AN 6 | Fonctions dérivables

Le calcul occupe une place importante à égalité avec les applications des théorèmes globaux (Rolle, accroissements finis). Ce chapitre sera illustré par les fonctions trigonométriques réciproques.

Mains en prière, Albrecht Dürer

1. Quizz

1 — *Vrai ou faux ?*

1. Une fonction dérivable sur $[0,1]$ est bornée.
2. Une fonction dérivable à droite sur $\mathbb{R}$ et de dérivée à droite nulle est constante.
3. La fonction $f : x \mapsto x|x|$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
5. Si f' est positive sur un vrai intervalle I, alors f est croissante sur I.
6. Si $f' = 0$ sur $\mathscr{D}_f$, alors f est constante sur $\mathscr{D}_f$.
7. Si f est dérivable et strictement croissante, alors f' est strictement positive.
8. Si f' s'annule en 0, alors f admet un extremum local en 0.
9. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable est paire *si et seulement si* f' est impaire.
10. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable est impaire *si et seulement si* f' est paire.
11. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\left|\arctan x - \arctan y\right| \leqslant |x-y|$.
12. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable et $f'(0) > 0$, alors $\exists \eta > 0 \quad \forall x \in [0, \eta[$, $f(x) \geqslant f(0)$.
13. Pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\arcsin(\sin x) = \pi - x$.
14. Pour tout $x \in [-1,1]$, $\cos(\arccos x) = x$.
15. Pour tout $x \in [-1,1[$, $\arctan x = \dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$.
16. L'ensemble de définition de l'expression $\arcsin\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ est $\mathbb{R}_+$.

2 — *QCM sur la dérivation*

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 2xe^{x^2}$.

   a. f est bijective ;

   b. f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$;

   c. $\left(f^{-1}\right)'(0) = 1$;

   d. f^{-1} est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, avec f' strictement décroissante et $f(0) = 0$.

   a. $\forall x > 0, f(x) \geqslant x f'(x)$;

   b. $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soit $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos(u_n)$ et ℓ l'unique solution de $\ell = \cos \ell$. Vrai ou faux ?

   a. $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [0,1]$;

   b. $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est monotone ;

   c. $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant \sin(1)^n |u_0 - \ell|$;

   d. $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$.

4. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $\exists \ell\in\mathbb{R}, f'(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell$. Vrai ou faux ?

a. $\ell=0 \implies \exists \mathrm{L}\in\mathbb{R},\ f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\mathrm{L}$;

b. $f(x+1)-f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell$;

c. $\ell\neq 0 \implies f$ monotone au vois. de $+\infty$;

d. $\ell>0 \implies f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$;

e. $\ell<0 \implies f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}-\infty$;

5. Soit $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $\exists \ell\in\mathbb{R}, f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ell$. Vrai ou faux ?

a. $f'(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$;

b. $\exists (x_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$,

$$x_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty \quad \text{et} \quad f'(x_n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$$

3 — *QCM sur les fonctions trigonométriques réciproques*

1. Pour tout $x\in[0,1]$, l'expression $\arcsin\sqrt{1-x^2}$ est égale à :

a. $\arcsin x$ **b.** $\arccos x$ **c.** $\pi-\arccos x$

2. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, l'expression $\cos(\arctan x)$ est égale à :

a. $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ **b.** $\sqrt{x^2+1}$ **c.** $\dfrac{1}{x^2+1}$

3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, l'expression $\sin(\arctan x)$ est égale à :

a. $\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}$ **b.** $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ **c.** $\dfrac{x}{x^2+1}$

4. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, l'expression $\sinh^2(x)\cos^2(y)+\cosh^2(x)\sin^2(y)$ est égale à :

a. $\sinh^2 x+\sin^2 y$ **b.** $\cosh^2 x-\cos^2 y$ **c.** $\cosh^2 x+\cos^2 y$

2. Exercices élémentaires

4 — *Un classique*

Soit $f\in\mathscr{C}^2\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ telle que $f'(a)=f(a)$ et $f'(b)=f(b)$. Montrer que $\exists c\in\,]a,b[,\ f''(c)=f(c)$.
On pourra considérer $g:x\mapsto e^x\big(f'(x)-f(x)\big)$.

5 — *Étude d'une suite récurrrente*

Étudier la suite définie par $u_0\in\mathbb{R}_+$, $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{4+3u_n}$ en appliquant l'inégalité des accroissements finis.

6 — *Un raccord en 0*

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \lambda x & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x^2}{\ln(1+x)} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Étudier la dérivabilité de f en 0.

7 — *Un prolongement classique*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Étudier la dérivabilité en 0 de ce prolongement.

8 — *Figures imposées (composées)* f

Calculer les dérivées des fonctions définies par les expressions suivantes. *On précisera systématiquement sur quelle partie de* $\mathbb{R}$ *ces fonctions sont dérivables.*

1. $f(x) = \ln(\ln(x))$;
2. $f(x) = \arctan(\ln(x))$;
3. $f(x) = \ln\left(\sqrt{1-2\sin^2(x)}\right)$;
4. $f(x) = \dfrac{\cos(x) + x\sin(x)}{\sin(x) - x\cos(x)}$;
5. $f(x) = \left(\cos^2(x) + \dfrac{3}{2}\right)\sin(2x)$;
6. $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}\right)$.

9 — *Une équation* f

Résoudre l'équation $\arctan(2x) = \arccos x$ d'inconnue $x \in [-1, 1]$.

10 — *Une formule* f

Montrer que $\dfrac{\pi}{4} = \arctan\left(\dfrac{1}{7}\right) + 2\arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

11 — *Étude d'une fonction* f

On pose $f : x \longmapsto x\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Établir que $\forall y \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{y}{y^2+1} \leqslant \arctan y \leqslant y$.
2. Déterminer l'ensemble de définition et la parité de f.

3. Déterminer les limites de f en $0+$ et en $+\infty$. Pour cette dernière, on utilisera l'encadrement de l'exercice précédent.
4. Dresser le tableau de variation de f puis tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

12 — *Somme d'une série f*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n := \sum_{k=1}^{n} \arctan\left(\frac{1}{2k^2}\right)\cdot$

1. Démontrer que pour tout $x > 1,\ \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) - \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)\cdot$
2. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ a une limite réelle que l'on calculera.

13 — *Un prolongement $\mathscr{C}^1$ f*

Montrer que la fonction $x \mapsto x^2 \ln|x|$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier.

14 — *Graphes tangents f*

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et $(f,g) \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tels que $f(x_0) = g(x_0)$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant g(x)$.

Montrer que $f'(x_0) = g'(x_0)$.

15 — *La fonction argtanh f*

1. Montrer que la fonction tanh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.
2. Établir que $\tanh^{-1}$ est dérivable et déterminer sa dérivée.

3. Exercices classiques plus techniques

16 — *Une condition suffisante de monotonie f*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x_0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que f soit strictement monotone sur $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$.

17 — *Une suite de dérivées ff*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$.

1. Trouver une équation différentielle linéaire d'ordre un vérifiée par f.

2. En déduire à l'aide de la formule de Leibniz que pour tout n positif et tout x réel,

$$\left(1+x^2\right) f^{(n+2)}(x)+(2n+1)x f^{(n+1)}(x)+\left(n^2-1\right) f^{(n)}(x)=0$$

18 — *Tangentes et cordes ff*

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$. Démontrer que, $\forall a\in\mathbb{R}$, $f(t+a)-f(t)\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$.

19 — *Étude d'un opérateur ff*

On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des fonctions $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ deux fois dérivables, bijectives et telles que $f'>0$. Pour tout f dans $\mathscr{D}$, on pose $\mathscr{L}(f):=\left(\ln\circ f'\right)'$.

1. Établir que $f:x\mapsto e^x-1$ appartient à $\mathscr{D}$ et expliciter f^{-1}.

2. Soit $f\in\mathscr{D}$. Déterminer $f(0)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3. Justifier que $(\mathscr{D},\circ)$ est un groupe, i.e. $\forall (u,v)\in\mathscr{D}^2$, $u\circ v\in\mathscr{D}$ et $u^{-1}\in\mathscr{D}$.

4. Justifier que, pour tout f dans $\mathscr{D}$, la fonction $\mathscr{L}(f)$ est bien définie et l'exprimer en fonction des dérivées de f.

5. Soit $(u,v)\in\mathscr{D}^2$. Montrer que $\mathscr{L}(v\circ u)=(\mathscr{L}(v)\circ u)\times u'+\mathscr{L}(u)$.

6. Soit $v\in\mathscr{D}$. Exprimer $\mathscr{L}\left(v^{-1}\right)$ en fonction de v'', v', v^{-1}.

7. Soit f un élément de $\mathscr{D}$ et k dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\mathscr{L}\left(f^k\right)=\sum_{i=0}^{k-1}\left(\mathscr{L}(f)\circ f^i\right)\times\left(f^i\right)'$$

où f^j désigne la j-ème itérée de f.

4. Indications

1

Pour construire des exemples ou des contre-exemples, on pourra utiliser des fonctions usuelles simples ou des fonctions définies par morceaux.

2

Au 5.b., on pourra appliquer le TAF à f sur l'intervalle $[n, n+1]$.

3

Au 4., on exploitera les relations $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.

4

Appliquer le théorème de Rolle à g.

5

La dérivée de $x \longmapsto \sqrt{4+3x}$ est bornée en valeur absolue par $\frac{3}{4}$.

6

La fonction f est dérivable en 0 *si et seulement si* $\lambda = 1$.

7

La fonction est prolongeable par continuité en 0 par $f(0) := 0$. Ce prolongement est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

8

Il s'agit de dériver des composées.

9

Composer par la tangente.

10

On pourra utiliser les nombres complexes ou la formule d'addition de la tangente.

11

Au 1., on peut étudier deux fonctions ou bien appliquer le TAF.

12

Le 1. est une invitation au télescopage.

13

Après prolongelment par continuité en 0, on peut par exemple appliquer le théorème de la limite de la dérivée.

14

Une simple figure nous mène à la conjecture $f'(x_0) = g'(x_0)$.

15

On trouve que $\forall y \in]-1,1[\ , \left(\tanh^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{1-y^2}$.

16

Montrer qu'il existe un intervalle de la forme $[x_0-\alpha, x_0+\alpha]$ sur lequel f' est positive.

17

On trouve $\left(1+x^2\right) f'(x) = x f(x)$. Appliquer la formule de Leibniz au b).

18

Appliquer le TAF.

19

Au 1., on trouve $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+,\ y \mapsto \ln(1+y)$. Raisonner par récurrence à la dernière question.

5. Solutions

1 ↺

1. Vrai. Une fonction dérivable est continue, il suffit d'appliquer le théorème de Weierstrass.
2. Faux. La partie entière est un contre-exemple évident.
3. Vrai. Sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$, f est polynomiale donc de classe $\mathscr{C}^1$. Le taux d'accroissement de f en 0 est $x \in \mathbb{R}^* \mapsto |x|$ donc tend vers 0 quand x tend vers 0 : f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. De plus, sur $\mathbb{R}^*$, on a $f'(x) = 2\text{signe}(x)x$. La dérivée f' est donc bien continue en 0.
4. Faux. La valeur absolue est un contre-exemple évident (elle est 1-lipschitzienne par l'inégalité triangulaire).
5. Vrai (cf. cours).
6. Faux. Mais c'est vrai si l'ensemble de définition de f est un intervalle.
7. Vrai (cf. cours).
8. Faux. La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ est un contre-exemple évident pour $a = 1$.
9. Vrai. L'implication $\Longrightarrow$ est évidente (il suffit de dériver membre à membre dans la relation $f(-x) = f(x)$). Supposons f' impaire. La fonction $g : x \mapsto f(-x) - f(x)$ est dérivable et sa dérivée est nulle sur $\mathbb{R}$, elle est donc constante. Comme $g(0) = 0$, $g = 0$.
10. Faux. L'implication $\Longrightarrow$ est vraie (adapter la preuve de la question précédente). La fonction $f : x \mapsto x + 1$ est un contre-exemple évident à la réciproque.
11. Vrai. On applique l'IAF à l'arctangente (sa dérivée est majorée en valeur absolue par 1).
12. Vrai. On utilise le fait qu'une fonction ayant une limite non nulle ℓ en un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ est du signe de ℓ au voisinage de a. Il existe $\eta > 0$ tel que le taux d'accroissement de f en 0 soit positif sur $]-\eta, \eta[\,\setminus\{0\}$. En particulier, pour $x \in]0, \eta[$, on a
$$\frac{f(x) - f(0)}{x} > 0$$
d'où $f(x) \geqslant f(0)$.
13. Vrai car
$$\sin(\pi - x) = \sin(x) \quad \text{et} \quad -\pi/2 \leqslant \pi - x \leqslant \pi/2$$
pour $x \in [\pi/2, \pi]$.
14. Vrai, c'est une conséquence immédiate de la définition de l'arccosinus.
15. Faux. Cex $x = -1$.
16. Faux. L'expression est définie si set seulement si $|x| \leqslant |x+1|$. On trouve $[-1/2, +\infty[$.

2 ↺

1. Seuls a., b. et d. sont vrais. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $f' > 0$ par un calcul facile. Comme $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} \pm\infty$, elle est bijective (corollaire du TVI). Comme f' ne s'annule pas, f^{-1} a la même classe que f (cf. le cours). Comme $f'(0) = 2$ et $f(0) = 0$, on a $\left(f^{-1}\right)' = 1/2$ (théorème de dérivation d'une bijection réciproque).

2. Seul a. est vrai. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Par le TAF, il existe $c_x \in]0, x[$ tel que $f(x) = f(x) - f(0) = xf'(c_x)$. On conclut en remarquant que $f'(c_x) > f'(x)$ par croissance de f'. Cette inégalité permet de trouver le signe de la dérivée de $x \mapsto f(x)/x$ et de prouver que le b. est faux.

3. Tout est vrai sauf le b. L'intervalle $[0,1]$ est stable par le cosinus d'où le a. On vérifie que la fonction $x \mapsto \cos(x) - x$ s'annule en un unique point ℓ de $[0,1]$ (simple étude de ses variations). Sur $[0,1]$, $\cos'(x) = -\sin(x)$ est majoré en valeur absolue par $\sin(1)$. On déduit de l'IAF que $|f(x) - f(\ell)| \leqslant \sin(1)|x - \ell|$ d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant \sin(1)|u_n - \ell|$ puis le c. par une récurrence facile. On déduit le d. du c. par le théorème d'encadrement;

4. Tout est vrai sauf le a.
   - La fonction $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ est un contre-exemple au a.
   - Au b., il existe c_x entre x et $x+1$ tel que $f(x+1) - f(x) = f'(c_x)$. Comme $c_x \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$, on conclut par composition des limites.
   - Le c. est vrai car si $\ell \neq 0$, alors f' est du signe de ℓ au voisinage de $+\infty$.
   - Supposons que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+^*$ Il existe $x_0 > 0$ tel que $\forall x \leqslant x_0,\ f'(x) \geqslant \ell/2$. Soit $x \geqslant x_0$. Par l'IAF entre x_0 et x, on a $f(x) \geqslant f(x_0) + (x - x_0)\ell/2$. Ainsi $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ (par encadrement).
   - Le e. est vrai par application du d. à $-f$.

5. Seule le b. est vrai.
   - La fonction $x \mapsto \dfrac{\sin\left(x^2\right)}{\sqrt{x+1}}$ est un contre-exemple au a.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Il existe c_n dans $[n, n+1]$ tel que $f(n+1) - f(n) = f'(c_n)$. On a bien $c_n \to +\infty$ et $f'(c_n) = f(n+1) - f(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Enseignements à tirer de cet exercice

- Le 1. est une simple application du théorème de dérivabilité d'une bijection réciproque.
- Au 2., comparer $f(x)$ et $xf'(x)$ doit faire songer immédiatement au TAF ou l'IAF.
- Au 3., c'est une brève étude graphique qui permet d'entrevoir la solution donnée ci-dessus : le point fixe ℓ est attracteur, on utilise l'IAF.
- Le 7.a. est une erreur classique, on y prendra garde. On notera que si f est dérivable et décroît vers une limite réelle ℓ en $+\infty$, on peut toujours pas en déduire que $f'(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ mais il est plus long de construire un contre-exemple (cf. un des exercices de DL sur la dérivation).

3

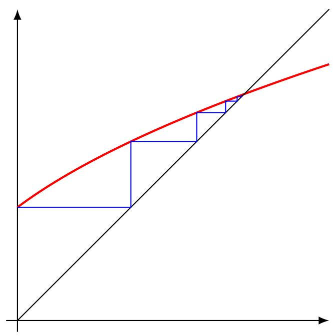
1. Le b. Remarquer que $\alpha := \arcsin\sqrt{1-x^2}$ vérifie $\sin\alpha = \sin\arccos x$. Comme α et $\arccos x$ appartiennent à $[0, \pi/2]$, on conclut par stricte croissance du sinus sur cet intervalle.
2. Le a. Exploiter la relation $1 + \tan^2 = \cos^{-2}$.
3. Le b. Remarquer que $\sin = \tan \times \cos$ et utiliser la question précédente.
4. Les a. et b. Utiliser $\cos^2 + \sin^2 = 1$ et $\cosh^2 - \sinh^2 = 1$.

4

Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à g en remarquant que $\forall x \in [a,b],\ g'(x) = e^x\left(f''(x) - f(x)\right)$.

5

On commence par une figure.



Comme, $|f'|$ semble majoré par un réel strictement inférieur à 1 sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$ stable par f, on va essayer d'appliquer l'IAF. Notons $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$ et f l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \sqrt{4+3x}$. La suite est bien définie dès que $u_0 \geqslant 0$ puisque l'on a $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$.

Un réel x est point fixe de f *si et seulement si* $x \geqslant 0$ et $x^2 = 4+3x$, ie $x = 4$. La seule (et éventuelle!) limite de (u_n) est donc 4. La fonction f est dérivable sur I et sur cet intervalle, $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{4+3x}} \leqslant \frac{3}{4}$. Par l'IAF, $\forall x, y \in \mathrm{I},\ \ |f(x) - f(y)| \leqslant \frac{3}{4}|x-y|$. Donc, pour tout $n \geqslant 0$, puisque $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(4) = 4$, $|u_{n+1} - 4| \leqslant \frac{3}{4}|u_n - 4|$ et par une récurrence immédiate, $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - 4| \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^n |u_0 - 4|$ Ainsi, d'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 4$.

6

Comme $x \longmapsto \lambda x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable à gauche en 0 avec $f'_g(0) = \lambda$. De plus,

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{x}{\ln(1+x)} \underset{0+}{\sim} x \quad \text{d'où} \quad \frac{f(x)-f(0)}{x} \xrightarrow[x\to0+]{} 1$$

Ainsi f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$. La fonction f est donc dérivable en 0 *si et seulement si* $\lambda = 1$.

7

1. On a clairement $f(x) \xrightarrow[x\to0-]{} 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to0+]{} 0$ (par composition des limites) donc, puisque f n'est pas définie en 0, $f(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0$. Ainsi f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ & \text{si } x > 0 \frac{1}{x}\exp\left(-\frac{1}{x}\right) \end{cases}$$

Comme $ue^{-u} \xrightarrow[u\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées, on a par composition des limites que

$$\frac{f(x)-f(0)}{x} \xrightarrow[x\to0+]{} 0$$

Puisque $\frac{f(x)-f(0)}{x} \xrightarrow[x\to0-]{} 0$, on a $\frac{f(x)-f(0)}{x} \xrightarrow[x\to0]{} 0$. Ainsi f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

8 ↺

Convenons de dire qu'une fonction est *dérivable* (sans plus de précision) pour signifier qu'elle est dérivable sur son ensemble de définition.

1. La fonction ln (la deuxième) est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et (la première) strictement positive sur $]1,+\infty[$, donc $\ln\circ\ln$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et
$$\forall\ x>1,\quad (\ln\circ\ln)'(x)=\frac{1}{x\ln(x)}$$
2. La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc $\arctan\circ\ln$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et
$$\forall\ x>0,\quad (\arctan\circ\ln)'(x)=\frac{1}{x(1+\ln^2(x))}$$
3. La fonction $\sin^2$ est périodique, de période π. La fonction $\sqrt{\cdot}$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, donc la fonction f est (définie et) dérivable au point x si, et seulement si, $1-2\sin^2 x>0$, c'est-à-dire si x est strictement compris entre $-\pi/4$ et $\pi/4$ (modulo π). Pour de tels x,
$$f'(x)=\frac{-2\sin(x)\cos(x)}{1-2\sin^2(x)}=-\tan(2x)$$
On peut faciliter le calcul de la dérivée en remarquant que
$$\ln\sqrt{1-2\sin^2(x)}=\frac{1}{2}\ln|\cos(2x)|$$
pour tout $x\neq\pi/4 \pmod{\pi/2}$.
4. La fonction f est définie et dérivable en tout point x tel que $\sin(x)\neq x\cos(x)$. Cette équation possède une infinité de solutions, une dans chaque intervalle de la forme $]-\pi/2+k\pi,\pi/2+k\pi[$ (avec $k\in\mathbb{Z}$). En tout point de son ensemble de définition,
$$f'(x)=\frac{-x}{(\sin(x)-x\cos(x))^2}$$
5. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$f'(x)=-\sin^2(2)x+\big(1+\cos(2x)\big)\cos(2x)+3\cos(2x)=\cos(4x)+4\cos(2x)$$
6. Un tableau de signes montre que $(1-x)/(1+x)$ est strictement positif si, et seulement si, $-1<x<1$. Par conséquent, la fonction f est dérivable sur $]-1,1[$ et pour tout x dans cet intervalle,
$$f'(x)=\frac{-1}{2\sqrt{1-x^2}}.$$

9 ↺

⇛ Soit $x\in[-1,1]$ tel que $\arctan(2x)=\arccos(x)$. On a alors
$$2x=\tan(\arctan(x))=\tan(\arccos(x))=\frac{\sin(\arccos(x))}{\cos(\arccos(x))}=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$
d'où $4x^2=1-x^2$, i.e. $x=\pm1/\sqrt{5}$.

⇛ La fonction $f : x \mapsto \arctan 2x - \arccos x$ est strictement croissante (somme de deux fonctions strictement croissantes) sur $[-1,1]$, continue sur cet intervalle et vérifie $f(-1)f(1) < 0$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution x_0. Comme la fonction arccosinus est à valeurs positives, on a $\arctan 2x_0 \geqslant 0$ et donc $x_0 \geqslant 0$ (par les variation de l'arctangente). On en déduit que l'unique solution est $1/\sqrt{5}$.

10 ↺

⇛ Posons $z = (7+i)(3+i)^2$. Le nombre z est non nul et $\arg(z) = \arg(7+i) + 2\arg(3+i)\ [2\pi]$. Comme 7 et 3 sont positifs, on a aussi $\arg(7+i) = \arctan(1/7)\ [2\pi]$ et $\arg(3+i) = \arctan(1/3)\ [2\pi]$. On en déduit que $\arg(z) = \arctan(1/7) + 2\arctan(1/3)\ [2\pi]$. Or, $z = (7+i)(8+6i) = 50(1+i)$, ainsi $\arg(z) = \pi/4\ [2\pi]$. On a donc montré que

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)\ [2\pi]$$

⇛ Par stricte croissance de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$, on déduit des inégalités $0 < 1/7 < 1$ et $0 < 1/3 < 1$ que

$$\arctan(0) = 0 < \arctan(1/3) < \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad \arctan(0) = 0 < \arctan(1/7) < \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$$

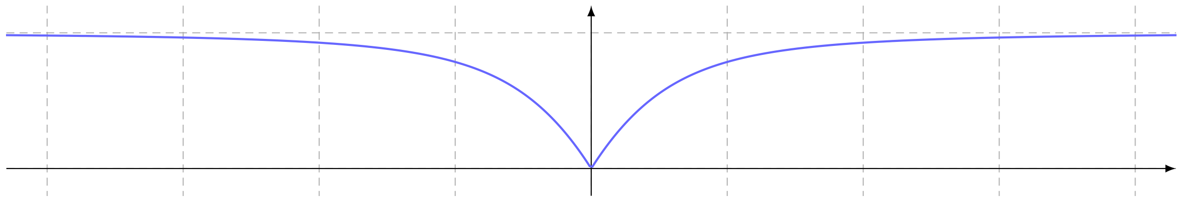
En particulier, $0 < \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right) < \frac{3\pi}{4}$. On a donc que les angles $\pi/4$ et $\arctan(1/7) + 2\arctan(1/3)$ appartiennent à $[0, 3\pi/4]$ et sont égaux modulo 2π. Puisque $3\pi/4 < 2\pi$, on en déduit qu'ils sont égaux :

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) + 2\arctan\left(\frac{1}{3}\right)$$

11 ↺

1. Soit $y \in \mathbb{R}_+$. Par le théorème des accroissements finis, il existe c dans $[0, y]$ tel que $\arctan y = \arctan y - \arctan 0 = \dfrac{y}{c^2+1}$. Comme $\frac{1}{y^2+1} \leqslant \frac{1}{c^2+1} \leqslant 1$, on en déduit que
$$\frac{y}{y^2+1} \leqslant \arctan y \leqslant y$$
2. La fonction arctangente est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire. On en déduit que f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et paire (en tant que produit de deux fonctions impaires).
3. ⇛ En 0+, $1/x$ tend vers $+\infty$ et donc $\arctan(1/x)$ tend vers $\pi/2$. On en déduit que $f(x) \xrightarrow[x\to 0+]{} 0$.

   ⇛ Soit $x > 0$. Par le 1., on a
$$\frac{1}{1+x^{-2}} \leqslant x\arctan\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1$$
   On déduit du théorème d'encadrement que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.
4. Sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est dérivable en tant que produit de fonctions dérivables, et
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \arctan\left(x^{-1}\right) - \frac{x^{-1}}{1+x^{-2}}$$
   D'après le 1., cette expression est positive et donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. On déduit de l'ensemble de cette étude le graphe suivant :



12

1. Soit $x > 1$. On a

$$\begin{aligned}\arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) - \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) &= \arg\left(\left(1+i\frac{x}{x-1}\right)\left(1-i\frac{x+1}{x}\right)\right)\ [2\pi] \\ &= \arg\left(\frac{2x}{x-1}+\frac{i}{x(x-1)}\right)\ [2\pi] = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)\ [2\pi]\end{aligned}$$

Comme $-\pi < \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) - \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) < \pi$ et $-\pi < \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) < \pi$, on en déduit que

$$\arctan\left(\frac{x+1}{x}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right) = \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$$

2. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On a

$$\begin{aligned}u_n &= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \sum_{k=2}^{n}\left(\arctan\left(\frac{k}{k-1}\right) - \arctan\left(\frac{k+1}{k}\right)\right) \\ &= \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan 2 - \arctan\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{n+1}{n}\right)\end{aligned}$$

D'où $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$ par continuité de l'arctangente en 1.

13

Notons $f : x \mapsto x^2 \ln|x|$, fonction définie sur $\mathbb{R}^*$. Cette fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ en tant que produit de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f'(x) = \frac{x^2}{x} + 2x\ln|x| = x + 2x\ln|x|$$

Par croissance comparée, on a $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $f'(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. On déduit du théorème de la limite de la dérivée que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ en posant $f(0) := 0$ (et on a alors $f'(0) = 0$).

14

Puisque $g \geqslant f$ et $f(x_0) = g(x_0)$, la fonction dérivable $g - f$ et admet un minimum global en x_0 (qui est bien intérieur à $\mathbb{R}$). On en déduit que $(g-f)'(x_0) = 0$, d'où $f'(x_0) = g'(x_0)$.

15

On se souvient que $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$ est définie sur $\mathbb{R}$, impaire et vérifie $|\tanh| < 1$.

1. La fonction tanh est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables et
$$\tanh' = \frac{\cosh^2 - \sinh^2}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2 > 0$$
Ainsi, tanh est strictement croissante. On a
$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1 \quad \text{et, par imparité de tanh} \ , \quad \tanh(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -1$$
Ainsi, par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, tanh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $]-1,1[$.

2. On applique le théorème de dérivation d'une bijection réciproque. Soit y dans $]-1,1[$.
$$\begin{aligned} \tanh^{-1} \text{ est dérivable en } y &\iff \tanh'(\tanh^{-1}(y)) \neq 0 \\ &\iff 1 - \tanh^2(\tanh^{-1}(y)) \neq 0 \\ &\iff 1 - y^2 \end{aligned}$$
Ainsi, $\tanh^{-1}$ et dérivable en y et $\left(\tanh^{-1}\right)'(y) = \dfrac{1}{1-y^2}$.

16

Quitte à considérer $-f$, on peut supposer $f'(x_0) > 0$. Par continuité de f' en x_0, il existe $\alpha > 0$ tel que f' soit strictement positive sur sur $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$: f est donc strictement croissante sur cet intervalle.

17

1. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle ,
$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$
Ainsi , $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$(1+x^2) f'(x) = x f(x).$$

2. La fonction f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ d'après le théorème sur les compoosées. En appliquant la formule de Leibniz , on trouve que la dérivée $n+1$-ième de
$$x \longmapsto x f(x)$$
est
$$x \longmapsto x f^{(n+1)}(x) + (n+1) f^{(n)}(x)$$
et que celle de la fonction
$$x \longmapsto (x^2+1) f'(x)$$
est
$$x \longmapsto (x^2+1) f^{(n+2)} + 2x(n+1) f^{(n+1)}(x) + n(n+1) f^{(n)}(x)$$
L'égalité de ces deux dérivées , qui découle de l'égalité des deux fonctions de départ prouvée à la question précédente , s'écrit encore ,
$$(1+x^2) f^{(n+2)}(x) + (2n+1) x f^{(n+1)}(x) + (n^2-1) f^{(n)}(x) = 0.$$

18

Soit a et x dans $\mathbb{R}$. Appliquons le théorème des accroissements finis entre x et $x+a$: il existe c_x entre x et $x+a$ tel que $f(x+a)-f(x)=af'(c_x)$. Comme $c_x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ (par encadrement), on a $f(x+a)-f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ (par composition des limites).

19

1. La fonction f est dérivable avec $f'=\exp>0$ et $\mathbb{R}_+$ est stable par f car $e^x-1\geqslant 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$. Comme $f(0)=0$ et $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$, on déduit du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même. Ainsi $f\in\mathscr{D}$. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, on a $e^x=1+f(x)$ d'où $x=\ln\big(1+f(x)\big)$. On en déduit que $f^{-1}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+,\ y\mapsto\ln(1+y)$. Établir que $f:x\mapsto e^x-1$ appartient à $\mathscr{D}$ et expliciter f^{-1}.
2. Comme f est strictement croissante, on déduit du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\big[f(0),\lim_{x\to+\infty}f(x)\big[$. Ainsi, $f(0)=0$ et $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.
3. Soit $(u,v)\in\mathscr{D}^2$.
   - La fonction $u\circ v$ est bien définie car u est définie sur $\mathbb{R}_+=v(\mathbb{R}_+)$. Elle est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ en tant que composée de deux bijections de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable en tant que composée de fonctions deux fois dérivables. De plus, $(u\circ v)'=v'\times(u'\circ v)>0$ car $u'>0$ et $v'>0$. Ainsi $u\circ v\in\mathscr{D}$.
   - Comme $u'>0$ et u deux fois dérivable, la fonction u^{-1} est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+$ avec $\left(u^{-1}\right)'=\frac{1}{u'\circ u^{-1}}>0$ car $u'>0$. De plus, u^{-1} est bijective de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $u^{-1}\in\mathscr{D}$.
4. Soit $f\in\mathscr{D}$. Comme $f'>0$, la fonction $\mathscr{L}(f)$ est bien définie et $\mathscr{L}(f)=\frac{f''}{f'}$.
5. Soit $(u,v)\in\mathscr{D}^2$. On a

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(v\circ u)&=\frac{(v\circ u)''}{(v\circ u)'}=\frac{\big(u'\times(v'\circ u)\big)'}{u'\times(v'\circ u)}=\frac{u''\times(v'\circ u)+(u')^2\times(v''\circ u)}{u'\times(v'\circ u)}\\&=\frac{u''}{u'}+\frac{u'\times(v''\circ u)}{v'\circ u}=\mathscr{L}(u)+(\mathscr{L}(v)\circ u)\times u'\end{aligned}$$

6. Comme $v^{-1}\in\mathscr{D}$ (cf. la question c.) et $\mathscr{L}(\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+})=0$, on déduit de la question précédente que

$$0=\mathscr{L}\left(v^{-1}\right)+\left(\mathscr{L}(v)\circ v^{-1}\right)\times\left(v^{-1}\right)'=\mathscr{L}\left(v^{-1}\right)+\left(\mathscr{L}(v)\circ v^{-1}\right)\times\frac{1}{v'\circ v^{-1}}$$

   d'où $\mathscr{L}\left(v^{-1}\right)=-\left(\mathscr{L}(v)\circ v^{-1}\right)\times\frac{1}{v'\circ v^{-1}}=-\frac{v''\circ v^{-1}}{(v'\circ v^{-1})^2}$.
7. On démontre le résultat par récurrence sur $k\in\mathbb{N}^*$.
   - Pour $k=1$, le résultat est clair car $f^0=\mathrm{id}_{\mathbb{R}_+}$ et $(f^0)'=1$.
   - Soit $k\in\mathbb{N}^*$. Supposons la relation vraie au rang k. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\left(f^{k+1}\right) = \mathscr{L}\left(f \circ f^{k}\right) &= \mathscr{L}\left(f^{k}\right) + \left(\mathscr{L}(f) \circ f^{k}\right) \times \left(f^{k}\right)' \\
&= \left(\sum_{i=0}^{k-1} \left(\mathscr{L}(f) \circ f^{i}\right) \times \left(f^{i}\right)'\right) + \left(\mathscr{L}(f) \circ f^{k}\right) \times \left(f^{k}\right)' \\
&= \sum_{i=0}^{k} \left(\mathscr{L}(f) \circ f^{i}\right) \times \left(f^{i}\right)'
\end{aligned}$$

par la relation au rang k. Ainsi la relation est établie au rang $k+1$.