ALG 14 | Espaces préhilbertiens réels

Les espaces euclidiens sont des outils incontournables pour effectuer de l'approximation en grande dimension.

L'Annonciation, Pâris Bordone

14 Espaces préhilbertiens réels 1
1 Quizz 2
2 Exercices élémentaires 3
3 Exercices classiques plus techniques 4
4 Indications 6
5 Solutions 7

1. Quizz

1 — *Vrai ou faux ?* f

1. Pour tout $(x,y)\in \mathrm{E}^2$, $\|x\|=\|y\| \iff x-y\perp x+y$.
2. L'application $(u,v)\mapsto \int_0^1 uv$ définit un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([-1,1],\mathbb{R})$.
3. Toute famille orthogonale d'un espace euclidien est libre.
4. Pour tous sev F et G d'un espace euclidien, $\mathrm{F}\subset \mathrm{G} \iff \mathrm{F}^\perp\subset \mathrm{G}^\perp$.
5. Si $\mathrm{F}=\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_p)$, alors la projection orthogonale de x sur F est $\sum_{k=1}^p \langle x,e_k\rangle e_k$.
6. Pour $\mathrm{F}=\{(x,y,z,t)\,;\,x+t=0\}$, on a $\mathrm{F}^\perp=\mathrm{Vect}(u)$ où $u=(1,0,0,1)$.
7. Pour tout $\phi\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$, $(x,y)\in\mathrm{E}^2\mapsto\langle\phi(x),\phi(y)\rangle$ définit un produit scalaire sur E.
8. Pour $(x,y)\in\mathrm{E}^2$, on a $2\|x+y\|^2\leqslant 2\,(1+\|x\|^2)\,(1+\|y\|^2)$.
9. Pour tout $\mathrm{X}\subset\mathrm{E}$, X est un sev de E $\iff$ $\mathrm{X}^\perp$ est un sev de E.
10. Pour toute base de $\mathbb{R}^n$, $\exists$ un produit scalaire pour laquelle elle est orthonormée.
11. Dans un espace préhilbertien E, si $\mathrm{F}^\perp=\{0\}$, alors $\mathrm{F}=\mathrm{E}$.
12. Dans un espace préhilbertien E, si $\mathrm{F}^\perp=\mathrm{E}$, alors $\mathrm{F}=\{0\}$.
13. Pour $(x_1,\dots,x_n)\in(\mathbb{R}_+^*)^n$ tel que $x_1+\cdots+x_n=1$, on a $\sum_{k=1}^n x_k^{-1}\geqslant n^2$.
14. Pour tout $\phi\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$, il existe $a\in\mathbb{R}^n$ tel que $\phi: x\mapsto\langle x,a\rangle$.
15. Pour $(x,y)\in\mathrm{E}^2$, on a $\big(\forall\mu\in\mathbb{R},\ \|x+\mu y\|\geqslant\|x\|\big) \iff x\perp y$.
16. Pour $\mathbb{S}=\{x\in\mathrm{E}\,;\,\|x\|=1\}$, on a $\inf_{(u,v)\in\mathbb{S}^2}\langle u|v\rangle=-1$.
17. Si $\forall(i,j)\in[\![1,3]\!]^2$, $\langle u_i,u_j\rangle=1$ pour $i=j$ et $-1/2$ sinon, alors $u_1+u_2+u_3\neq 0$.
18. Pour $(x_1,\dots,x_n)\in\mathrm{E}^n$, on a $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\|x_i-x_j\|^2=2n\sum_{i=1}^n\|x_i\|^2-2\left\|\sum_{i=1}^n x_i\right\|^2$.

2 — *QCM sur les espaces euclidiens* ff

1. Soit E euclidien, $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une bon de E, $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{M}=\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
   - **a.** Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{M}_{i,j}=\langle f(e_j),e_i\rangle$. **2.** Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]^2$, $\mathrm{M}_{i,j}=\langle f(e_i),e_j\rangle$.
   - **b.** La somme $\sum_{i=1}^n\langle f(e_i),e_i\rangle$ dépend de la base $\mathscr{B}$.
   - **c.** Si f est une projection orthogonale de E, alors M est symétrique.
   - **d.** Si f est une projection orthogonale de E, alors $\sum_{i=1}^n\langle f(e_i),e_i\rangle=\mathrm{rg}\,f$.
2. Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n\in\mathbb{N}^*$. Pour tout produit scalaire ϕ sur E et toute base $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$, on note $\mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\phi}$ la matrice de coefficients $\phi(e_i,e_j)$.
   - **a.** $\mathscr{B}$ est orthonormée pour $\phi \iff \mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\phi}=\mathrm{I}_n$.
   - **b.** Pour tous vecteurs x et y de coordonnées X et Y dans $\mathscr{B}$, on a $\phi(x,y)=\mathrm{X}^\top\mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\phi}\mathrm{Y}$.
   - **c.** Si $\mathscr{C}$ est une autre base de E, alors $\mathrm{M}_{\mathscr{C}}^{\phi}=\mathrm{P}^\top\mathrm{M}_{\mathscr{B}}^{\phi}\mathrm{P}$ où P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{C}$.
3. Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})=\left\{\mathrm{M}\in\mathscr{M}_n(\mathbb{R})\,;\,\mathrm{M}^\top\mathrm{M}=\mathrm{I}_n\right\}$.
   - **a.** $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. **2.** $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\times)$.
   - **3.** Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bon de E. La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ appartient à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

4. Soit $P \in O_n(\mathbb{R})$. Il existe deux bon $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E telles que P soit la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

4. Soit $n \geqslant 2$ et $H = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,;\, \sum_{i=1}^n x_i = 1\right\}$ et $f : H \to \mathbb{R}$, $(x_1 \dots, x_n) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i^2$.

a. f admet une borne inférieure sur X mais pas de minimum.

b. On a $\min\limits_{X \in H} f(X) = \dfrac{1}{n}\cdot$ **3.** f n'est pas majorée sur H.

5. Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on note H l'ensemble d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

a. H est un sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$.

b. L'orthogonal de H est la droite engendrée par $u = (1, \dots, 1)$.

c. La distance de $v \in \mathbb{R}^n$ à H vaut $|\langle u, v\rangle|$.

d. La matrice dans la base canonique de la projection orthogonale sur H vaut $I_n - \frac{1}{n} UU^\top$ où U est la matrice colonne de composantes égales à 1.

2. Exercices élémentaires

3 — *Étude d'une application bilinéaire symétrique*

Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $(f, g) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$, on pose $\langle f, g\rangle := \displaystyle\int_0^T fg$.

1. Vérifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une forme bilinéaire positive sur $E := \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

2. Est-ce un produit scalaire sur E ?

4 — *Quelques classiques classiques*

On pose $E := \mathbb{R}_3[X]$ et $\langle P, Q\rangle := \displaystyle\int_{-1}^1 PQ$ pour $(P, Q) \in E^2$.

1. Justifier que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire sur E.

2. Soit $F := \left\{P \in E \,;\, \langle X^2 - 1, P'\rangle = \langle X, P\rangle\right\}$. Déterminer un polynôme Γ tel que $F = (\operatorname{Vect}\Gamma)^\perp$.

3. On pose $Q := 1 + X + X^2 + X^3$. Déterminer $d(Q, F)$.

5 — *Un projeté orthogonal*

On considère $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'espace euclidien des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels muni du produit scalaire canonique défini pour A et B matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par $\langle A|B\rangle = \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$.

1. Calculer $\langle A|A'\rangle$ pour $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{pmatrix}$.

2. On note T le sous-espace vectoriel formé des matrices triangulaires supérieures de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donner, pour le produit scalaire canonique, une base orthonormée de T et de $T^\perp$.

3. Calculer la projeté orthogonal de M sur T ainsi que la distance δ de M à T pour $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

6 — *Polynômes de Tchebychev*

On note $E := \mathbb{R}[X]$ et, pour $(P, Q) \in E^2$, $\langle P, Q\rangle := \displaystyle\int_0^\pi P(\cos t)\, Q(\cos t)\, dt$.

1. Démontrer que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On admet l'existence de $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]^{\mathbb{N}}$ tel que $\forall (n,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R},\ \cos(nt) = \mathrm{T}_n(\cos t)$.

   Démontrer que $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de E.

7 — *Étude d'un produit scalaire*

On pose $\forall (f,g)\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}),\ \langle f,g\rangle := \int_0^1 f'g' + f(0)g(1) + f(1)g(0)$.

1. Soit $f : [0,1]\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Justifier que $\big(f(1)-f(0)\big)^2 \leqslant \int_0^1 (f')^2$.
2. En déduire que $(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle$ un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

8 — *Une symétrie orthogonale*

On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique. Soit F le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ défini par les équations $x+y+z+t=0$ et $x+2y+3z+4t=0$. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

9 — *Composée de deux projections orthogonales*

Soit p et q des projecteurs orthogonaux d'un espace euclidien E. Montrer que $p\circ q = 0 \iff q\circ p = 0$.

3. Exercices classiques plus techniques

10 — *Linéarité et symétrie*

Soit E un espace préhilbertien réel et $u : \mathrm{E}\to\mathrm{E}$ tels que $\forall (x,y)\in\mathrm{E}^2,\ \big\langle u(x), y\big\rangle = \big\langle x, u(y)\big\rangle$.

1. Soit $(x,y,z)\in\mathrm{E}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Simplifier $\langle\delta, z\rangle$ où $\delta := u(x+\lambda y) - u(x) - \lambda u(y)$.
2. En déduire que u est linéaire.

11 — *Un calcul de distance*

On note $\mathrm{E} = \mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$ et on pose

$$\forall (\mathrm{P},\mathrm{Q})\in\mathrm{E}^2,\ \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle = \frac{1}{2}\int_{-1}^1 \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t$$

Pour $i\in[\![0,3]\!]$, on note $\mathrm{P}_i = \mathrm{X}^i$.

1. Montrer que $\langle\,,\rangle$ définit un produit scalaire.
2. Déterminer, par le procédé de Schmidt, une base orthonormée $(\mathrm{Q}_0,\mathrm{Q}_1,\mathrm{Q}_2)$ de $\mathrm{F} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ à partir de la famille $(\mathrm{P}_0,\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2)$.
3. Calculer la projection orthogonale de P_3 sur F.
4. Calculer la distance de P_3 à F.

12 Distance dans le cadre des matrices f

On munit $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire défini par $\langle A|B\rangle = \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$. On note $\|\cdot\|$ la norme associée.

1. Montrer que la base canonique $\left(E_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthonormée.
2. Montrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})^\perp = \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Établir que pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ on a $\operatorname{tr}(A) \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr}\left(A^T A\right)}$ et préciser les cas d'égalité.
4. Dans cette question $n = 3$. Calculer $\inf\limits_{M\in E} \|M\|$ où $E := \left\{K + A\,;\, A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})\right\}$ et $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

13 Symétries orthogonales ff

Soit E un espace euclidien, A et B deux sous-espaces orthogonaux de E, i.e. vérifiant $A \subset B^\perp$. On note s_A et s_B les symétries orthogonales par rapport à A et B.

1. Montrer que s_A et s_B commutent.
2. Justifier que $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$.
3. En déduire que $s_A \circ s_B$ est la symétrie orthogonale par rapport à $(A+B)^\perp$.

4. Indications

1

Au 15., on pourra s'intéressez au signe de $\|x+\mu y\|^2 - \|x\|^2$ au voisinage de 0.

2

Au 4., on pensera à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3

Ce n'est pas un produit scalaire.

4

On trouve $d(\mathrm{Q},\mathrm{F}) = \dfrac{16}{15}\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

5

La base canonique est orthonormée pour ce produit scalaire.

6

Effectuer un changement de variable. au 2.

7

Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale.

8

Commencer par calculer la projection orthogonale π sur F.

9

Traduire $p \circ q = 0$ par une inclusion. Que vaut $(\mathrm{Ker}\, p)^{\perp}$ pour un projecteur orthogonal ?

10

On trouve 0.

11

On trouve $d(\mathrm{P}_3,\mathrm{F}) = \dfrac{2}{5\sqrt{7}}$.

12

Beaucoup de réponses se trouvent dans le cours...

13

Utiliser les projections orthogonales sur A et B.

5. Solutions

1

1. Vrai car $\langle x-y, x+y\rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.
2. Faux. Par exemple, la fonction u nulle sur $[0,1]$ et qui vaut x sur $[-1,0]$ est continue, non nulle et $\int_0^1 u^2 = 0$. L'application donnée ne vérifie donc pas l'axiome de définie positivité.
3. Faux : cex de la famille nulle. En revanche, d'après le cours, toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.
4. Faux. Cex $F=\{0\}$ et $G=E$ pour lesquels on a $F^\perp = E$ et $G^\perp=\{0\}$. En revanche, ce qui est vrai est $F\subset G \implies G^\perp \subset F^\perp$.
5. Faux. Cex $p=1$ et $e_1\neq 0$ non unitaire. La projection orthogonale du vecteur e_1 sur F vaut e_1 et $e_1 \neq \|e_1\|^2 e_1$. La formule est vraie sous l'hypothèse supplémentaire que $(e_1,\dots,e_p)$est une bon de F.
6. Vrai. Par la définition de l'énoncé, on a directement $F=\mathrm{Vect}(u)^\perp$ donc $F^\perp = \mathrm{Vect}(u)$ car $\mathbb{R}^4$ est de dimension finie.
7. Faux. On a $\langle \phi(u),\phi(u)\rangle = 0 \iff \phi(u)=0$, ie $u\in \mathrm{Ker}\,\phi$. Ainsi, si ϕ n'est pas injective, alors l'expression donnée ne définit pas un produit scalaire.
8. Vrai. En développant la norme de $x+y$, l'inégalité est équivalente à
$$2\langle x,y\rangle \leqslant 1+\|x\|^2\|y\|^2$$
Cette inégalité est vraie car, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$2\langle x,y\rangle \leqslant 2\|x\|\,\|y\| \leqslant 1+\|x\|^2\|y\|^2$$
La dernière majoration venant classiquement de $(\|x\|-\|y\|)^2 \geqslant 0$.
9. Faux. D'après le cours, l'orthogonal d'une partie quelconque est un sev.
10. Vrai. Soit $\mathscr{B}$ une base de $\mathbb{R}^n$. En posant $\langle x,y\rangle = X^\top Y$ où X, Y désignent les coordonnées de x, y dans $\mathscr{B}$, on définit clairement un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ tel que $\mathscr{B}$ soit orthonormée.
11. Faux. Cex : $E=\mathbb{R}[X]$ muni de $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 PQ$ et $F=\{P\in E\,;\,P(0)=0\}$ (cf. le cours pour le détail des justifications). En revanche, le résultat est vrai en dimension finie.
12. Vrai. Si $F^\perp = E$, alors $F\subset (F^\perp)^\perp = \{0\}$ d'où $F=\{0\}$.
13. Vrai par l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$:
$$\left(\sum_{k=1}^n \underbrace{\sqrt{x_k}\frac{1}{\sqrt{x_k}}}_{=1}\right)^2 \leqslant \left(\underbrace{\sum_{k=1}^n x_k}_{=1}\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right)$$
14. Vrai. Notons $[a_1,\dots,a_n]$ la matrice de ϕ dans les bases canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}$. Pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)$, on a
$$\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i = \langle a,x\rangle$$
où $a=(a_1,\dots,a_n)$.
15. Vrai.
   - $\Rrightarrow$ Supposons $x\perp y$. Pour tout $\mu\in\mathbb{R}$, on a $\|x+\mu y\|^2 - \|x\|^2 = \mu^2\|y\|^2 \geqslant 0$.
   - $\Lleftarrow$ Réciproquement, supposons que $\forall \mu\in\mathbb{R}$, $\|x+\mu y\| \geqslant \|x\|$. On a alors $\forall\mu\in\mathbb{R}$,
   $$\|x+\mu y\|^2 - \|x\|^2 = \mu^2\|y\|^2 + 2\mu\langle x,y\rangle \geqslant 0$$
   Supposons $\langle x,y\rangle \neq 0$, on a alors
   $$\|x+\mu y\|^2 - \|x\|^2 \underset{\mu\to 0}{\sim} 2\mu\langle x,y\rangle$$
   ce qui est absurde car $\mu \mapsto 2\mu\langle x,y\rangle$ change de signe au voisinage de 0.

16. Vrai. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour u et v unitaires :

$$-1 = -\|u\|\,\|v\| \leqslant \langle u, v\rangle$$

et $\langle u, -u\rangle = -\|u\|^2 = -1$ ce qui permet de conclure puisque $\|-u\| = 1$.

17. Faux. On a

$$\|u_1 + u_2 + u_3\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \|u_i\|^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} \langle u_i, u_j\rangle = 3 + 2\times 3 \times \frac{-1}{2} = 0$$

Ainsi $u_1 + u_2 + u_3 = 0$.

18. Vrai. On a, en notant δ le membre de gauche de l'égalité :

$$\delta = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \big(\|x_i\|^2 + \|x_j\|^2 - 2\langle x_i, x_j\rangle\big) = 2n\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 - 2\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \langle x_i, x_j\rangle = 2n\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2 - 2\left\|\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2$$

Enseignements à tirer de cet exercice

- Pour généraliser le 5. : l'ensemble des solutions d'un système d'équations linéaires homogène d'inconnue dans $\mathbb{R}^n$ peut s'interpréter comme un orthogonal.
- Autour des 11. et 12. : attention, pour un sev F d'un espace de dimension infinie, $(\mathrm{F}^\perp)^\perp$ n'est pas toujours égal à F. Seule l'inclusion $\mathrm{F} \subset (\mathrm{F}^\perp)^\perp$ est universelle.
- On retiendra du 15. que des inégalités du type $\|u+v\| \geqslant \|a+b\|$ peuvent s'aborder avec profit en les élevant au carré afin de faire apparaître le produit scalaire.
- Au 17., on utilise une technique souvent intéressante dans les espaces préhilbertiens : pour montrer qu'un vecteur x est nul, on calcule sa norme.

2

1. Tout est vrai sauf b. et c.

- Soit $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. On a $f(e_j) = \sum_{\ell=1}^{n} \mathrm{M}_{\ell,j} e_\ell$ d'où, puisque $(e_1, \dots, e_n)$ est une bon :

  $$\langle f(e_j), e_i\rangle = \sum_{\ell=1}^{n} \mathrm{M}_{\ell,j}\langle e_\ell, e_i\rangle = \mathrm{M}_{i,j}$$

  On en déduit que a. est vrai et b. est faux.
- Par le a., on a $\sum_{i=1}^{n} \langle f(e_i), e_i\rangle = \mathrm{tr}\,\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \mathrm{tr}\, f$. D'où le c. est faux.
- Supposons que f soit une projection orthogonale et fixons $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$. Décomposons e_i et e_j dans la somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$: $e_i = x_i + y_i$ et $e_j = x_j + y_j$. On a

  $$\mathrm{M}_{i,j} = \langle f(e_j), e_i\rangle = \langle f(x_j) + f(y_j), x_i + y_i\rangle = \langle x_j, x_i + y_i\rangle = \langle x_j, x_i\rangle + \langle x_j, y_i\rangle = \langle x_j, x_i\rangle$$

  Ainsi, par symétrie, $\mathrm{M}_{i,j} = \langle x_j, x_i\rangle = \langle x_i, x_j\rangle = \mathrm{M}_{j,i}$. On en déduit que d. est vraie.
- Supposons que f soit un projecteur. En choisissant $(u_1, \dots, u_n)$ une bon adaptée à la somme orthogonale directe $\mathrm{E} = \mathrm{Im}\, f \oplus \mathrm{Ker}\, f$, on a par ce qui précède :

  $$\sum_{i=1}^{n} \langle f(e_i), e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle f(u_i), u_i\rangle = \sum_{i=1}^{r} \langle u_i, u_i\rangle = r$$

  où r est le rang de f. Ainsi e. est vraie.

2. Tout est vrai.

- ⇛ Comme $\mathscr{B}$ est orthonormée pour ϕ si et seulement si, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $\phi(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$, le a. est vrai.
- ⇛ Avec les notations du b., on a

$$\phi(x,y) = \phi\left(\sum_{i=1}^n X_i e_i, \sum_{i=1}^n Y_i e_j\right) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} X_i Y_j \phi(e_i,e_j) = \sum_{i=1}^n X_i \left(\sum_{j=1}^n \phi(e_i,e_j) Y_j\right) = \sum_{i=1}^n X_i \left(M_{\mathscr{B}}^{\phi} Y\right)_{i,1} = X^\top M_{\mathscr{B}}^{\phi} Y$$

d'où le b.

- ⇛ Notons $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$. On a, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$:

$$\phi(f_i,f_j) = \phi\left(\sum_{k=1}^n P_{k,i} e_k, \sum_{\ell=1}^n P_{\ell,i} e_\ell\right) = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} P_{k,i} P_{\ell,j} \phi(e_k,e_\ell) = \sum_{k=1}^n \sum_{\ell=1}^n (P^\top)_{i,k} \phi(e_k,e_\ell) P_{\ell,,j} = \left(P^\top M_{\mathscr{B}}^{\phi} P\right)_{i,j}$$

ainsi $M_{\mathscr{C}}^{\phi} = P^\top M_{\mathscr{B}}^{\phi} P$.

3. Tout est vrai sauf a.

- ⇛ Comme $O_n(\mathbb{R})$ ne contient pas la matrice nulle, ce n'est pas un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
- ⇛ Il est clair que $M \in O_n(\mathbb{R})$ si et seulement si M est inversible et $M^{-1} = M^\top$. Ainsi $O_n(\mathbb{R}) \subset GL_n(\mathbb{R})$. Soit M_1 et M_2 dans $O_n(\mathbb{R})$. On a

$$(M_1M_2)^\top = M_2^\top M_1^\top = M_2^{-1}M_1^{-1} = (M_1M_2)^{-1} \quad \text{et} \quad \left(M_1^{-1}\right)^\top = \left(M_1^\top\right)^\top = M_1 = \left(M_1^{-1}\right)^{-1}$$

ainsi $M_1M_2 \in O_n(\mathbb{R})$ et $M_1^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. Ceci démontre le b.

- ⇛ Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$, $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ et $P_1, \dots, P_n$ les colonnes de P. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$\left(P^\top P\right)_{i,j} = P_i^\top P_j = \langle e'_i, e'_j\rangle \text{ (car } \mathscr{B} \text{ bon) } = \delta_{i,j} \text{ (car } \mathscr{B}' \text{ bon)}$$

Ainsi $P^\top P = I_n$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. Ainsi, la propriété c. est vraie.

- ⇛ Fixons $\mathscr{B}$ une bon de $\mathbb{R}^n$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. Notons $P_1, \dots, P_n$ les colonnes de P. Soit $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ l'unique famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, les coordonnées de e'_j dans $\mathscr{B}$ sont données par P_j. Comme $\mathscr{B}$ est une bon, on a $\langle e'_i, e'_j\rangle = P_i^\top P_j = \delta_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ car $P^\top P = I_n$. Ainsi $\mathscr{B}'$ est une bon de $\mathbb{R}^n$, et la propriété d. est vraie.

4. Seuls b. et c. sont vraies.

- ⇛ Soit $X = (x_1, \dots, x_n) \in H$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a $\left(\sum_{i=1}^n 1 \times x_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n 1\right)\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)$, d'où $nf(X) \geqslant 1$. Pour $u = (1/n, \dots, 1/n)$, on a $u \in H$ et $f(u) = 1/n$ ainsi le b. est vrai et a. est faux.
- ⇛ Pour tout $m \in \mathbb{N}$, posons $u_m = (m, 1-m, 0, \dots, 0)$. On a $u_m \in H$ pour tout entier naturel n, et $f(u_m) = m^2 + (m-1)^2 \xrightarrow[m\to+\infty]{} +\infty$. On en déduit que f n'est pas majorée et donc que c. est vraie.

5. Tout est vrai sauf c.

- ⇛ H est définie par un système linéaire homogène à une équation non triviale donc H est un sev de $\mathbb{R}^n$ de dimension $n-1$.
- ⇛ Comme $\langle x, u\rangle = x_1 + \cdots + x_n$ pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$, on a $H = \{u\}^\perp = \mathrm{Vect}(u)^\perp$. Puisque $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie, on a $H^\perp = \mathrm{Vect}(u)$.
- ⇛ Notons π la projection orthogonale sur $H^\perp = \mathrm{Vect}(u)$. On a $d(v,H) = \|\pi(v)\|$ par le cours. Or $\pi(v) = \langle v, u'\rangle u'$ où $u' = u/\|u\|$. Ainsi, $d(v,H) = |\langle v, u'\rangle| = \frac{|\langle v,u\rangle|}{\|u\|}$. Ainsi la proposition c. est fausse.
- ⇛ Notons les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ en colonne. On a $\pi(v) = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|^2} u = \frac{1}{n}(u^\top v)u = \frac{1}{n}u(u^\top v) = \frac{1}{n}(uu^\top)v$. Ainsi $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\pi) = \frac{uu^\top}{n}$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Ainsi, puisuqe la projection orthognale sur H est $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} - \pi$, sa matrice dans la base canonique vaut $I_n - \frac{uu^\top}{n}$. La proposition d. est donc vraie.

Enseignements à tirer de cet exercice

⇛ Au 4., il faut immédiatement penser à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

⇛ Attention au 5. : la formule de projection $\pi(v) = \langle v, u\rangle u$ est valable si u est unitaire.

3

1. Cf. le cours.
2. La fonction f définie par $f(t) = t$ pour $t \leqslant 0$ et $f(t) = 0$ pour $t > 0$, appartient bien à $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, est non nulle et vérifie $\langle f, f\rangle = 0$. La forme bilinéaire $\langle,\rangle$ n'est donc pas définie.

4

1. Cf. le cours.
2. Soit $F := \left\{P \in E ; \langle X^2-1, P'\rangle = \langle X, P\rangle\right\}$. Déterminer un polynôme Γ tel que $F = (\operatorname{Vect}\Gamma)^\perp$. Soit $P \in \mathbb{R}_3[X]$. Par une intégration par parties élémentaires, on obtient :
$$\langle X^2-1, P'\rangle = \int_0^1 \left(t^2-1\right)P'(t)\mathrm{d}t = \left[\left(t^2-1\right)P(t)\right]_0^1 - \int_0^1 2tP(t)\mathrm{d}t = \langle -2X, P\rangle$$
Ainsi $F := \{P \in E ; \langle X, P\rangle = 0\} = \operatorname{Vect}(X)^\perp$.
3. On a $d(Q,F) = \|\pi(Q)\|$ où π désigne la projection orthogonale sur $F^\perp = \operatorname{Vect}(X)$. On a $\|X| = \sqrt{\frac{2}{3}}$ d'où
$$d(Q,F) = \frac{|\langle Q, X\rangle|}{\|X\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left|\int_{-1}^1 \left(t+t^2+t^3+t^4\right)\mathrm{d}t\right| = \frac{16}{15}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

5

1. On a directement $\langle A|A'\rangle = aa' + bb' + cc' + dd'$.
2. Notons $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$ la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. On a clairement que cette base est orthonormale pour le produit scalaire $\langle\cdot|\cdot\rangle$. De plus, $T = \operatorname{Vect}(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,2})$. On a donc $T^\perp = \operatorname{Vect}(E_{2,1})$.
3. Notons π_T la projection orthogonale sur T. On a $\pi_T(M) = \left(\begin{smallmatrix}1 & 2\\ 0 & 4\end{smallmatrix}\right)$ et $\delta := d(M,T) = \|M - \pi_T(M)\| = \left\|\left(\begin{smallmatrix}0 & 0\\ 3 & 0\end{smallmatrix}\right)\right\| = 3$.

6

1. ⇛ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est clairement bilinéaire par linéarité de l'intégrale.

   ⇛ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est clairement symétrique.

   ⇛ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est positive par positivité de l'intégrale.

   ⇛ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\langle P, P\rangle = \int_0^\pi P(\cos t)^2\mathrm{d}t = 0$. Comme $(P\circ\cos)^2$ est continue et positive sur $[0,\pi]$, on en déduit que $\forall t \in [0,\pi]$, $P(\cos t) = 0$. Ainsi, par surjectivité de $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$, tous les réels de $[-1,1]$ sont racines de P, ainsi P est nul car admet une infinité de racines.

   Ainsi $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. Soit $(n,m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \neq m$. On a
$$\begin{aligned}\langle T_n, T_m\rangle &= \int_0^\pi T_n(\cos t)T_m(\cos t)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \cos(nt)\cos(mt)\mathrm{d}t = \int_0^\pi \frac{\cos(nt+mt)+\cos(nt-mt)}{2}\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{\sin(nt+mt)}{n+m} + \frac{\sin(nt-mt)}{n-m}\right]_0^\pi = 0\end{aligned}$$
Ainsi $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale pour ce produit scalaire.

7

1. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left(f(1)-f(0)\right)^2=\left(\int_0^1 f'\right)^2 \leqslant \int_0^1 (f')^2$.

2. L'application $(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle$ est clairement bilinéaire par linéarité de l'intégrale et symétrique. Soit $f:[0,1]$ de classe $\mathscr{C}^1$. On
$$\langle f,f\rangle=\int_0^1 (f')^2+2f(0)f(1)\geqslant (f(1)-f(0)))^2+2f(0)f(1)=f(0)^2+f(1)^2\geqslant 0$$
Supposons à présent que $\langle f,f\rangle=0$. On déduit des inégalité précédentes que $f(0)^2+f(1)^2=0$ d'où $f(0)=f(1)=0$ puis que $\int_0^1(f')^2=0$. Comme $(f')^2$ est continue et positive, on en déduit que $f'=0$ donc que f est constante et finalement que f est nulle. L'application $(f,g)\mapsto\langle f,g\rangle$ définit bien un produit scalaire sur $\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$.

8

Notons π la projection orthogonale sur F et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Nous recherchons la symétrie $s=2\pi-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^4}$. On trouve facilement que F est un plan de bon (U,V) où $\mathrm{U}=\frac{1}{4}[1,-1,-1,1]^{\mathrm{T}}$ et $\mathrm{V}=\frac{1}{\sqrt{20}}[-1,3,-3,1]^{\mathrm{T}}$. Pour tout $\mathrm{X}\in\mathbb{R}^4$, $\pi(\mathrm{X})=\langle \mathrm{X},\mathrm{U}\rangle\mathrm{U}+\langle \mathrm{X},\mathrm{V}\rangle\mathrm{V}=(\mathrm{UU}^{\mathrm{T}}+\mathrm{VV}^{\mathrm{T}})\mathrm{X}$. On en déduit facilement que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\pi)=\mathrm{UU}^{\mathrm{T}}+\mathrm{VV}^{\mathrm{T}}$ d'où
$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(s)=2(\mathrm{UU}^{\mathrm{T}}+\mathrm{VV}^{\mathrm{T}})-\mathrm{I}_4=\begin{pmatrix}\frac{8}{5}&-\frac{4}{5}&-\frac{1}{5}&\frac{2}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{12}{5}&-\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}\\-\frac{1}{5}&-\frac{2}{5}&\frac{12}{5}&-\frac{4}{5}\\\frac{2}{5}&-\frac{1}{5}&-\frac{4}{5}&\frac{8}{5}\end{pmatrix}$$

9

Supposons que $p\circ q=0$. On a alors $\mathrm{Im}\, q\subset\mathrm{Ker}\, p$. Ainsi, $(\mathrm{Ker}\, p)^\perp\subset(\mathrm{Im}\, q)^\perp$. Comme ces projecteurs sont orthogonaux, on a $\mathrm{Im}\, p\subset\mathrm{Ker}\, q$, d'où $q\circ p=0$. On en déduit l'équivalence par symétrie.

Commentaire

Il faut penser à traduire $f\circ g=0$ par une inclusion puis exploiter l'orthogonalité.

10

1. Soit $(x,y,z)\in\mathrm{E}^3$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. Simplifier $\langle\delta\,,\,z\rangle$ où $\delta:=u(x+\lambda y)-u(x)-\lambda u(y)$. On a
$$\begin{aligned}\langle\delta\,,\,z\rangle&=\left\langle u(x+\lambda y)-u(x)-\lambda u(y)\,,\,z\right\rangle=\left\langle u(x+\lambda y)\,,\,z\right\rangle-\langle u(x)\,,\,z\rangle-\lambda\left\langle u(y)\,,\,z\right\rangle\\&=\left\langle x+\lambda y\,,\,u(z)\right\rangle-\langle x\,,\,u(z)\rangle-\lambda\left\langle y\,,\,u(z)\right\rangle=\langle x+\lambda y-x-\lambda y\,,\,z\rangle=0\end{aligned}$$

2. On en déduit que $\delta\in\mathrm{E}^\perp=\{0\}$ d'où $\delta=0$ et u est linéaire.

11

1. La symétrie, la bilinéarité, et la positivité sont vérifiées d'après les propriétés sur les intégrales. Pour le caractère défini, $\int_{-1}^1 \mathrm{P}^2=0$, implique que la fonction associée à P est nulle sur $[-1,1]$ (car P^2 est positive et continue sur $[-1,1]$) donc $\mathrm{P}=0$ car P est un polynôme admettant une infinité de racines.

2. $\Rrightarrow$ On pose $\mathrm{R}_0=\mathrm{P}_0$, $\|\mathrm{R}_0\|=1$, donc $\mathrm{Q}_0=1$ convient.

   $\Rrightarrow$ On cherche R_1 orthogonale à Q_0 sous la forme $\mathrm{R}_1=\mathrm{P}_1+\lambda_0\mathrm{Q}_0$. L'orthogonalité de R_1 et Q_0 est équivalente à $\lambda_0=-\langle\mathrm{P}_1,\mathrm{Q}_0\rangle$, ie $\lambda_0=0$. D'où $\mathrm{R}_1=\mathrm{P}_1$, et $\|\mathrm{R}_1\|=1/\sqrt{3}$. Ainsi, $\mathrm{Q}_1=\sqrt{3}\mathrm{X}$ convient.

- ⇛ On cherche R_2 orthogonale à Q_0 et Q_1, sous la forme $R_2 = P_2 + \lambda_0 Q_0 + \lambda_1 Q_1$. L'orthogonalité de R_1 avec Q_0 et Q_1 est équivalente à $\lambda_0 = -\langle P_2, Q_0\rangle$ et $\lambda_1 = -\langle P_2, Q_1\rangle$, d'où $\lambda_0 = -1/3$ et $\lambda_1 = 0$. Or $\|R_2\| = 2/(3\sqrt{5})$, ainsi $Q_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}(3X^2-1)$ convient.

3. Le projeté orthogonal de P_3 sur F est :

$$R = \langle Q_0, P_3\rangle Q_0 + \langle Q_1, P_3\rangle Q_1 + \langle Q_2, P_3\rangle Q_2$$

soit, après calculs, $R = \dfrac{3}{5}X$.

4. La distance de P_3 à F est alors $d = \|P_3 - R\| = \dfrac{2}{5\sqrt{7}}$.

12

1. Soit $(i,j,k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$. On a

$$\langle E_{i,j} | E_{k,\ell}\rangle = \operatorname{tr}\left(E_{i,j}^T E_{k,\ell}\right) = \operatorname{tr}\left(E_{j,i} E_{k,\ell}\right) = \delta_{i,k} \operatorname{tr} E_{j,\ell} = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}$$

Ce produit scalaire est donc nul si $(i,j) \neq (k,\ell)$ et vaut 1 sinon : la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est donc orthonormée.

2. On sait que la famille $\left(E_{i,j} + E_{j,i}\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est génératrice de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Ainsi

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^\top &\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle M, E_{i,j} + E_{j,i}\rangle = 0 \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \langle M, E_{i,j}\rangle = -\langle M, E_{j,i}\rangle \\ &\iff \forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ M_{i,j} = -M_{j,i} \end{aligned}$$

par question précédente (les coordonnées dans une bon se calculent au moyen du produit scalaire).

3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit $\langle I_n | A\rangle \leqslant \|I_n\|\,\|A\|$, ie $\operatorname{tr}(A) \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{tr}\left(A^T A\right)}$. D'après le cours, il y a égalité *si et seulement si* $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $A = \lambda I_n$.

4. D'après le théorème de meilleur approximation au sens des moindres carrés, on a

$$\inf_{M \in E} \|M\| = \inf_{A \in \mathscr{A}_3(\mathbb{R})} \|K - A\| = \|\pi_{\mathscr{S}_3(\mathbb{R})}(K)\|$$

où $\pi_{\mathscr{S}_3(\mathbb{R})}$ est la projection orthogonale sur $\mathscr{S}_3(\mathbb{R})$. Comme $\pi_{\mathscr{S}_3(\mathbb{R})}(K) = \dfrac{K^T + K}{2}$, on obtient :

$$\inf_{M \in E} \|M\| = \sqrt{\frac{49}{2}}$$

Commentaire

Il faut savoir retrouver rapidement les projections associées à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$:

$$X = \underbrace{\frac{X^T + X}{2}}_{\in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{X - X^T}{2}}_{\in \mathscr{A}_n(\mathbb{R})}$$

13

Notons p_A et p_B les projections orthogonales sur A et B.

1. On a $s_A = 2p_A - \mathrm{id}_E$ et $s_A = 2p_B - \mathrm{id}_E$. Il suffit donc de montrer que p_A et p_B commutent. Comme $\mathrm{Im}\, p_A = A \subset B^\perp = \mathrm{Ker}\, p_B$ et $\mathrm{Im}\, p_B = B \subset A^\perp = \mathrm{Ker}\, p_A$, on a $p_A \circ p_B = p_B \circ p_A = 0$.
2. On $A^\perp \cap B^\perp \subset (A+B)^\perp$ par linéarité à gauche du produit scalaire. De plus, $A \subset A+B$ donc $(A+B)^\perp \subset A^\perp$. De même $(A+B)^\perp \subset B^\perp$ donc $(A+B)^\perp \subset A^\perp \cap B^\perp$.
3. Posons $s := s_A \circ s_B$. Soit $x \in E$ et $(x_A, x_B, x_\perp) \in A \times B \times (A+B)^\perp$ tel que $x = x_A + x_B + x_\perp$. On a

$$s(x) = s_B(s_A(x_A)) + s_A(s_B(x_B)) + s_A(s_B(x_\perp)) = s_B(x_A) + s_A(x_B) - s_A(x_\perp) = -x_A - x_B + x_\perp$$

car $x_\perp \in (A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$, $A \subset B^\perp$ et $B \subset A^\perp$. Ainsi s est la symétrie orthogonale par rapport à $(A+B)^\perp$.