AN 9 | Intégration des fonctions continues par morceaux

Il convient de travailler autant les exercices de calcul que les sujets plus théoriques.

Peintures rupestres de Huashan, Chine

9 Intégration des fonctions continues par morceaux 1

1 Quizz 2

2 Exercices élémentaires 5

3 Exercices classiques plus techniques 6

4 Indications 8

5 Solutions 10

1. Quizz

1 Vrai ou faux ?

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\int_0^1 x^{n-1}\mathrm{d}x = \frac{1}{n}\cdot$ **2.** Pour $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue, on a $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0 \iff f \geqslant 0$.

3. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, on a $\displaystyle\int_0^1 f(2t)\mathrm{d}t = \int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$.

4. Pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, la dérivée de $x \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est $x \mapsto f(x) - f(0)$.

5. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, on a $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\mathrm{d}t$.

6. La fonction $x \mapsto \dfrac{|x|^2}{2}$ est une primitive de $x \mapsto |x|$ sur $\mathbb{R}$.

7. $\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ i \neq j \implies \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(ix)\cos(jx)\mathrm{d}x = 0$. **8.** $\forall n \in \mathbb{N},\ \displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \int_0^1 (1+x)^n \mathrm{d}x$.

9. $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}^3 - 1}{3}\cdot$ **10.** $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{1+x}\mathrm{d}x = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cdot$ **11.** $\displaystyle\int_{-1}^1 x|x|\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

12. La fonction $\mathrm{F} : x \mapsto \displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ est dérivable et $\mathrm{F}' : x \mapsto -2xe^{-x^4}$.

13. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\displaystyle\int_n^{n+1} f(t)\mathrm{d}t - f(n) = \int_n^{n+1} (n+1-t)f'(t)\mathrm{d}t$.

14. Pour tout $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos t)\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^1 f(u)\mathrm{d}u$.

15. Pour $(f,g) \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})^2$, on a $\left|\displaystyle\int_0^1 fg\right| \leqslant \max|f| \left|\displaystyle\int_0^1 g\right|$.

16. Si $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, alors f admet une seule primitive d'intégrale nulle sur $[0,1]$.

17. Toute primitive d'une fonction continue et paire est impaire.

18. Toute primitive d'une fonction continue et impaire est paire.

19. Toute primitive d'une fonction continue et périodique est périodique.

20. Pour $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on a $\left(\displaystyle\int_0^1 f\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2$.

21. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^n k^{\alpha} \sim n^{\alpha+1}$. **22.** Pour tout $x > 0$, $\displaystyle\int_{\frac{1}{x}}^x \frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t = 0$.

23. Pour $(f,g) \in \mathscr{C}^2([0,1],\mathbb{R})^2$ tel que $g'' = g$ et $f(0) = f(1) = 0$, on a $\displaystyle\int_0^1 (fg + f'g') = 0$.

24. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1} t\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n \mathrm{d}t$.

25. On a $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

26. Pour $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, la fonction $g : x \longmapsto \int_0^x f(t+x)\mathrm{d}t$ est $\mathscr{C}^1$ et $g' : x \longmapsto f(2x) - f(x)$.

27. Pour $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{\alpha n + \beta k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi\sqrt{\alpha\beta}}{4}$.

28. Pour $\mathrm{P} = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathrm{X}^k \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on a $\forall k \in [\![0,n]\!],\ a_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathrm{P}\left(e^{it}\right) e^{-ikt}\mathrm{d}t$.

29. Si $(f,g) \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x f$ et $f(x) = \int_0^x g$, alors $f = g = 0$.

30. Pour $(f,g) \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})^2$, on a $\sqrt{\int_0^1 (f+g)^2} \leqslant \sqrt{\int_0^1 f^2} + \sqrt{\int_0^1 g^2}$.

31. On a $\inf\left\{\int_0^1 f^2 \,;\, f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \,;\, f(0) = f(1) = 1\right\} = 1$.

2 — *QCM sur le calcul intégral* f

1. On pose $\mathrm{I} := \int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}\mathrm{d}t$:

a. $\mathrm{I} = \ln\frac{8}{3\sqrt{3}}$; **b.** $\mathrm{I} = \ln\frac{\sqrt{3}}{2}$; **c.** $\mathrm{I} = \int_2^3 \frac{\ln t}{(1-t)^2}\mathrm{d}t$.

2. En posant $u = \cos 2x$ dans $\mathrm{I} := \int_0^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{2+\sin^2 x}\mathrm{d}x$, on obtient :

a. $\mathrm{I} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{5-u}$; **b.** $\mathrm{I} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{5+u}$; **c.** $\mathrm{I} = \ln\frac{3}{2}$.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n := \int_0^1 x^n\sqrt{1+x}\,\mathrm{d}x$:

a. $\mathrm{I}_0 = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$; **b.** $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante ; **c.** $\mathrm{I}_n = \frac{4\sqrt{2} - 2n\mathrm{I}_{n-1}}{3+2n}$.

4. Une primitive de $x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{1+x}}$ sur $\mathbb{R}_+$ est :

a. $x \longmapsto \int_0^x \frac{t}{\sqrt{1+t}}\mathrm{d}t$; **b.** $x \longmapsto \frac{2}{3}\sqrt{1+x}\,(x-2)$; **c.** $x \longmapsto \int_\pi^{\sqrt{1+x}} 2\left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n := \int_1^e \ln^n t\,\mathrm{d}t$:

a. $\mathrm{I}_n = e - n\mathrm{I}_{n-1}$; **b.** $\mathrm{I}_n = \int_0^1 u^n e^u\mathrm{d}u$; **c.** $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

6. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n} t \,\mathrm{d}t$. On a :

a. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n + \mathrm{I}_{n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$; **b.** $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante ; **c.** $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

7. Pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, la dérivée de ϕ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $\phi(x) := \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ est :

a. $x \mapsto 0$; **b.** $x \mapsto f(x) + f(-x)$; **c.** $x \mapsto f(x) - f(-x)$.

8. On pose $\mathrm{I} := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 t}{\cos 2t}\mathrm{d}t$ et $\mathrm{J} := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 t}{\cos 2t}\mathrm{d}t$.

a. $\mathrm{I}+\mathrm{J} = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)$ en posant $u = \tan t$; **b.** $\mathrm{I}-\mathrm{J} = 0$; **c.** $\mathrm{I} = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\cdot$

9. On pose $\mathrm{I} := \displaystyle\int_{1/2}^{2} \left(1+\frac{1}{t^2}\right)\arctan t\,\mathrm{d}t$.

a. $\mathrm{I} = -\displaystyle\int_{1/2}^{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\arctan\frac{1}{t}\mathrm{d}t$; **b.** $\mathrm{I} = \dfrac{3}{4}\pi$.

10. Pour $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on note $\mathrm{F} : x \in \mathbb{R} \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. F est continue ; **b.** $\mathrm{F}' = f$; **c.** f croissante $\Longrightarrow$ F croissante ; **d.** $f \geqslant 0 \Longrightarrow \mathrm{F} \geqslant 0$.

11. Pour $f \in \mathrm{E} := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on note $\mathrm{T}(f) : x \in [0,1] \mapsto x\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. $\mathrm{T} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$; **b.** T est surjective ; **c.** T est injective.

12. Pour $f \in \mathrm{E} := \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, on note $\mathrm{L}(f) : x \in [0,1] \mapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. $\mathrm{L} \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$; **b.** L est injectif ; **c.** L est surjectif ;

$\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times[0,1]$, **d.** $\mathrm{L}^{n+1}(f)(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f(t)\,\mathrm{d}t$; **e.** $\mathrm{L}^{n+1}(f)(x) = x^n \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f(xu)\,\mathrm{d}u$.

13. Soit $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que f' soit décroissante, $f(0) = 1$ et $\forall x \in [0,1],\ \mathrm{F}(x) := \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

a. $\forall x \in [0,1],\ \mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^1 x f(tx)\,\mathrm{d}t$; **b.** $\forall x \in [0,1],\ \displaystyle\int_0^1 \mathrm{F}(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(1) - \int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x$;

c. $\forall (x,t) \in [0,1]^2,\ x^2 f(t) + x(1-x) \leqslant x f(xt)$; **d.** $\displaystyle\int_0^1 x f(x)\,\mathrm{d}x > \frac{2}{3}\mathrm{F}(1) - \frac{1}{6}\cdot$

14. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n := \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^n x}{\sin x}\mathrm{d}x$.

a. $\mathrm{I}_1 = \ln 2$; **b.** $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_{n+2} = \mathrm{I}_n - \dfrac{1}{n+1}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}$; **c.** $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. Exercices élémentaires

3 — Des calculs

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^1 x\arctan x\,\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(t^2+1\right)^2}$ en posant $t=\tan x$; **3.** $\displaystyle\int_0^1 |nu-1|$ pour $n\in\mathbb{N}^*$;

4. $\displaystyle\int_0^1 t\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$; **5.** $\displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$ en posant $u:=\cos x$.

4 — Une suite d'intégrales

On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathrm{J}_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^n}\cdot$ Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathrm{J}_{n+1} := \dfrac{1}{n2^{n+1}}+\dfrac{2n-1}{2n}\mathrm{J}_n$.

5 — Des intégrales trigonométriques

Calculer $\displaystyle\int_0^\pi x(\cos x)^2\mathrm{d}x$ puis en déduire $\displaystyle\int_0^\pi x(\sin x)^2\mathrm{d}x$.

6 — Une étude asymptotique

On considère la fonction $f : x\longmapsto \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t$. Démontrer que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\ \frac{x^3}{3}\leqslant f(x)\leqslant \frac{x^3}{3}+x$$

et en déduire un équivalent de $f(x)$ en $+\infty$.

7 — La série exponentielle f

On pose $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x\mathrm{d}x$.

1. Montrer que $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Déterminer une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

3. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}\xrightarrow[n\to+\infty]{} e$.

8 — Un développement asymptotique à deux termes f

On pose $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n := \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}\cdot$

1. Calculer u_0, u_1 et u_2.

2. Démontrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

3. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n \mathrm{d}t}{1+t^n} = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln\left(1+t^n\right)\mathrm{d}t$.

4. En déduire un équivalent de $1-u_n$.

9 — *Une symétrie* f

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\forall x \in [0,1]$, $f(x)+f(1-x)=1$.

1. Quelle symétrie possède la courbe représentative de f ?

2. Démonter que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot$

3. Exercices classiques plus techniques

10 — *Une intégrale à paramètre* f

Pour tout nombre réel x, on pose $f(x) := \displaystyle\int_0^1 |x-t|\mathrm{d}t$. Calculer $f(x)$ pour tout réel x.

11 — *Une suite d'intégrale* f

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n := \displaystyle\int_1^e x\left(\ln^n x\right)\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{I}_n = \dfrac{e^2}{2} - \dfrac{n}{2}\mathrm{I}_{n-1}$.

3. En déduire que $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

12 — *Fonctions d'intégrale nulle* f

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue.

1. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 f = 0$. Montrer que f s'annule au moins une fois.

2. On suppose que $\displaystyle\int_0^1 f = \frac{1}{2}\cdot$ Montrer que f admet eu moins un point fixe.

13 — *Une minoration* f

Soit $(f,g)\in\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+)$ tel que $\forall x\in[0,1],\ f(x)g(x)\geqslant 1$. Établir que $\displaystyle\int_0^1 f\int_0^1 g\geqslant 1$.

14 — *Variations sur une densité de probabilité* ff

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $g:[a,b]\to\mathbb{R}_+$ tels que $a<b$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\mathrm{d}t=1$. Les deux questions qui suivent sont indépendantes.

1. Déterminer le minimum de la fonction $\phi : x\mapsto\displaystyle\int_a^b (t-x)^2 g(t)\mathrm{d}t$ et préciser pour quelle valeur de x ce minimum est atteint.

2. Montrer l'existence de $\mu\in[a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^\mu g(t)\mathrm{d}t=\int_\mu^b g(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\cdot$

15 — *X PC-2013* ff

Soit $f\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$. Montrer que $\forall x\in[0,1],\ \left|f(x)\right|\leqslant\sqrt{\displaystyle\int_0^1\left(f'(t)\right)^2\mathrm{d}t}$.

4. Indications

1

L'inégalité du 30. est équivalente à celle de Cauchy-Schwarz pour f et g.

2

Au 11., on pourra utiliser la formule de Taylor avec reste intégral.

3

Bien réfléchir à une IPP ou un changement de variable sauf au 3. où une relation de Chasles s'impose.

4

Effectuer une IPP.

5

N'oubliez pas la valeur de $\cos^2 + \sin^2$.

6

Encadrez $\sqrt{1+t^4}$.

7

Encadrer I_n au 1. et IPP au 2.

8

Effectuer une IPP au 3.

9

Coup de pouce pour le 1. : que dire du milieu du segment joignant les points de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$ et $\big(1-x, f(1-x)\big)$?

10

Effectuer une disjonction afin de simplifier la valeur absolue.

11

Au 3., on peut (par exemple) encadrer I_n au moyen de 2.

12

Raisonner par l'absurde en utilisant le TVI.

13

un seul cri : Cauchy-Schwarz !

14

Au 1., ϕ est un trinôme de degré au plus deux. Appliquer le TVI au 2.

15

Écrire $f(x)$ sous forme intégrale.

5. Solutions

1

1. Vrai.
2. Faux. Cex : pour $t \mapsto t - \frac{1}{3}$, on a $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{3}\right)^2\right]_0^1 = \frac{1}{6} > 0$.
3. Faux. Cex : f constante égale à 1. La bonne formule est (changement de variable) $\displaystyle\int_0^1 f(2t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^2 f(t)\mathrm{d}t$.
4. Faux. Cex : $f : x \mapsto x+1$. La bonne réponse est $x \mapsto f(x)$.
5. Vrai, par le changement de variable $u = \frac{1}{t}$.
6. Faux. La fonction est une primitive de $x \mapsto x$. On a $|x|^2 = x^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
7. Vrai. Utiliser la formule $\cos(ix)\cos(jx) = \dfrac{\cos(ix - jx) + \cos(ix + jx)}{2}$.
8. Vrai. En notant S_n la somme étudiée :
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\int_0^1 x^k\mathrm{d}x = \int_0^1\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 (1+x)^n\mathrm{d}x$$
par linéarité de l'intégrale et la formule du binôme.
9. Vrai car une primitive de $x \mapsto x\sqrt{1+x^2}$ est $x \mapsto \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{2}}$.
10. Faux. On trouve par une IPP :
$$\int_0^1 x\sqrt{1+x}\mathrm{d}x = \left[\frac{2x}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}x = \frac{4\left(1+\sqrt{2}\right)}{15}$$
11. Faux : l'intégrale est nulle par imparité de $x \mapsto x|x|$.
12. Faux. On a $F = \phi \circ g$ où $\phi : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et $g : x \mapsto x^2$. Par le théorème fondamental du calcul intégral, ϕ est dérivable avec $\phi' : x \mapsto e^{-x^2}$. Ainsi la composée F est dérivable et $F' : x \mapsto g'(x)\phi'(g(x))$, ie $F' : x \mapsto 2xe^{-x^4}$.
13. Vrai. Effectuer (par exemple) une IPP dans l'intégrale en f'.
14. Faux : cex pour une fonction constante non nulle.
15. Faux. Pour un cex, il suffit de choisir g non nulle d'intégrale nulle et $f = g$. Par exemple, $g : t \mapsto t - 1/2$.
16. Vrai. Si F_0 est une primitive de f (existence assurée par le corollaire du TF), alors les primitives de f sont les $F_0 + k$ pour $k \in \mathbb{R}$. On a
$$\int_0^1 F = 0 \iff k = -\int_0^1 F_0$$
17. Faux. La fonction $x \mapsto 1 + x^3$ est une primitive de $x \mapsto 3x^2$.

18. Vrai. Si f est continue et impaire, alors les primitives de f sont les fonctions de la forme

$$x \longmapsto k + \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

19. Faux. La fonction $x \mapsto x$ est une primitive de $x \mapsto 1$.

20. Vrai. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_0^1 1 \times f\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 1^2\right)\left(\int_0^1 f^2\right)$$

21. Faux. Un équivalent est $\frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot$ On reconnaît une somme de Riemann :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^{\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 t^{\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha+1}$$

22. Vrai. Effectuer par exemple le changement de variable $u = 1/t$.

23. Vrai. Par une IPP :

$$\int_0^1 f'g' = [fg']_0^1 - \int_0^1 fg'' = -\int_0^1 fg$$

24. Vrai. Poser $u = \pi/2 - t$, et $u = \sin(t)$ dans l'intégrale en cos.

25. Vrai. On remarque que, pour $x \in [0,1]$, on a

$$1 \leqslant \sqrt{1+x^n} \leqslant 1 + x^n$$

On conclut par croissance de l'intégrale que

$$1 \leqslant \int_0^1 \sqrt{1+x^n}\,\mathrm{d}x \leqslant 1 + \frac{1}{n+1}$$

puis on applique le théorème d'encadrement.

26. Faux. On a

$$g(x) = \int_x^{2x} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{2x} f(t)\mathrm{d}t - \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

donc $g' : x \mapsto 2f(2x) - f(x)$.

27. Faux. On reconnaît une somme de Riemann :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\alpha n + \beta k} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\alpha + \beta\frac{k}{n}} \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\alpha+\beta t} = \frac{1}{\beta}\ln\left(1+\frac{\alpha}{\beta}\right)\end{aligned}$$

28. Vrai. On a

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \mathrm{P}\left(e^{it}\right)e^{-ikt}\mathrm{d}t &= \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell \int_0^{2\pi} e^{i(\ell-k)t}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} a_\ell 2\pi\delta_{\ell,k} = 2\pi a_k\end{aligned}$$

29. Vrai. On a f et g dérivable par le TF et $f' = g$, $g' = f$. Ainsi $f'' = f$ avec les conditions initiales $f(0) = f'(0) = 0$, donc $f = 0$ (par unicité de la solution à un problème de Cauchy).

30. Vrai. En élevant au carré et en développant par linéarité, cette inégalité est équivalente à $\left(\int_0^1 fg\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f^2\right)\left(\int_0^1 g^2\right)$.

31. Faux. La borne inférieure vaut zéro. Considérer $\int_0^1 f_n^2$ avec

$$\forall t \in [0,1],\ f_n(t) = \sqrt{t^n + (1-t)^n}$$

On a $\int_0^1 f_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Enseignements à tirer de cet exercice

- ⇛ Attention au changement des bornes lors d'un changement de variable.
- ⇛ Bien vérifier vos primitives en cas d'IPP.
- ⇛ Au 15. (???), l'inégalité correcte est $\left|\int_0^1 fg\right| \leqslant \max|f| \int_0^1 |g|$. On la démontre par l'inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale :

$$\left|\int_0^1 fg\right| \leqslant \int_0^1 |fg| \leqslant \max|f| \int_0^1 |g|$$

2

1. Le a. est vrai (effectuer une IPP). Le c. est vrai (par le changement de variable $u = t+1$).
2. Les a. et c. sont vrais. On utilise $\sin^2(x) = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}\cdot$ Le b. est faux car $\mathrm{I} = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{5-u} > \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{5+u}\cdot$
3. Tout est vrai. Pour le a. : une primitive de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ est $x \mapsto 2(1+x)^{3/2}/3$. Le c. s'obtient par une IPP. Le b. se démontre par croissance de l'intégrale.
4. Tout est vrai. Le théorème fondamental du calcul intégral justifie le a. Par le changement de variable $u = \sqrt{t+1}$, on trouve par la relation de Chasles :

$$\int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{t+1}} = 2\int_1^{\sqrt{x+1}} \left(u^2-1\right)\mathrm{d}u = \underbrace{2\int_1^{\pi} \left(u^2-1\right)\mathrm{d}u}_{=\text{ constante}} + 2\int_{\pi}^{\sqrt{x+1}} \left(u^2-1\right)\mathrm{d}u$$

D'où le c. On peut en déduire b. ou remarquer que $\dfrac{t}{\sqrt{t+1}} = \dfrac{t+1-1}{\sqrt{t+1}} = \sqrt{t+1} - \dfrac{1}{\sqrt{t+1}}\cdot$

5. Les a. et b. sont vrais : respectivement par IPP et le changement de variable $u = \ln(t)$. Le c. est faux : par croissance de l'intégrale, I_n est majoré par $e-1$. On peut déduire du a. que $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
6. Seuls a. et c. sont vrais. On remarque que $t \mapsto \tan^{2n}(t)\left(1+\tan^2 t\right)$ est la dérivée de $t \mapsto \frac{\tan^{2n+1} t}{2n+1}$ ou bien on pose $u = \tan t$. On remarque $\mathrm{I}_n - \mathrm{I}_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)\mathrm{d}t$ avec f négative ne s'annulant qu'en 0. Comme $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 0}$ est positive décroissante, elle admet une limite réelle ℓ. La relation b. permet de conclure que $\ell = 0$.

7. Seul le b. est vrai. Remarquer que $\phi(x) = \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(-x)$ où F est une primitive de f.

8. Tout est vrai sauf b. On a bien-sûr $\mathrm{I} - \mathrm{J} = \frac{\pi}{6}\cdot$ On a $\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$ et $1 + \tan^2(t) = \frac{1}{\cos^2(t)}$ pour tout t dans $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ ainsi

$$\frac{1}{\cos(2t)} = \frac{\mathrm{d}t}{2\cos^2 t - 1} = \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}$$

Comme $\frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2(1-u)} + \frac{1}{2(1+u)}$, on en déduit le a.

9. Seul b. est vrai. En notant I l'intégrale de l'énoncé, on obtient en posant $u = 1/t$:

$$\int_{1/2}^{2} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \arctan t \,\mathrm{d}t = -\int_{2}^{1/2} \left(1 + u^2\right) \arctan \frac{1}{u} \frac{\mathrm{d}u}{u^2} = -\int_{1/2}^{2} \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \arctan \frac{1}{u} \mathrm{d}u$$

On en déduit que $2\mathrm{I} = \displaystyle\int_{1/2}^{2} \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) \mathrm{d}u = \frac{\pi}{2} \left[u - \frac{1}{u}\right]_{1/2}^{2} = \frac{3\pi}{2}\cdot$

10. Seuls a. et b. sont vraies (c'est le TF). Cex pour les c. et d. : $f = -1$ et $f = 1$.

11. Seuls a. et c. sont vrais. Le a. est vrai par linéarité de l'intégrale. Le b. est faux car T est à valeurs dans l'ensemble des fonctions s'annulant en 0. Comme T est linéaire, on s'intéresse à son noyau. Soit $f \in \operatorname{Ker} \mathrm{T}$. On a $\mathrm{T}(f)(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. On a donc $\int_0^x f = 0$ pour tout $x]0,1]$ donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in]0,1]$ en dérivant (TF). On en déduit que $f = 0$ par continuité de f en 0. Ainsi, T est injective.

12. Tout est vrai, sauf c. et e. Pour a., b. et c. : voir le 2. Pour le d., il s'agit de la formule de Taylor avec reste intégral. Posons $g := \mathrm{L}^n(f)$. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^n$ et vérifie $g(0) = \cdots = g^{(n-1)}(0) = 0$ et $g^{(n)} = f$, d'où

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \mathrm{d}t = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) \mathrm{d}t = x^n \int_0^1 \frac{(1-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(ux) \mathrm{d}u$$

en posant $t = xu$.

13. Tout est vrai sauf d. Le a. s'obtient par le changement de variable $t = ux$. Le b. vient d'une IPP : $\int_0^1 \mathrm{F} = [x\mathrm{F}(x)]_0^1 - \int_0^1 x f(x) \mathrm{d}x = \mathrm{F}(1) - \int_0^1 x f(x) \mathrm{d}x$. Pour $x \in [0,1]$, on pose $\phi : t \mapsto x^2 f(t) + x(1-x) - x f(xt)$. Cette fonction est dérivable et $\phi'(t) = x^2(f'(t) - f'(tx)) \leqslant 0$ pour tout $t \in [0,1]$, par décroissance de f. Comme $\phi(0) = 0$, on en déduit le c. En intégrant selon t à x fixé, on obtient $\mathrm{F}(x) \geqslant x(1-x) - \mathrm{F}(1)x^2$. Puis, en intégrant par rapport à x, on trouve :

$$\int_0^1 \mathrm{F}(x) \mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{6} + \frac{\mathrm{F}(1)}{3}$$

d'où $\int_0^1 x f(x) \mathrm{d}x \leqslant -\frac{1}{6} + \frac{2\mathrm{F}(1)}{3}$ par le b.

14. Tout est vrai.

- ⇛ Pour tout $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \frac{\cos^n(x)}{\sin(x)} \leqslant 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$ donc, par croissance de l'intégrale, $0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \dfrac{2\pi}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$. D'où le c. par le théorème d'encadrement.
- ⇛ On écrit, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_{n+2} &= \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^{n+2}(x)}{\sin(x)} \mathrm{d}x = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^n(x)\left(1 - \sin^2(x)\right)}{\sin(x)} \mathrm{d}x = \mathrm{I}_n - \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^n(x) \sin(x) \mathrm{d}x \\ &= \mathrm{I}_n + \left[\frac{1}{n+1} \cos^{n+1}(x)\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \mathrm{I}_n - \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n+1}\end{aligned}$$

⇛ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_{2k+1} = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{I}_{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2k} = \mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{I}_1$$

par c. Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2k}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2k} = \mathrm{I}_1 = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\mathrm{d}x = [\ln(\sin x)]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2.$

Enseignements à tirer de cet exercice

⇛ Les astuces du type $t = t+1-1$ (cf. le 4.) sont courantes en calcul intégral.

⇛ Au 5., on peut déduire du a. que $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ en remarquant que $0 \leqslant \mathrm{I}_{n-1} \leqslant \dfrac{e}{n}\cdot$

⇛ Il peut être intéressant de tenter une IPP pour établir une relation de récurrence.

⇛ Au 9., on a appliqué la relation $\forall t > 0,\ \arctan(t) + \arctan\left(\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{\pi}{2}\cdot$

3 ↺

1. On effectue une intégration par parties :

$$\mathrm{I}_1 = \left[\frac{x^2 \arctan x}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\left[x - \arctan x\right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

2. Posons $x = \tan t$. On a $\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \mathrm{d}x$ d'où

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^2(x)} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\mathrm{d}x = \left[\frac{x}{2} + \frac{\sin(2x)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}$$

3. Soit n dans $\mathbb{N}^*$. On a

$$\mathrm{I}_4 = \int_0^1 |nu-1| = \int_0^{\frac{1}{n}} (1-nu)\mathrm{d}u + \int_{\frac{1}{n}}^1 (nu-1)\mathrm{d}u = \frac{1}{n} - \frac{n}{2n^2} + \frac{n}{2} - \frac{n}{2n^2} - 1 + \frac{1}{n} = \frac{n}{2} + \frac{1}{n} - 1$$

4. Par une intégration par parties élémentaire :

$$\mathrm{I}_4 = \int_0^1 t\ln(1+t)\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\ln(1+t)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^2}{2(1+t)}\mathrm{d}t = \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 \frac{(t+1)(t-1)+1}{2(1+t)}\mathrm{d}t$$
$$= \frac{\ln 2}{2} - \int_0^1 \frac{t-1}{2}\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{2(1+t)} = \frac{\ln 2}{2} - \left[\frac{(t-1)^2}{4} - \frac{\ln(1+t)}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$$

5. Effectuons le changement de variable $u = \cos t$ dans l'intégrale I de l'énoncé :

$$\mathrm{I} = \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}u}{2-u^2} = \left[\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+u}{\sqrt{2}-u}\right]_{-1}^1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On obtient par une intégration par parties (les fonctions en jeu étant de classe $\mathscr{C}^1$) :

$$\mathrm{J}_{n+1} = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^1 - 2n\int_0^1 \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = \frac{1}{n2^{n+1}} - 2n\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = \frac{1}{n2^{n+1}} - 2n(\mathrm{J}_n - \mathrm{J}_{n+1})$$

d'où $\mathrm{J}_{n+1} = \frac{1}{n2^{n+1}} + \frac{2n-1}{2n}\mathrm{J}_n$.

5

On effectue une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x(\cos x)^2\mathrm{d}x &= \int_0^\pi x\left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi x\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^\pi x\cos(2x)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2}\left[\frac{x\sin(2x)}{2}\right]_0^\pi + \frac{1}{4}\int_0^\pi \sin(2x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{4}\end{aligned}$$

On remarque ensuite que $\displaystyle\int_0^\pi x(\sin x)^2\mathrm{d}x = \int_0^\pi x(1-\cos^2 x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2} - \frac{\pi^2}{4} = \frac{\pi^2}{4}$.

6

On considère la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^x \sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t$. Soit x et t dans $\mathbb{R}_+$. On obtient facilement, par exemple en élevant chacun des membres au carré, que :

$$t^2 \leqslant \sqrt{1+t^4} \leqslant 1+t^2$$

On en déduit, par croissance de l'intégrale que :

$$\int_0^x t^2\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \left(1+t^2\right)\mathrm{d}t$$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\frac{x^3}{3} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x^3}{3} + x$. Comme $\frac{x^3}{x} + x \sim \frac{x^3}{3}$ en $+\infty$, on a aussi $f(x) \sim \frac{x^3}{3}$ en $+\infty$.

7

1. Pour $x \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{(1-x)^n}{n!}e^x \leqslant \dfrac{(1-x)^n}{n!}e$. On en déduit que :

$$0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant e\int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}dx = -e\left[\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}\right]_0^1 = \frac{e}{(n+1)!}$$

   D'après le théorème d'encadrement, la suite (I_n) converge vers 0.

2. On effectue une intégration par parties :

$$\mathrm{I}_{n+1} = \left[\frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!}e^x\,dx = \mathrm{I}_n - \frac{1}{(n+1)!}$$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient par télescopage :

$$\mathrm{I}_0 - \mathrm{I}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{I}_k - \mathrm{I}_{k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}$$

Comme $\mathrm{I}_0 = e-1$, $e - \mathrm{I}_n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ d'où $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$ par le a.

8

1. On a directement $u_0 = \frac{1}{2}$, $u_1 = \ln 2$ et $u_2 = \frac{\pi}{4}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $1 - u_n = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^n}\right) \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t^n} \mathrm{d}t$. Comme $0 \leqslant \frac{t^n}{1+t^n} \leqslant t^n$ pour tout t dans $[0,1]$, on déduit de la croissance de l'intégrale que :

$$0 \leqslant 1 - u_n \leqslant \int -0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

On déduit du théorème d'encadrement que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Effectuons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{t}{n} \times \frac{n t^{n-1} \mathrm{d}t}{1+t^n} &= \left[\frac{t}{n} \times \ln\left(1+t^n\right)\right]_0^1 - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln\left(1+t^n\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln\left(1+t^n\right) \mathrm{d}t\end{aligned}$$

4. On déduit des calculs menés aux deux questions précédentes que

$$1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n} \int_0^1 \ln\left(1+t^n\right) \mathrm{d}t$$

On prouve comme au 1. que $0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+t^n) \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$ ainsi

$$1 - u_n = \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{\ln 2}{n}$$

9

1. Soit x dans $[0,1]$. Notons M et M′ les points de la courbe représentative de f d'abscisses respectives x et $1-x$. Comme

$$\frac{f(x) + f(1-x)}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{x + 1 - x}{2} = \frac{1}{2}$$

M′ et M sont symétriques par rapport à au point $\Omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$: celui-ci est un centre de symétrie de la courbe représentative de f.

2. Par le changement de variable $t = 1-x$, on a $\mathrm{d}t = -\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$. Par linéarité de l'intégrale, on a donc

$$2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^1 f(1-x)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1$$

d'où $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$.

10

⇛ Si $x \in [0,1]$, on a $f(x) = \int_0^x (x-t)\mathrm{d}t + \int_x^1 (t-x)\mathrm{d}t = x^2/2 + (1-x)^2/2 = x^2 - x + \frac{1}{2}\cdot$

⇛ Si $x \leqslant 0$, $f(x) = \int_0^1 (t-x)\mathrm{d}t = -x + \frac{1}{2}\cdot$

⇛ Si $x \geqslant 1$, $f(x) = \int_0^1 (x-t)\mathrm{d}t = x - \frac{1}{2}\cdot$

11

1. On a $\mathrm{I}_0 = \frac{e^2-1}{2}$ et $\mathrm{I}_1 = \frac{e^2+1}{4}$ par le 3.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $u(x) := \ln^n x$ et $v(x) = x^2/2$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Ces fonctions sont de classe $\mathscr{C}^1$ et, par la formule d'intégration par parties :
$$\mathrm{I}_n = \left[\frac{x^2 \ln^n x}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{n}{2} x \ln^{n-1} x \mathrm{d}x = \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2}\mathrm{I}_{n-1}$$
3. On reprend les notations de la question précédente. Puisque uv' est positive sur $[1,e]$, on a $\mathrm{I}_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par positivité de l'intégrale. On déduit alors du b. que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant \mathrm{I}_n \leqslant \frac{e^2}{n+1}$$
Ainsi $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par le théorème d'encadrement.

12

1. Supposons que $\int_0^1 f = 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant que f ne s'annule pas sur l'intervalle $[0,1]$. On déduit alors du théorème des valeurs intermédiaires que f garde un signe constant sur $[0,1]$ d'où $\int_0^1 f > 0$ ou $\int_0^1 f < 0$, ce qui est absurde.
2. Supposons que $\int_0^1 f = \frac{1}{2}\cdot$ On a alors $\int_0^1 g = 0$ où $g : x \mapsto f(x) - x$ (fonction continue en tant que somme de fonctions continues). On déduit du a. que g s'annule sur $[0,1]$ et donc que f admet au moins un point fixe sur $[0,1]$.

13

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et croissance de l'intégrale, on a :
$$\int_0^1 f \int_0^1 g \geqslant \int_0^1 \sqrt{fg} \geqslant \int_0^1 1\mathrm{d}t = 1$$

14

1. Après développement de $(x-t)^2$ et par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned}\phi(x) = x^2\int_a^b g(t)\mathrm{d}t - 2x\int_a^b tg(t)\mathrm{d}t + \int_a^b t^2 g(t)d\mathrm{d}t = x^2 - 2x\int_a^b tg(t)dt + \int_a^b t^2g(t)dt \\ = \left(x - \int_a^b tg(t)\mathrm{d}t\right)^2 + \int_a^b t^2 g(t)\mathrm{d}t - \left(\int_a^b tg(t)\mathrm{d}t\right)^2\end{aligned}$$

Il est alors clair que ϕ admet un minimum valant $\displaystyle\int_a^b t^2 g(t)\mathrm{d}t - \left(\int_a^b tg(t)\mathrm{d}t\right)^2$ atteint en un unique point x_0 de $\mathbb{R}$ valant $x_0 = \displaystyle\int_a^b tg(t)\mathrm{d}t$.

2. Notons, pour tout $x \in [a,b]$, $\psi(x) = \displaystyle\int_a^x g(t)\mathrm{d}t - \int_x^b g(t)\mathrm{d}t$. La fonction ψ est continue sur $[a,b]$ (c'est la somme de deux primitives de la fonction continue g d'après le théorème fondamental du calcul intégral). De plus, on a $\psi(b) = -\psi(a) = 1$. On déduit donc du théorème des valeurs intermédiaires l'existence de $\mu \in [a,b]$ tel que $\psi(\mu) = 0$, ce qui achève la preuve.

15

Soit $x \in [0,1]$. Comme $f(0) = 0$ et f' continue, on a $f(x) = \int_0^x f'$ d'où par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|f(x)| \leqslant \sqrt{\int_0^x (f')^2} \leqslant \sqrt{\int_0^1 (f')^2}$$

car $\int_0^1 (f')^2 - \int_0^x (f')^2 = \int_x^1 (f')^2 \geqslant 0$.

Commentaire

Dans cet exercice (et les suivants), on devine que l'inégalité de Cauchy-Schwarz sera utile.