AN 7 | Fonctions convexes

La convexité est une grande pourvoyeuse d'inégalités.

Fresque de la table de la sagesse, monastère de Gracanica (Kosovo)

1. Quizz

1 — *Vrai ou faux ? f*

1. Il existe une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe et strictement décroissante.
2. Pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$, $\tan x\leqslant\frac{4}{\pi}x\cdot$
3. La fonction cosinus est concave sur $[0,\pi]$.
4. Pour tous réels strictement positifs x, y, z et t, on a $xyzt\leqslant\dfrac{(x+y+z+t)^4}{4^4}\cdot$
5. Pour $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ convexe et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ concave, $f-g$ est convexe.
6. Une fonction convexe $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ est nécessairement minorée.
7. La fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $x\mapsto|x+1|+|x-1|$ est convexe.
8. Une fonction convexe $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ convexe est nécessairement continue en tout point de $[0,1]$.
9. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ deux fois dérivable telle que $f''\geqslant 0$ et $f(0)=0$. Pour tout réel x, on a $xf'(x)\geqslant f(x)$.
10. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. La fonction f est convexe *si et seulement si* $f\big|_{\mathbb{R}_+}$ et $f\big|_{\mathbb{R}_-}$ sont convexes.
11. La fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $x\mapsto|x|^3$ est convexe.

2. Exercices élémentaires

2 — *Fonctions convexes et concaves*

Soit I un vrai intervalle de $\mathbb{R}$. Déterminer les fonctions $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ convexes et concaves.

3 — *Fonctions convexes positives s'annulant deux fois*

Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ convexe positive vérifiant $f(a)=f(b)=0$. Montrer que f est nulle.

4 — *Moyennes arithmétiques et harmoniques*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $u_1,\ldots,u_n$ des réels strictement positifs. En utilisant la convexité, établir que

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_1}+\cdots+\frac{1}{u_n}\right)\geqslant\frac{n}{u_1+\cdots+u_n}$$

5 — *Figures imposées*

Démontrer par la convexité que, pour tout $\theta>0$ et tout $x\in\,]0,\theta[$, on a $\frac{\ln(1+\theta)}{\theta}x<\ln(1+x)<x$.

6 — *Concavité de* $\ln\circ\ln$ *et applications* *f*

1. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et concave. Démontrer que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, $f(k+1)-f(k)\leqslant f'(k)$
2. Démontrer que la fonction $x\longmapsto \ln\ln x$ est concave sur son intervalle de définition.
3. Démontrer que la suite de terme général $u_n:=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\ln k}$ tend vers $+\infty$.
4. Démontrer que $\ln\left(\frac{a+b}{2}\right)\geqslant\sqrt{\ln(a)\ln(b)}$ pour tous réels a et b strictement supérieurs à 1.

7 — *Un encadrement*

Montrer que pour $x\in[0,1]$, on a $1+x\leqslant e^x\leqslant 1+x(e-1)$.

8 — *Variations arithmético-géométriques* *f*

1. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}_+^n$, on a $\sqrt[n]{x_1\dots x_n}\leqslant\dfrac{x_1+\dots+x_n}{n}$.
2. En déduire que $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}_+^3,\ a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.
3. Prouver que $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}_+^3,\ (a+b+c)^3\geqslant 27abc$.
4. Soit $n\geqslant 1$. Établir que $\sqrt[n]{n!}\leqslant\dfrac{n+1}{2}$.

9 — *Une inégalité de convexité* *f*

Montrer que, pour tous $x\in[-1,1]$ et $\lambda\in\mathbb{R}$, $e^{\lambda x}\leqslant\cosh\lambda+x\sinh\lambda$.

3. Exercices classiques plus techniques

10 — *Puissances* *ff*

Soit a et b deux réels positifs tels que $a+b=1$. Établir que $\forall(x,y)\in(\mathbb{R}_+)^2,\ 1+x^ay^b\leqslant(1+x)^a(1+y)^b$.

11 — *Sous-additivité et concavité* *ff*

Soit $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ une fonction concave positive.

1. Montrer que $\dfrac{f(x+y)}{x+y}\leqslant\dfrac{f(x)}{x}$ pour tous réels x et y strictement positifs.
2. En déduire que f est sous-additive, i.e. pour tous réels x et y strictement positifs, $f(x+y)\leqslant f(x)+f(y)$.
3. En déduire que $(x+y)^\alpha\leqslant x^\alpha+y^\alpha$ pour tous réels x et y strictement positif et $\alpha\in[0,1]$.

4. Indications

1

On reconnaîtra l'inégalité AG au 4.

2

Revenir à l'interprétation de la convexité via les cordes.

3

Revenir au propriétés des cordes.

4

Appliquer l'inégalité de Jensen.

5

Il est question de stricte concavité.

6

Il y a du telescopage dans l'air.

7

Utiliser une corde et une tangente.

8

C'est du cours.

9

Utiliser une corde.

10

Passer au logarithme.

11

Au 1., il s'agit de montrer la décroissance de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$. Pour cela, on remarquera que

$$\forall x > 0\,,\ \frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x} + \frac{f(0)}{x}$$

5. Solutions

1

1. Vrai. Par exemple, $f : x \mapsto e^{-x}$ (la convexité de f est assurée car $f'' = f \geqslant 0$).
2. Sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\tan'' x = 2(\tan x)\left(+1 \tan^2 x\right) \geqslant 0$. La tangente est donc convexe sur cet intervalle. Puisque la corde de la tangente aux points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{4}$ est d'équation $y = \frac{4}{\pi}x$, on en déduit que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $\tan x \leqslant \frac{4}{\pi}x$.
3. C'est faux car $\cos'' = -\cos$ n'est pas négative sur $[0, \pi]$.
4. Vrai. C'est un cas particulier de l'inégalité arithmético-géométrique.
5. Vrai car $-g$ est convexe (car f est concave) et donc $f - g$ est convexe en tant que somme de fonctions convexes.
6. C'est faux, la fonction $x \mapsto -x$ est un contre-exemple évident.
7. Vrai. La fonction f est convexe en tant que somme de deux fonctions convexes. Pour $a \in \mathbb{R}$, la convexité de $g : x \mapsto |x - a|$ est facile à justifier via l'inégalité triangulaire :

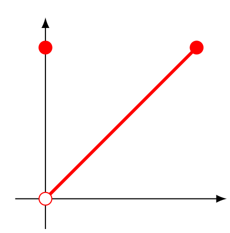
$$\forall (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,1]\ ,\ \left|tx + (1-t)y - a\right| = \left|t(x-a) + (1-t)(y-a)\right| \leqslant \underbrace{\left|t(x-a)\right| + \left|(1-t)(y-a)\right|}_{=t|x-a|+(1-t)|y-a|}$$

8. Faux.

   Voici un contre-exemple :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ x & \text{si } x \in]0,1] \end{cases}$$

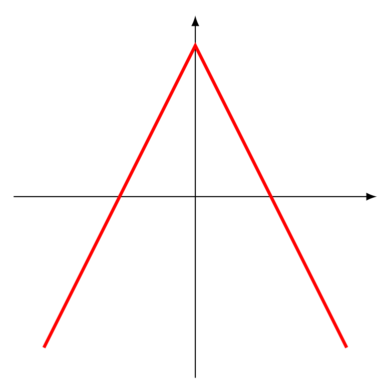
   Cette fonction est bien convexe : toutes ses cordes sont situées au-dessus de sa courbe.



9. Vrai. La tangente au point x admet pour équation $\mathrm{Y} = f(x) + f'(x)(\mathrm{X} - x)$. Par convexité de f, on a $f(\mathrm{X}) \leqslant f(x) + f'(x)(\mathrm{X} - x)$ pour tout réel X. En particulier, pour $\mathrm{X} = 0$, on obtient $xf'(x) \geqslant f(x)$.
10. C'est faux. Voici un contre-exemple :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 1 + 2x & \text{si } x < 0 \\ 1 - 2x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   Les fonctions affines de part et d'autre de 0 sont convexes (les fonctions affines sont convexes et concaves) mais le raccord des deux donne une fonction non convexe (la fonction obtenue est ici est par ailleurs concave).

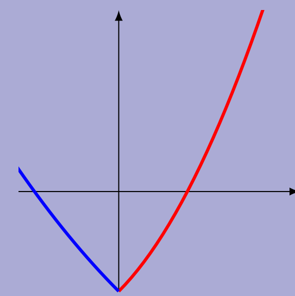


Commentaire

Nous apportons quelques précisions au sujet de la question posée dans ce quizz.

Il est vrai que, si f est convexe, alors ses restrictions à $\mathbb{R}_+$ et à $\mathbb{R}_-$ le sont aussi (comme toute autre restriction à un vrai intervalle de $\mathbb{R}$).

C'est la réciproque qui est fausse. Cependant, un raccord par continuité en 0 tel que la pente p_- en $0-$ et la pente p_+ en $0+$ vérifient $p_- \leqslant p_+$ donnera clairement une fonction convexe (cf. la figure ci-contre).

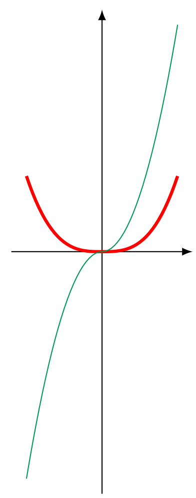


11. Vrai. Il est facile de vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f' : x \longmapsto \begin{cases} -3x^2 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 3x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

La fonction f' étant croissante sur $\mathbb{R}$, f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Voir ci-contre la fonction en rouge et sa dérivée en vert.



Commentaire

La dérivabilité en 0 vient de l'étude du taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(x)}{x} = \text{signe}(x)x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

2

Soit $(a,b) \in \mathrm{I}^2$ tel que $a < b$. La courbe de f sur $[a,b]$ est située au-dessus et au-dessous de la corde joignant les points d'abscisses a et b, elle est donc confondue avec cette corde. On en déduit que f est affine sur $[a,b]$. Comme ceci est vrai pour tous a et b dans I, f est affine sur I.

3

Comme le segment joignant les points de coordonnées $(a,0)$ et $(b,0)$ est une corde du graphe de f, la courbe de f est situé sous l'axe des abscisses par convexité de f. Comme f est positive, on en déduit que f est nulle.

4

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ car deux fois dérivable avec $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ pour tout $x > 0$. On déduit de l'inégalité de Jensen que

$$\underbrace{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{u_1}+\cdots+\frac{1}{u_n}\right)}_{=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(u_i)} \geqslant \underbrace{\frac{n}{u_1+\cdots+u_n}}_{=f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n u_i\right)}$$

5

⇛ La fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ est strictement concave sur $\mathbb{R}_+$. En effet $\forall x > 0$, $f''(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} < 0$.

⇛ Son graphe est donc situé sous ses tangentes et au-dessus de ses cordes. L'équation de la tangente en 0 est $y = f(0) + f'(0)x = x$. Donc $\ln(1+x) < x$ pour tout réel x strictement positif.

⇛ Soit $\theta > 0$. L'équation de la corde joignant les points d'abscisses points 0 et θ est $y = \frac{\ln(1+\theta)}{\theta}\,x$ donc

$$\forall x \in]0,\theta[\,,\ \frac{\ln(1+\theta)}{\theta}\,x < \ln(1+x)$$

6

1. Soit $k \in \mathbb{N}$. La courbe de f est située au-dessous de sa tangente au point d'abscisse k. Ainsi $\forall\ t \in \mathbb{R}$, $f(t) \leqslant f(k) + (t-k)f'(k)$ et donc $f(k+1) - f(k) \leqslant f'(k)$ (pour $t = k+1$).
2. L'expression $f(x) := \log\log x$ est définie pour $x > 1$. Elle est indéfiniment dérivable comme composée de deux fonctions indéfiniment dérivables et, pour tout $x > 1$,
$$f'(x) = \frac{1}{x\ln x} \quad \text{et} \quad f''(x) = \frac{-\ln x - 1}{(x\ln x)^2} < 0$$
donc f est bien une fonction concave.
3. On remarque que, pour tout $n \geqslant 2$,
$$u_n = \sum_{k=2}^n f'(k) \geqslant \sum_{k=2}^n \big(f(k+1) - f(k)\big) \geqslant f(n+1) - f(2)$$
par concavité de f sur $]1,\infty[$ et le 1. Comme $f(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a aussi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
4. Comme f est concave, pour tous réels $a > 1$ et $b > 1$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant \frac{f(a)+f(b)}{2} = \ln\sqrt{\ln a \ln b}$$
On obtient l'inégalité voulue en composant par exp (qui est croissante).

7

L'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ et les deux fonctions affines encadrantes représentent la tangente de cette fonction en $x = 0$ et la corde joignant les points d'abscisses $x = 0$ et $x = 1$.

8

1. La fonction logarithme népérien est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $n \geqslant 2$ et des réels $x_1, \dots, x_n$ strictement positifs, on déduit de l'inégalité de Jensen que :
$$\ln \frac{x_1 \dots + x_n}{n} \geqslant \frac{\ln x_1 + \dots + \ln x_n}{n}$$
i.e. $\ln \dfrac{x_1 \dots + x_n}{n} \geqslant \ln \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}$ d'où le résultat par croissance de la fonction exponentielle.
2. D'après l'inégalité arithmético-géométrique, $\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geqslant \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc$ d'où le résultat en multipliant par trois.
3. D'après l'inégalité arithmético-géométrique, $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc} > 0$ donc, en élevant au cube, $\frac{1}{27}(a+b+c)^3 \geqslant abc$ d'où le résultat en multipliant par 27.
4. D'après l'inégalité arithmético-géométrique
$$\frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{1+\dots+n}{n} \geqslant \sqrt[n]{1\dots n} = \sqrt[n]{n!}$$

9

⇛ Fixons $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $f : x \mapsto e^{\lambda x}$ est convexe (sa dérivée seconde $f'' = \lambda^2 f$ est positive) ainsi sa courbe est située sous la corde joignant ses points d'abscisses -1 et 1.

⇛ Cette corde a pour équation $y = f(-1) + \frac{f(1)-f(-1)}{2}(x+1)$, c'est-à-dire $y = \cosh\lambda + x\sinh\lambda$. On a donc
$$\forall x \in [-1,1]\,,\ e^{\lambda x} \leqslant \cosh\lambda + x\sinh\lambda$$

10

⇛ L'inégalité étant banale pour $x = 0$ ou $y = 0$, on peut supposer que x et y sont strictement positifs. Par stricte croissance du logarithme népérien sur $\mathbb{R}_+^*$, l'inégalité est alors équivalente à
$$\ln\left(1 + e^{a\ln x + b\ln y}\right) \leqslant a\ln\left(1 + e^{\ln x}\right) + b\ln\left(1 + e^{\ln y}\right)$$
Comme $a+b = 1$, on reconnaît une inégalité de convexité sur $\mathbb{R}$ pour la fonction $u \in \mathbb{R} \mapsto \ln\left(1+e^u\right)$.

⇛ On vérifie sans peine que cette fonction est effectivement convexe sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction deux fois dérivable avec
$$\forall u \in \mathbb{R}\,,\ f''(u) = \frac{e^u}{\left(1+e^u\right)^2} > 0$$

11

1. La fonction f étant concave, son taux d'accroissement en 0, $\tau : x \mapsto \frac{f(x)-f(0)}{x}$, est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, puisque $f(0) \geqslant 0$, $x \mapsto \frac{f(0)}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que leur somme est aussi décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$:
$$x \mapsto \frac{f(x)}{x}$$

2. Soit $x > 0$ et $y > 0$. Quitte à permuter x et y, on peut supposer que $x \leqslant y$. On déduit du 1. que

$$f(x+y) \leqslant \frac{x+y}{x} f(x) = f(x) + \frac{f(x)}{x} y \leqslant f(x) + f(y)$$

puisque $\frac{f(x)}{x} \leqslant \frac{f(y)}{y}$.

3. Par le 2., il suffit de justifier que, pour $\alpha \in [0,1]$, la fonction $f : x \mapsto x^{\alpha}$ est concave et positive sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est deux fois dérivable et $f'' : x \mapsto \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$ est négative.