Soit $X = (x, y, z, t)$. La projection $p(X)$ de X sur F parallèlement à G est l'unique vecteur X_1 de F tel que $X - X_1$ appartienne à G . Or $X_1 = \alpha f_1 + \beta f_2$ vérifie

$$\begin{aligned} X - X_1 \in G &\iff (x - \alpha, y - \beta, z, t + \beta) \in G \\ &\iff \alpha = x \text{ et } \beta = y + z \end{aligned}$$

On a donc $p(X) = X_1 = (x, y + z, 0, -y - z)$ et puisque $s = -\text{id}_E + 2p$, $s(X) = (x, y + 2z, -z, -y - z - t)$.

2. Tout est vrai sauf a.

⇒ La bonne condition au a. est $n \leq m$. L'implication $\Rightarrow$ découle de la formule du rang : si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une injection linéaire, alors $n = \dim \mathbb{R}^n = \text{rg } f \leq \dim \mathbb{R}^m = m$ car $\text{Im } f \subset \mathbb{R}^m$. Réciproquement, supposons $n \leq m$. L'application $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$ est clairement une injection linéaire.

⇒ L'implication $\Rightarrow$ du b. est une conséquence de la formule du rang : si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est une surjection linéaire, alors $n = \dim \mathbb{R}^n = m + \dim \text{Ker } f \geq m$ car $\text{Im } f = \mathbb{R}^m$. Réciproquement, supposons $n \geq m$. L'application $f : (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_m)$ est clairement une surjection linéaire.

⇒ Le c. est clair par ce qui précède.

⇒ Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linéaire. Notons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. On a, pour tout vecteur $X = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$,

$$f(X) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) = MX$$

en notant M l'unique élément de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de colonnes $f(e_1), \dots, f(e_n)$.

⇒ Soit F un sev de $\mathbb{R}^n$. On sait que F admet un supplémentaire G dans $\mathbb{R}^n$. En notant p la projection sur G parallèlement à F et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $p(X) = MX$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$ (cf. le point précédent), on a $p(X) = 0$ si et seulement si $X \in F$. Ainsi F est défini par le système linéaire $MX = 0$.

3. Seuls a. et d. sont vrais. Une base du $\mathbb{C}$ -ev $\mathbb{C}$ est, par exemple, (1) . Le sous-ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas stable par l'opération externe des scalaires.

3



1. $F = \{\lambda(1, 2, 3, 0) + \mu(1, -1, 4, 2) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$. Ainsi, F est le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^4$ engendré par les vecteurs $(1, 2, 3, 0)$ et $(1, -1, 4, 2)$.

2. Les deux vecteurs ci-dessus n'étant pas colinéaires, ils forment une base de F . Par conséquent, $\dim F = 2$.

4



Pour tout $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$, posons $M(a, b, c, d, e) := \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & -a-b \end{pmatrix}$.

⇒ On a

$$E = \{M(a, b, c, d, e); (a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5\} = \text{Vect}(A, B, C, D, E)$$

$$\text{où } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

⇒ Montrons que (A, B, C, D, E) est libre. Soit $(a, b, c, d, e) \in \mathbb{R}^5$ tel que $aA + bB + cC + dD + eE = 0$. Comme $aA + bB + cC + dD + eE = M(a, b, c, d, e)$, on a directement $a = b = c = d = e = 0$.

On en déduit que E est un sev de dimension cinq de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5



Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, a \sin x + b \cos x + cx \sin x + dx \cos x = 0$.

⇒ En évaluant en 0 et $\pm \frac{\pi}{2}$, on trouve $b = 0$ et $\pm a + \frac{\pi}{2}c = 0$. Ainsi $a = b = c = 0$.

⇒ En évaluant en π , on trouve $-\pi d = 0$ d'où $d = 0$.

Ainsi $x \mapsto \sin x, x \mapsto \cos x, x \mapsto x \sin x$ et $x \mapsto x \cos x$ sont linéairement indépendantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

6



On remarque que $\phi = \hat{A}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Un vecteur (x, y, z) appartient au noyau de ϕ si et seulement si $y - z = x + z = x + y + z = x - y - z = 0$, ie $x = y = z = 0$. Ainsi $\text{Ker } \phi = \{0\}$ et ϕ est injective.

2. Puisque ϕ est injective, en notant $\mathcal{B} = (e_k)_{1 \leq k \leq 3}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, l'image de $\mathcal{B}$ par ϕ est une base de l'image de ϕ . Le $\text{sev Im } \phi$ est donc de dimension 3 strictement inférieure à $4 = \dim \mathbb{R}^4$: ϕ n'est pas surjective. Posons

$$u = \phi(e_1) = (1, 0, 1, 1), \quad v = \phi(e_2) = (0, 1, 1, -1), \quad w = \phi(e_3) = (1, -1, 1, -1)$$

La famille (u, v, w) est une base de $\text{Im } \phi$.

7



1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $u(z) = -2\text{Im } z$. Donc, par $\mathbb{R}$ -linéarité de la partie imaginaire, $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C})$.
2. On a, d'après le calcul précédent, $\text{Ker } u = \text{Im } u = \mathbb{R}$.
3. $\Rightarrow$ Toujours d'après le calcul initial, pour tout z appartenant à $\mathbb{C}$, $u^2(z) = u(u(z)) = 0$. On a donc $u^2 = 0$.
 $\Rightarrow$ Posons $v = \text{id}_{\mathbb{C}} + 2u$. Puisque $u^2 = 0$, on a $(v - \text{id}_{\mathbb{C}})^2 = v^2 - 2v + \text{id}_{\mathbb{C}} = 0$. Ainsi

$$v \circ (2\text{id}_{\mathbb{C}} - v) = (2\text{id}_{\mathbb{C}} - v) \circ v = \text{id}_{\mathbb{C}}$$

L'endomorphisme v est donc un isomorphisme et $v^{-1} = 2\text{id}_{\mathbb{C}} - v = \text{id}_{\mathbb{C}} - 2u$.

8



Posons $e_2 = (1, 0, 2)$, $e_3 = (0, 1, 1)$ et $e_1 = (1, 1, 0)$.

1. Après résolution des systèmes linéaires, on obtient que $D = \text{Vect}(e_1)$, $P = \text{Vect}(e_2, e_3)$ et $D \cap P = \{0\}$. Comme (e_1) et (e_2, e_3) sont libres (ces deux derniers vecteurs ne sont pas colinéaires), on a $\dim D + \dim P = 3 = \dim \mathbb{R}^3$. On en déduit que $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$.
2. Par ce qui précède, la famille (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = D \oplus P$.
3. Soit $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X - \lambda e_3 = (x - \lambda, y - \lambda, z) \in P$, d'où $2(x - \lambda) + (y - \lambda) - (z) = 0$, ie $\lambda = (2x + y - z)/3$ et $p(X) = X - \lambda e_3 = \left(\frac{x - y + z}{3}, \frac{-2x + 2y - z}{3}, z \right)$.
4. On a $s = 2p - \text{id}_E$ d'où $s(X) = \left(\frac{-x - 2y + 2z}{3}, \frac{-4x + y - 2z}{3}, z \right)$ pour $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

9



Comme $f^2 = f \circ f$, $f^2 = 0 \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } f$.

$\Rightarrow$ Supposons $\text{Ker } f = \text{Im } f$. On a alors $f^2 = 0$. Par la formule du rang, $\dim \text{Ker } f + \text{rg } f = 2\text{rg } f = n$.

$\Rightarrow$ Supposons $f^2 = 0$ et $n = 2\text{rg } f$. On a alors $\text{Im } f \subset \text{Ker } f$. Par la formule du rang, $\dim \text{Ker } f = \text{rg } f$ et donc $\text{Ker } f = \text{Im } f$.

10



1. La relation $f \circ g = \text{id}_{\mathbb{R}^p}$ implique classiquement la surjectivité de f et l'injectivité de g . On a donc $\text{rg } f = \text{rg } g = \dim \mathbb{R}^p = p$.
2. On a $(g \circ f) \circ (g \circ f) = g \circ (f \circ g) \circ f = g \circ f$. L'endomorphisme $g \circ f$ est donc une projection de $\mathbb{R}^n$.

11



1. $\Rightarrow$ On a $\text{Im } f = \text{Vect}(e_1, e_3)$, la famille (e_1, e_3) étant libre (car extraite d'une base), il s'agit d'une base de $\text{Im } f$.
 $\Rightarrow$ Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $(x, y, z) \in \text{Ker } f \iff x = y = 0$. Ainsi $\text{Ker } f = \{(0, 0, z); z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect } e_3$.
2. $\Rightarrow$ Puisque $E = \text{Vect}(e_1, e_2)$, on a $f\langle E \rangle = \text{Vect}(f(e_1), f(e_2)) = \text{Vect}(e_1, e_3)$.
 $\Rightarrow$ Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. On a $(x, y, z) \in f^{-1}\langle E \rangle \iff (x, 0, y) \in E$. Or, $(x, 0, y) \in E \iff y = 0$. Ainsi $(x, y, z) \in f^{-1}\langle E \rangle \iff y = 0$. On a donc $f^{-1}\langle E \rangle = \text{Vect}(e_1, e_3)$.

12



1. Les deux vecteurs engendrant G n'étant pas colinéaires, G est de dimension 2 et (v_1, v_2) en est une base. Déterminons le rang de (u_1, u_2, u_3) par la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 6 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & 0 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$$

On a alors $\text{rg}(u_1, u_2, u_3) = 3 : \dim(F) = 3$ et (u_1, u_2, u_3) est une base de F .

2. Il faut déterminer le rang de $(v_1, v_2, u_1, u_2, u_3)$ (qui est génératrice de $F + G$) ainsi que les relations de liaison correspondante. Appliquons la méthode du pivot de Gauss.

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & v_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & v_2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & u_2 & 0 & 1 & 1 & 0 & u_2 - v_2 & 0 & 1 & 1 & 0 & u_2 - v_2 & 0 & 1 & 1 & 0 & u_2 - v_2 \\ 0 & -2 & 0 & -3 & v_1 & 0 & -2 & 0 & -3 & v_1 & 0 & 0 & 2 & -3 & v_1 + 2u_2 - 2v_2 & 0 & 0 & 2 & -3 & v_1 + 2u_2 - 2v_2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & u_1 & 0 & -1 & 1 & 3 & u_1 - v_2 & 0 & 0 & 2 & 3 & u_1 + u_2 - 2v_2 & 0 & 0 & 0 & -6 & u_1 - u_2 - v_1 \\ 3 & -1 & 6 & -6 & u_3 & 0 & -1 & 3 & -6 & u_3 - 3v_2 & 0 & 0 & 4 & -6 & u_3 + u_2 - 4v_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & u_3 + 5u_2 + 2v_1 - 8v_2 \end{array}$$

Ainsi $\text{rg}(u_1, u_2, u_3, v_1, v_2) = 4$ et $\dim(F + G) = 4$: on a donc $F + G = \mathbb{R}^4$ et

$$u_3 = -5u_2 - 2v_1 + 8v_2,$$

la famille (v_1, v_2, u_1, u_2) est une base de $F + G$.

3. D'après la formule de Grassmann, on a $\dim(F \cap G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F + G) = 3 + 2 - 4 = 1$.

⇒ Equations de F . Comme (u_1, u_2, u_3) est libre, un vecteur $X = (x, y, z, t)$ appartient à F si et seulement si le rang de (u_1, u_2, u_3, X) vaut 3. Appliquons la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 3 & & 1 & -1 & 2 & 3 & & 1 & -1 & 2 & 3 & & 1 & -1 & 2 & 3 & \\ 1 & 1 & 2 & 0 & & 0 & -2 & 0 & -3 & & 0 & -1 & 0 & -3/2 & & 0 & -1 & 0 & -3/2 & \\ 3 & -1 & 6 & -6 & & 0 & 2 & 0 & -15 & & 0 & 0 & 0 & -18 & & 0 & 0 & 0 & -18 & \\ x & y & z & t & & x & x+y & z-2x & t-3x & & 0 & x+y & z-2x & t-3x & & 0 & 0 & z-2x & t-3x-(3/2)(x+y) \end{array}$$

Il est alors clair que le rang de ce système vaut 3 si et seulement si $z = 2x$.

⇒ Equations de G . Comme (v_1, v_2) est libre, un vecteur $X = (x, y, z, t)$ appartient à G si et seulement si le rang de (v_1, v_2, X) vaut 3. Appliquons la méthode du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & & 1 & 0 & 1 & 0 & & 1 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & -2 & 0 & -3 & & 0 & -1 & 0 & -3/2 & & 0 & -1 & 0 & -3/2 & \\ x & y & z & t & & 0 & y & z-x & t & & 0 & 0 & z-x & t-(3/2)y \end{array}$$

Il est alors clair que le rang de ce système vaut 2 si et seulement si $z = x$ et $t = \frac{3}{2}y$.

⇒ Calcul de $F \cap G$: un vecteur $X = (x, y, z, t)$ appartient à $F \cap G \iff z = x, z = 2x, t = \frac{3}{2}y$ ie. $z = x = 0$ et $t = (3/2)y$. Ainsi $F \cap G = \text{Vect}((0, 1, 0, 3/2))$ et $((0, 1, 0, 3/2))$ est une base de $F \cap G$.

13



1. Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Par linéarité de la trace :

$$\phi(X + \lambda Y) = (X + \lambda Y) + (\text{tr}(X + \lambda Y))I_n = X + \lambda Y + (\text{tr} X + \lambda \text{tr} Y)I_n = \phi(X) + \lambda \phi(Y)$$

Ainsi ϕ est linéaire.

2. Comme $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2 < +\infty$, ϕ est un isomorphisme si et seulement si ϕ est injective, si et seulement si ϕ est surjective.

⇒ Soit $X \in \text{Ker } \phi$. On a $X = -\text{tr}(X)I_n$ d'où $\text{tr} X = -(\text{tr} X)\text{tr} I_n = -n \text{tr} X$ par linéarité de la trace. Ainsi $(n+1)\text{tr} X = 0$, d'où $\text{tr} X = 0$ puis $X = -(\text{tr} X)I_n = 0$.

⇒ Soit $Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

☞ Soit X tel que $\phi(X) = Y$. On a $\text{tr } \phi(X) = (n+1)\text{tr} X = \text{tr} Y$ d'où $X = Y - \frac{\text{tr} Y}{n+1}I_n$.

❧ Réciproquement, posons $X := Y - \frac{\text{tr} Y}{n+1} I_n$. On a $\text{tr} X = \text{tr} Y - \frac{n}{n+1} \text{tr} Y = \frac{\text{tr} Y}{n+1}$ d'où

$$\phi(X) = Y - \frac{\text{tr} Y}{n+1} I_n + \frac{\text{tr} Y}{n+1} I_n = Y$$

Ainsi ϕ est surjective.

14



Il suffit de remarquer que $\dim f(V) \leq \dim V$ (par exemple en appliquant le théorème du rang à $f|_V$). Comme $V \subset f(V)$, on a $\dim V \leq \dim f(V)$ d'où $\dim f(V) = \dim V$ et finalement l'inclusion de V dans $f(V)$ est une égalité.

15



Posons $u := (1, 1, 1)$. On remarque que $x_1 + x_2 + x_3 = ux$.

⇒ Soit x et x' dans $\mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\phi(x + \lambda x') = x + \lambda x' - (x + \lambda x')uv = x - xuv + \lambda(x' - x'uv) = \phi(x) + \lambda\phi(x')$$

Ainsi ϕ est linéaire.

⇒ Soit $x \in \mathbb{R}^3$. On a

$$\phi^2(x) = \phi(x) - \phi(x)uv = x - xuv - (x - xuv)uv = x - xuv - x(uv - uvuv) = x - xuv$$

car $uv = v_1 + v_2 + v_3 = 1$. Ainsi ϕ est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

⇒ Soit $x \in \text{Ker } \phi$. On a alors $x = (xu)v \in \text{Vect}(v)$. Réciproquement, on a $\phi(v) = v - vuv = 0$ et donc $\text{Vect } v \subset \text{Ker } \phi$ par linéarité de ϕ . On en déduit que $\text{Ker } \phi = \text{Vect } v$. Comme $v_1 + v_2 + v_3 = 1$, $v \neq 0$ donc $\dim \text{Ker } \phi = 1$.

⇒ Notons $P = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. On a, pour tout $x \in P$, $f(x) = x$ donc $P \subset \text{Im } \phi$. Par le théorème du rang, $\text{rg } \phi = 2$. Comme $\dim P = 2$, on a $\text{Im } \phi = P$.

16



1. Soit u et v des endomorphismes de E et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\phi(u + \lambda v) = ((u + \lambda v)(e_k))_{1 \leq k \leq n} = (u(e_k) + \lambda v(e_k))_{1 \leq k \leq n} = \phi(u) + \lambda\phi(v)$$

Ainsi, ϕ est linéaire.

2. ⇒ Soit $(b_1, \dots, b_n)$ une base de E et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\phi(u) = (b_1, \dots, b_n)$. On a donc $u(e_i) = b_i$ pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Comme $(b_1, \dots, b_n)$ est libre, la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est aussi libre (preuve immédiate par contraposition), c'est donc une base de E .

⇒ Supposons que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base de E . Soit $u \in \text{Ker } \phi$. On a $u(e_k) = 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ d'où $u = 0$. Ainsi, $\text{Ker } \phi = \{0\}$ et ϕ est injective. Comme $\dim \mathcal{L}(E) = \dim E^n = n^2 < +\infty$, ϕ est un isomorphisme.

Variante

Voici une autre démonstration de $\Rightarrow$ (par contraposition). Supposons que $(e_1, \dots, e_n)$ ne soit pas une base de E et posons $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et considérons un supplémentaire S de F dans E . Comme cette famille comporte $n = \dim E$ vecteurs, ce n'est pas une famille génératrice de E ainsi $S \neq \{0\}$. Soit p la projection sur S parallèlement à F . On a $p \in \text{Ker } \phi$ mais $u \neq 0$ car $S \neq \{0\}$. On en déduit que ϕ n'est pas injective donc pas bijective.

17



⇒ Supposons que u soit un isomorphisme. Comme $v \circ u$ est injective, u est injective et on déduit de la surjectivité de $v \circ u$ celle de v . Par le théorème du rang, on a de plus

$$\dim G = \dim E = \dim \operatorname{Im} u, \quad \dim F = \dim \operatorname{Ker} v + \dim \operatorname{Im} v = \dim \operatorname{Ker} v + \dim G$$

Ainsi $\dim F = \dim \operatorname{Ker} v + \dim \operatorname{Im} u$. Soit $y \in \operatorname{Ker} v \cap \operatorname{Im} u$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$, d'où $v(y) = v \circ u(x) = w(x) = 0$ ainsi $x = 0$ car w est un isomorphisme. On en déduit que $\operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u = F$.

⇒ Supposons v surjective, u injective et $\operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u = F$. Soit $x \in \operatorname{Ker} w$. On a donc $u(x) \in \operatorname{Im} u \cap \operatorname{Ker} v$. Ainsi $u(x) = 0$ puis $x = 0$ par injectivité de u . Soit $y \in G$. Par surjectivité de v , il existe $x \in F$ tel que $y = v(x)$. En décomposant x dans la somme $F = \operatorname{Ker} v \oplus \operatorname{Im} u$, on prouve que $y \in \operatorname{Im} w$. Ainsi, w est un isomorphisme.