



La maîtrise de la logique élémentaire est un prérequis aux études supérieures scientifiques. Il faut notamment savoir manipuler les quantificateurs sans erreur. Arriver à comprendre un énoncé donné sous forme symbolique est un objectif à atteindre le plus rapidement possible.



Enluminure extraite de La quête du Saint Graal

1	Logique et raisonnements mathématiques	1
1	Quizz	2
2	Exercices élémentaires	3
3	Exercices classiques plus techniques	5
4	Indications	6
5	Solutions	8

1. Quizz

1 

Vrai ou faux ?

On rappelle que, pour deux ensembles E et F , $E \subset F$ se lit « E est inclus dans F » et signifie que tout élément de E appartient aussi à F .

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n premier $\implies (n = 2 \text{ ou } n \text{ est impair})$.
2. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \neq 0 \implies (x \neq 0 \text{ et } y \neq 0)$.
3. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y \implies (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x < 1 \iff x^2 < x$.
5. Pour tous ensembles E et F , $E \neq F \iff (\exists x \in E, x \notin F)$.
6. Pour tous ensembles E et F , $E \subset F \iff (\forall x, (x \in E) \implies (x \in F))$.
7. $\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $\exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2$, $au + bv = 1$.
8. $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$, $\exists a \in \mathbb{R}$, $|a| < \varepsilon$.
9. Pour $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $fg \neq 0 \implies (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0)$.
10. $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x+1}$.
11. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x+1}$.
12. $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$.
13. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x = 0$ est une condition nécessaire de $x^4 + x = 0$.
14. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x = 0$ est une condition suffisante de $x^4 + x = 0$.
15. Pour $x \in \mathbb{R}$, $x = 0$ est une condition nécessaire et suffisante de $x^3 + x = 0$.
16. Pour $x \in \mathbb{C}$, $x = 0$ est une condition nécessaire de $x^3 + x = 0$.

2 

Vrai ou faux ?

On rappelle que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ où $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres de la forme $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$

- a. $\frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$. b. $\forall r \in \mathbb{Q}$, $r + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. c. $\forall r \in \mathbb{Q}$, $r\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

3 

Un peu d'arithmétique

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n : 3 \mid 4^n + 2$ et $\mathcal{Q}_n : 3 \mid 4^n + 1$. Vrai ou faux ?

1. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{Q}_n \Rightarrow \mathcal{Q}_{n+1}$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}_n$ est vraie.
4. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{Q}_n$ est fausse.

2. Exercices élémentaires

4



Vices de raisonnement

Les raisonnements suivants sont-ils corrects ? Expliquer et corriger leur(s) faille(s) le cas échéant.

1. Pour tout $n \geq 2$, on note $HR(n)$ la proposition suivante : *n points distincts du plan sont alignés.*

$\Rightarrow$ $HR(2)$ est banalement vraie.

$\Rightarrow$ Prouvons que pour tout $n \geq 2$, $HR(n) \Rightarrow HR(n+1)$. Soit $n \geq 2$ et $A_1, \dots, A_{n+1}$ $n+1$ points du plan. D'après $HR(n)$ les points $A_1, \dots, A_n$ sont alignés ainsi que les points $A_2, \dots, A_{n+1}$. Les $n+1$ points sont donc alignés sur la droite $(A_2 A_n)$. L'hypothèse $HR(n+1)$ est donc vérifiée.

$\Rightarrow$ La propriété est donc vraie pour tout $n \geq 2$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10^n + (-1)^n$ est divisible par 11.

En effet, soit n un entier naturel. On a $u_{n+1} = 10u_n + 11(-1)^n$, et u_{n+1} est donc divisible par 11 dès que u_n est divisible par 11.

3. Pour tout $n \geq 0$, on note $HR(n)$ la proposition suivante : $n^2 \leq 2^n$.

$\Rightarrow$ $HR(0)$ est banalement vraie.

$\Rightarrow$ Prouvons que pour tout $n \geq 0$, $HR(n)$ implique $HR(n+1)$. Soit $n \geq 0$. Supposons $HR(n)$ vraie, c'est-à-dire $n^2 \leq 2^n$. On a donc $2^{n+1} \geq 2n^2$. Or $2n^2 \geq (n+1)^2$, d'où $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$. L'hypothèse $HR(n+1)$ est donc vérifiée.

$\Rightarrow$ On a donc que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $HR(n)$ est vraie.

5



Irrationalité de $\sqrt{2}$

On cherche à prouver que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

1. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, n^2$ pair $\Rightarrow n$ est pair.
2. Montrer le résultat par l'absurde en utilisant la question 1.

6



Traductions

Écrire sous forme symbolique les assertions suivantes et leur négation :

1. Il existe un entier naturel multiple de tous les autres.
2. Tout entier relatif peut s'écrire comme produit de deux entiers relatifs.

3. Tout réel possède une racine carrée dans $\mathbb{R}$.
4. La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est croissante.

7 ? 

Un jeu de cartes

On utilise des cartes marquées d'une lettre d'un côté et d'un chiffre de l'autre. On dispose sur une table les cartes qui apparaissent comme suit :

A

D

3

7

Quelles cartes faut-il retourner pour vérifier si l'assertion ci-dessous est vraie ?

Si la lettre « A » figure au recto d'une carte, alors le chiffre « 3 » figure au verso

8 ? 

Une équation avec racine carrée

Résoudre l'équation $x = \sqrt{x+1}$.

9 ? 

Variations arithmético-géométriques

1. Montrer que, pour tous x et y réels positifs, $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$.
 2. En déduire que, pour tous x et y réels strictement positifs, $\frac{x}{x^4+y^2} \leq \frac{1}{2xy}$.
- INDICATION : Appliquer le 1. à un couple (x', y') construit à partir de (x, y) .
3. En déduire que, pour tous x et y réels strictement positifs, $\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{xy}$.

INDICATION : Appliquer le 2. à (x, y) et (y, x) .

10 ? 

Autour de la racine de deux f

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists! (x_n, y_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(\sqrt{2}-1)^n = x_n + y_n\sqrt{2}$.

11 ? 

Exponentielle Versus Polynômes f

Montrer qu'il n'existe aucun polynôme P à coefficients réels tel que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x = P(x)$.

3. Exercices classiques plus techniques

12



Un ensemble mystère

Déterminer l'ensemble $A := \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 2xy + y^4 = 0\}$.

REMARQUE : A est l'ensemble des réels y tels que l'équation $x^2 + 2xy + y^4 = 0$ admet au moins une solution réelle.

13

Équations du second degré f

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe un couple de réels (x, y) tel que $x^2 + y^2 = \alpha xy$ et $xy \neq 0$.

INDICATION : À y fixé, on sait à quelle condition l'équation $x^2 - \alpha yx + y^2 = 0$ admet une solution réelle x au moyen du discriminant de cette équation.

14

Une inégalité f

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$.

15

Équation fonctionnelle somme-produit f

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) = f(x) + f(y)$.

16

Une équation fonctionnelle f

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y - f(x)) = 2 - x - y$.

17

Exponentielle Versus Polynômes f

Montrer qu'il n'existe aucun polynôme P à coefficients réels tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = P(x)$.

18

Termes pairs de la suite de Fibonacci ff

Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ (suite de Fibonacci).

Déterminer sur $n \in \mathbb{N}$ une condition nécessaire et suffisante de parité de F_n .

19

Une équation à paramètre ff

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre l'équation $|x - a| - |x + a| = |x - 1|$.

4. Indications

1 ↪ _____

Factoriser par x dans les dernières questions.

2 ↪ _____

Seules a. et b. sont vraies.

3 ↪ _____

Tout est vrai.

4 ↪ _____

Les trois raisonnements sont faux.

5 ↪ _____

Raisonner par contraposition au 1.

6 ↪ _____

Le contraire de $p \Rightarrow q$ est $p \wedge \neg q$.

7 ↪ _____

Est-il indispensable de retourner la carte 3 ?

8 ↪ _____

Élever au carré pour résoudre mais en prenant garde aux équivalences!

9 ↪ _____

Former la différence au 1. et reconnaître une identité remarquable.

10 ↪ _____

Procéder par récurrence pour l'existence (par exemple, on peut aussi utiliser la formule du binôme) et opter pour une démonstration classique d'unicité.

11 ↪ _____

Raisonner par l'absurde. On pourra par exemple dériver et exploiter la notion de degré pour les polynômes.

12 ↪ _____

À y fixé dans $\mathbb{R}$, il s'agit de savoir si une certaine équation du second degré admet une solution.

13 ↻ _____

On trouve $|\alpha| \geq 2$.

14 ↻ _____

On peut démontrer l'hérédité via $\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{3n+3}{2n+3}$.

15 ↻ _____

Effectuer une analyse-synthèse. Les seules solutions sont les fonctions constantes égales à 0 et 2.

16 ↻ _____

La seule solution est la fonction $x \mapsto 1 - x$. Raisonner par analyse-synthèse.

17 ↻ _____

Raisonner par l'absurde. On pourra par exemple dériver et exploiter la notion de degré pour les polynômes.

18 ↻ _____

Conjecturer la parité de F_{3n} , F_{3n+1} et F_{3n+2} en examinant les premiers termes puis formaliser au moyen d'un raisonnement par récurrence.

19 ↻ _____

Afin de simplifier simultanément les trois valeurs absolues, il convient de positionner relativement $-a$, a et 1. Ceci ouvre la voie à une disjonction de cas.

5. Solutions

1



1. Vrai car sa contraposée est vraie : Si $n \in \mathbb{N}$ est pair et distinct de 2 alors n n'est pas premier.
2. Vrai car sa contraposée est vraie : $x = 0$ ou $y = 0$ implique $xy = 0$.
3. Vrai car sa contraposée est vraie. Supposons $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$. On a alors $y-x = x-y$ d'où $x = y$.
4. Faux. Pour $x = -2$, on a $x^2 > x$ et $x < 1$.
5. Faux. La proposition $\exists x \in E, x \notin F$ équivaut à $E \not\subset F$, qui n'est pas équivalente à $E \neq F$.
6. Vrai. C'est la définition de l'inclusion rappelée au début de l'énoncé.
7. Faux. Pour $(a, b) = (0, 0)$, on a $\forall (u, v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = 0$.
8. Faux. Pour $\varepsilon = 0$, on a $\forall a \in \mathbb{R}, |a| \geq \varepsilon$.
9. Faux. Pour $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}, g(x) = 0$ et $g(1) = 1$, on a $fg = 0$ mais $f \neq 0$ et $g \neq 0$.

Attention aux quantificateurs : f Versus $f(x)$

Quand on écrit $fg = 0$, cela signifie que la fonction produit fg est nulle. Ainsi $fg = 0$ implique pas que l'une des deux fonctions f ou g soit nulle. Ce qui est vrai est que si $fg = 0$, alors pour tout réel x , l'un des deux réels $f(x)$ ou $g(x)$ est nul (mais celui des deux qui est nul peut varier avec x). C'est une des raisons pour lesquelles il est important de différencier f (une fonction) et $f(x)$ (la valeur de la fonction f en un point x) :

- ⇒ Si $f(x)g(x) = 0$ (ici 0 désigne le zéro réel), alors $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$ car un produit de nombres réels est nul *si et seulement si* l'un des deux est nul.
- ⇒ Si $fg = 0$ (ici 0 désigne la fonction nulle), on ne peut en conclure que $f = 0$ ou $g = 0$. Il existe des fonctions non nulles dont le produit est nul.

10. Faux. Raisonnons par l'absurde en supposant cette propriété. On a alors $a(x+1) + bx^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ (mettre au même dénominateur). La fonction polynomiale $x \mapsto bx^2 - ax + a - 1$ admet une infinité de racine donc est nulle, donc ses coefficients sont nuls : $b = -a = a - 1 = 0$ d'où $a = 1$ et $a = 0$ ce qui est absurde.

Variantes

On peut aussi remarquer donner à x les valeurs 1, 2 et 3 : on obtient $2a + b = 3a + 4b = 4a + 9b = 1$. On peut ensuite résoudre le système formé par les deux premières équations et en déduire une absurdité grâce à la troisième.

11. Vrai. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $a := 0$ et $b := \frac{1}{x^2}$. On a bien $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x+1}$.
12. Vrai. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x+a}{x(x+1)}$. Le couple $(a, b) := (1, -1)$ convient donc.

De la dépendance des variables quantifiées

Les questions 10, 11 et 12 illustrent un point très important : quand on écrit « $\exists(a, b), \forall x, \dots$ », le couple (a, b) est universel ie le même pour tous les x dans $\mathbb{R}_+^*$; quand on écrit « $\forall x, \exists(a, b), \dots$ », le couple (a, b) peut dépendre de x .

13. Faux. Pour $x = -1$, on a $x^4 + x = 0$ d'où $x^4 + x = 0$ n'implique pas $x = 0$.
 14. Vrai. Si $x = 0$, alors $x^4 + x = 0$.
 15. Vrai. Pour x dans $\mathbb{R}$, on a $x^3 + x = x(x^2 + 1)$ d'où $x^3 + x = 0 \iff x = 0$.
 16. Faux. Pour $x := i$, on a $x^3 + x = 0$.

Il faut être très rigoureux dans la manipulation des variables

Les questions 15 et 16 illustrent l'importance de savoir à quelques ensembles appartiennent les variables d'une proposition mathématique.

2 ↪

Seules a. et b. sont vraies.

- ⇒ Raisonnons par l'absurde en supposant $\frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$. Comme $\frac{1}{\sqrt{2}} > 0$, il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{p}{q}$. On en déduit que $\sqrt{2} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde.
 ⇒ Soit $r \in \mathbb{Q}$. Raisonnons par l'absurde. Supposons que $r + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe $r' \in \mathbb{Q}$ tel que $r + \sqrt{2} = r'$ d'où $\sqrt{2} = r' - r \in \mathbb{Q}$ car $\mathbb{Q}$ est stable par l'addition (facile à vérifier). C'est donc absurde.
 ⇒ Faux. La valeur $r := 0$ fournit un contre-exemple évident.

De la stabilité de $\mathbb{Q}$ par + et $\times$

Dire que $\mathbb{Q}$ est stable par + (resp. par $\times$) signifie que la somme (resp. le produit) de deux rationnels quelconques est un rationnel. Soit p, q des entiers relatifs et a, b des entiers naturels non nuls. On a

$$\frac{p}{a} + \frac{q}{b} = \frac{pb + qa}{ab} \quad \text{et} \quad \frac{p}{a} \times \frac{q}{b} = \frac{pq}{ab}$$

Comme $pb + qa$, ab et pq sont des entiers relatifs, on en déduit que $\frac{p}{a} + \frac{q}{b}$ et $\frac{p}{a} \times \frac{q}{b}$ sont des nombres rationnels.

3 ↪

Tout est vrai.

- ⇒ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $3 \mid 4^n + 2$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n = 3k - 2$. On a $4^{n+1} + 2 = 12k - 6$ donc $3 \mid 4^{n+1} + 2$.
 ⇒ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $3 \mid 4^n + 1$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n = 3k - 1$. On a $4^{n+1} + 1 = 12k - 3$ donc $3 \mid 4^{n+1} + 1$.
 ⇒ Comme $4^0 + 2 = 3$, $\mathcal{P}_0$ est vraie donc $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par le premier point).
 ⇒ Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $4^n + 2 - (4^n + 1) = 1$, $4^n + 1$ et $4^n + 2$ ne peuvent être tous les deux divisibles par 3 (sinon 3 diviserait leur différence qui vaut 1). Comme $\mathcal{P}_n$ est vraie, on en déduit que $\mathcal{Q}_n$ est fausse.

Une autre rédaction

On peut utiliser des congruences, très efficaces pour aborder ce type de question.

⇒ Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $4 \equiv 1 [3]$ donc $4^n \equiv 1^n [3]$ d'où $4^n + 2 \equiv 3 [3]$ i.e. $4^n + 2 \equiv 0 [3]$.

⇒ De même, pour $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 1 \equiv 2 [3]$ d'où $4^n + 1 \not\equiv 0 [3]$.

Ce démontre sans récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n$ est vraie et $\mathcal{P}_n$ est fausse.

4



Les trois raisonnements sont faux.

1. La propriété est bien-sûr fausse pour tout $n \geq 3$. La faille du raisonnement est que l'implication $\text{HR}(n) \implies \text{HR}(n+1)$ n'est vraie que pour $n \geq 3$.
2. Dans cet exemple, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\text{HR}(n) \implies \text{HR}(n+1)$ mais il manque une initialisation pour conclure.

Commentaire

Pour aborder ce type de questions, la meilleure méthode consiste à utiliser les congruences.

⇒ On a $10 \equiv -1 [11]$ d'où $10^n \equiv (-1)^n [11]$ et donc $10^n + (-1)^n \equiv 2(-1)^n [11]$.

⇒ Comme $2(-1)^n \not\equiv 0 [11]$, on a donc que, pour tout entier naturel n , $10^n + (-1)^n$ n'est pas divisible par 11.

3. Nous allons voir que la proposition $n^2 \leq 2^n$ est vraie pour tous les entiers sauf pour $n = 3$. L'inégalité $2n^2 \geq (n+1)^2$ n'est en fait vraie que si $n \geq 3$. Le raisonnement correct est le suivant :

⇒ $\text{HR}(4)$ est vraie.

⇒ Prouvons que pour tout $n \geq 4$, $\text{HR}(n)$ implique $\text{HR}(n+1)$. Soit $n \geq 4$. Supposons $\text{HR}(n)$ vraie, c'est-à-dire $n^2 \leq 2^n$. On a donc $2^{n+1} \geq 2n^2$. Or $2n^2 \geq (n+1)^2 \iff n(n-2) \geq 1$, cette dernière inégalité étant vérifiée puisque $n \geq 3$. D'où $(n+1)^2 \leq 2^{n+1}$. L'hypothèse $\text{HR}(n+1)$ est donc vérifiée.

⇒ D'après le principe de récurrence, $\forall n \geq 4$, $\text{HR}(n)$ est vraie.

Par ailleurs, il est clair que $\text{HR}(0)$, $\text{HR}(1)$ et $\text{HR}(2)$ sont vraies, mais en revanche $\text{HR}(3)$ est fausse puisque $3^2 = 9 > 2^3 = 8$. Ainsi, $\text{HR}(n)$ est vraie si et seulement si $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$.

5



1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Prouvons la propriété par contraposition. Supposons n pair. Alors il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m$. Ainsi $n^2 = 4m^2$ et n^2 est donc pair.
2. Raisonnons par l'absurde. Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge q = 1$ et $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On a $2q^2 = p^2$. Comme p^2 est pair, p est aussi pair et on a $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ ainsi $q^2 = 2k^2$ donc q^2 est pair d'où q est pair. La parité commune de p et q est en contradiction avec l'hypothèse $p \wedge q = 1$.

Remarque sur la notation $p \wedge q$

La notation $p \wedge q$ désigne le PGCD des nombres p et q .

6

L'assertion sera à chaque fois notée $\mathcal{P}$.

1. $\mathcal{P} : \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \mid n$, et son contraire : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, m$ ne divise pas n .
2. $\mathcal{P} : \forall n \in \mathbb{Z}, \exists (p, q) \in \mathbb{Z}^2, n = pq$, et son contraire : $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, n \neq pq$.
3. $\mathcal{P} : \forall x \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}, x = a^2$, et son contraire : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}, x \neq a^2$.
4. $\mathcal{P} : \forall (x, y) \in D^2, x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$, et son contraire : $\exists (x, y) \in D^2, x \leq y$ et $f(x) > f(y)$.

Contraire d'une implication

Rappelons que le contraire de $p \implies q$ est p et $\neg q$.

7

Il faut bien-sûr retourner les cartes marquées A et 7.

Explication un peu plus détaillée

Il faut retourner la carte portant le A pour vérifier qu'un 3 figure bien au verso et la carte portant 7 afin de s'assurer que A ne figure pas au verso. La carte D est sans enjeu de même que 3 : le fait que A ne figure pas au verso de 3 ne contredit pas la propriété « A au recto implique 3 au verso ».

8

L'équation a un sens pour $x \geq -1$. Soit $x \geq -1$. On a

$$\begin{aligned} x = \sqrt{x+1} &\iff x \geq 0 \quad \text{et} \quad x^2 = x+1 \\ &\iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

car l'équation $x^2 = x+1$ admet pour racines $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (positive) et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (négative).

9

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}_+^2$. On a $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geq 0$.

Inégalité arithmético-géométrique

Cette inégalité est à connaître. Nous la généraliserons prochainement sous la forme :

$$\underbrace{\sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n}}_{\text{moyenne géométrique des } x_i} \leq \underbrace{\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}}_{\text{moyenne arithmétique des } x_i} \quad \text{pour tout } n \text{ dans } \mathbb{N}^* \text{ et } x_1, \dots, x_n \text{ dans } \mathbb{R}_+$$

2. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Par la question précédente, $0 < x^2 y \leq \frac{x^4 + y^2}{2}$ d'où $\frac{x}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2xy}$.

Un principe général

L'énoncé nous mettait doublement sur la piste via le groupe verbal « en déduire » et l'indication : il s'agit d'appliquer l'inégalité du 1. à un couple bien choisi de réels positifs. C'est légitime car cette inégalité a été démontrée pour tous les couples de réels positifs.

3. Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Par le 2., $\frac{x}{x^4 + y^2} \leq \frac{1}{2xy}$ et $\frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{2xy}$ d'où $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}$.

10



⇒ Démontrons l'unicité. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y, u, v) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $(\sqrt{2} - 1)^n = x + y\sqrt{2} = u + v\sqrt{2}$. On a alors $\sqrt{2}(v - y) = x - u$. Supposons par l'absurde que $v \neq y$. On aurait alors

$$\sqrt{2} = \frac{x - u}{v - y} \in \mathbb{Q}$$

ce qui est absurde par la question précédente. Ainsi $v = y$ d'où $x - u = 0$ et donc $(x, y) = (u, v)$.

⇒ Démontrons l'existence par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

☞ Comme $(\sqrt{2} - 1)^0 = 1$ la propriété est vraie au rang 0 en choisissant $(x_0, y_0) := (1, 0)$.

☞ Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(x_n, y_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(\sqrt{2} - 1)^n = x_n + y_n\sqrt{2}$. On a

$$(\sqrt{2} - 1)^{n+1} = (x_n + y_n\sqrt{2})(\sqrt{2} - 1) = 2y_n - x_n + \sqrt{2}(x_n - y_n)$$

En posant $x_{n+1} := 2y_n - x_n$ et $y_{n+1} := x_n - y_n$, on a bien $(x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{Z}^2$ et

$$(\sqrt{2} - 1)^{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2}$$

d'où la propriété au rang $n + 1$.

11



Voici deux preuves possibles (parmi tant d'autres!).

⇒ Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel polynôme P. On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad , \quad e^{-x}P(x) = 1$$

et puisque $e^{-x}P(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (l'exponentielle l'emporte sur les puissances en $+\infty$, donc également sur les polynômes), on obtient par passage à la limite, $0 = 1$. Ce qui est absurde.

⇒ Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel polynôme P . On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = e^x$$

L'exponentielle ne s'annulant pas, le polynôme P est non nul. Toutes les fonctions en jeu étant dérivables, la dérivation membre à membre de cette égalité aboutit à $\forall x \in \mathbb{R}, P'(x) = e^x = P(x)$, ie $P = P'$, ce qui est absurde car P étant non nul, on a $\deg P' < \deg P$.

Un mot sur le degré des polynôme

Attention, le polynôme nul est le seul polynôme P dont la dérivée P' est de même degré que P . Par convention ce degré est $-\infty$ (ceci sera revu prochainement et n'est pas très important en première lecture).

12



Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation $x^2 + 2yx + y^4 = 0$ admet une solution réelle *si et seulement si* le discriminant $\Delta := (2y)^2 - 4y^4 = 4y^2(1 - y^2)$ de ce trinôme est positif. On en déduit que $A = [-1, 1]$.

13



On remarque que rechercher $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy \neq 0$ et $\alpha xy = x^2 + y^2$ revient à trouver les valeurs non nulles de y telles que l'équation $X^2 - \alpha yX + y^2 = 0$ admet une solution non nulle.

⇒ ANALYSE. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy \neq 0$ et $\alpha xy = x^2 + y^2$. Le discriminant de $X^2 - \alpha yX + y^2 = 0$, $\Delta = (\alpha^2 - 4)y^2$ est alors positif. Et, puisque $y \neq 0$, on a donc $\alpha^2 \geq 4$.

⇒ SYNTHÈSE. Supposons $\alpha^2 \geq 4$. Soit alors $y = 1$. Le discriminant de $X^2 - \alpha X + 1 = 0$, $\Delta = (\alpha^2 - 4)$ est alors positif et l'équation admet deux solutions réelles x_1 et x_2 . Celle-ci sont non nulles (car 0 n'est pas racine de l'équation). Le couple $(x_1, 1)$ est une solution au problème posé.

⇒ CONCLUSION. La condition nécessaire et suffisante est $\alpha^2 \geq 4$, ie $|\alpha| \geq 2$.

Rappel sur les équations du second degré réelles

Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et b, c deux réels. Notons $\Delta := b^2 - 4ac$ le discriminant du polynôme $P : x \mapsto x^2 + ax + b$.

⇒ Cas 1 : $\Delta < 0$. On a $\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c$ est du signe de a .

⇒ Cas 2 : $\Delta = 0$. En posant $x_0 := -\frac{b}{2}$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a(x - x_0)^2$ (qui est donc du signe de a).

⇒ Cas 3 : $\Delta > 0$. En notant $x_0 < x_1$ les racines de P , $P(x)$ est du signe de $-a$ sur $]x_0, x_1[$ et du signe de a en dehors de cet intervalle.

La proposition précédente repose sur la mise sous forme canonique de P :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$$

Dans le cas où $\Delta \geq 0$, les racines de P sont $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ d'où

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = a(x - x_0)(x - x_1)$$

14



On raisonne par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \geq \frac{3n}{2n+1}$.

⇒ Comme $1 = \frac{3}{2+1}$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

⇒ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} &\geq \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1} \iff \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3(n+1)(2n+1) - 3n(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} \\ &\iff \frac{1}{(n+1)^2} \geq \frac{3}{(2n+1)(2n+3)} \\ &\iff (2n+1)(2n+3) \geq 3(n+1)^2 \\ &\iff n^2 + 2n \geq 0 \end{aligned}$$

Comme $n^2 + 2n \geq 0$, on en déduit $\mathcal{P}(n+1)$.

15



Effectuons une analyse-synthèse.

⇒ ANALYSE. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) = f(x) + f(y)$.

☞ Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x)^2 = 2f(x)$, d'où $f(x) = 0$ ou $f(x) = 2$.

☞ Supposons l'existence de $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. On a alors $f(y) = f(x_0)f(y) - f(x_0) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Ainsi $f = 0$.

☞ On en déduit que f est constante égale à 0 ou 2.

⇒ SYNTHÈSE. Réciproquement, il est clair que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 2$ sont solutions.

L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) = f(x) + f(y)$ est donc réduit à la paire formée par les fonctions constantes égales à 0 et 2.

Commentaire

Ici, l'analyse aboutit naturellement à $f(x) = 0$ ou $f(x) = 2$, pour tout réel x . On voit facilement que les fonctions constantes égales à 0 et 2 sont des solutions. La question est de savoir si ce sont les seules. Pour cela, on suppose qu'une solution f prend au moins une fois la valeur 0 (en un point noté x_0 dans la solution ci-dessus) et on essaie de poursuivre l'analyse afin de connaître la valeur de $f(x)$ pour un x quelconque. De même dans le second cas.

16



Effectuons une analyse-synthèse.

⇒ ANALYSE. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y - f(x)) = 2 - x - y$.

☞ Soit $y \in \mathbb{R}$. On a $f(y) = f(y + f(0) - f(0)) = 2 - 0 - (y + f(0)) = 2 - f(0) - y$.

☞ Ainsi, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(y) = \mu - y$.

⇒ SYNTHÈSE. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \mu - y$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$f(y - f(x)) = \mu - (y - f(x)) = \mu - (y - \mu + x) = 2\mu - x - y$$

On en déduit que f est solution *si et seulement si* $\mu = 1$.

Ainsi la seule solution est la fonction $x \mapsto 1 - x$.

Commentaire

La phase d'analyse dans la résolution d'une équation fonctionnelle consiste à obtenir des renseignements sur $f(x)$.

⇒ Idéalement on arrive à calculer la valeur de $f(x)$ en fonction de x (comme ici), mais il faut parfois se contenter de renseignements moins précis (cf. le cours et les TD pour des exemples concrets) : valeur pour des valeurs remarquables de x (pour x entier par exemple), parité, etc.

⇒ Attention à la rédaction de la synthèse. Définir f par $f : x \mapsto f(0) - y$ n'a aucun sens : on ne peut définir f au moyen de f ...

17 ↻

Voici deux preuves possibles (parmi tant d'autres!).

⇒ Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel polynôme P . On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-x}P(x) = 1$$

et puisque $e^{-x}P(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (l'exponentielle *l'emporte* sur les puissances en $+\infty$, donc également sur les polynômes), on obtient par passage à la limite, $0 = 1$. Ce qui est absurde.

⇒ Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel polynôme P . On a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = e^x$$

L'exponentielle ne s'annulant pas, le polynôme P est non nul. Toutes les fonctions en jeu étant dérivables, la dérivation membre à membre de cette égalité aboutit à $\forall x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = e^x = P(x)$, ie $P = P'$, ce qui est absurde car P étant non nul, on a $\deg P' < \deg P$.

Un mot sur le degré des polynôme

Attention, le polynôme nul est le seul polynôme P dont la dérivée P' est de même degré que P . Par convention ce degré est $-\infty$ (ceci sera revu prochainement et n'est pas très important en première lecture).

18 ↻

On va démontrer que, pour tout entier naturel n , F_n est pair *si et seulement si* n est divisible par 3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $HR(n)$ la proposition F_{3n} est pair, F_{3n+1} et F_{3n+2} sont impairs.

⇒ Comme $(F_0, F_1, F_2) = (0, 1, 1)$, la proposition HR(0) est vraie.

⇒ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons HR(n) vraie.

☞ Comme $F_{3n+3} = F_{3n+2} + F_{3n+1}$, F_{3n+3} est pair en tant que somme de deux nombres impairs.

☞ Comme $F_{3n+4} = F_{3n+3} + F_{3n+2}$, F_{3n+4} est impair en tant que somme de deux nombres de parités différentes.

☞ Comme $F_{3n+5} = F_{3n+4} + F_{3n+3}$, F_{3n+5} est impair en tant que somme de deux nombres de parités différentes.

Commentaire

C'est l'examen des premiers termes de la suite qui permet de conjecturer le résultat et laisse entrevoir une résolution par récurrence :

$F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, F_3 = 2, F_4 = 3, F_5 = 5, F_6 = 8, F_7 = 13, F_8 = 21, F_9 = 34, F_{10} = 55$, etc.

19 ↻

Soit $a \in \mathbb{R}$. Notons E_a l'équation $|x - a| - |x + a| = |x - 1|$ et $\mathcal{S}_a$ l'ensemble des solutions de E_a dans $\mathbb{R}$.

⇒ Cas 1 : $a \geq 1$.

☞ Soit $x \geq a$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } E_a &\iff x - a - x - a = x - 1 \\ &\iff x = 1 - 2a \end{aligned}$$

Comme $1 - 2a < a$, E_a n'a pas de solution dans $[a, +\infty[$.

☞ Soit $x \leq -a$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } E_a &\iff -x + a + x + a = 1 - x \\ &\iff x = 1 - 2a \end{aligned}$$

Comme $1 - 2a \leq -a$, E_a admet une seule solution $(1 - 2a)$ dans $] -\infty, -a]$.

☞ Soit $x \in [-a, 1]$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } E_a &\iff -x + a - x - a = 1 - x \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

Comme $-a \leq -1$, E_a admet une seule solution (-1) dans $] -a, 1]$.

☞ Soit $x \in]1, a[$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } E_a &\iff -x + a - x - a = x - 1 \\ &\iff x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi E_a n'admet aucune solution dans $]1, a[$.

On a donc $\mathcal{S} = \{-1, 1 - 2a\}$.

⇒ Cas 2 : $0 < a < 1$.

☞ Soit $x \geq 1$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } E_a &\iff x - a - x - a = x - 1 \\ &\iff x = 1 - 2a \end{aligned}$$

Comme $1 - 2a < 1$, E_a n'a pas de solution dans $[1, +\infty[$.

☞ Soit $x \leq -a$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } E_a &\iff -x + a + x + a = 1 - x \\ &\iff x = 1 - 2a \end{aligned}$$

Comme $1 - 2a > -a$, E_a n'admet aucune solution dans $] -\infty, -a]$.

☞ Soit $x \in] -a, a]$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } E_a &\iff -x + a - x - a = 1 - x \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

Comme $-a > -1$, E_a n'admet aucune solution dans $] -a, a]$.

☞ Soit $x \in]a, 1[$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } E_a &\iff x - a - x - a = 1 - x \\ &\iff x = 1 + 2a \end{aligned}$$

Ainsi E_a n'admet aucune solution dans $]a, 1[$.

On a donc $\mathcal{S} = \emptyset$.

Commentaire sur cette solution

La rédaction proposée ne reflète en rien la façon dont la solution a été élaborée. Voici quelques éclaircissements.

⇒ Pour simplifier $|x \pm a|$ et $|x - 1|$, il faut connaître la position de x par rapport à $\pm a$ et 1. On commence donc par positionner 1 par rapport à a et $-a$ puis on résout l'équation sur chacun des quatre intervalles.

⇒ Considérons par exemple le cas où $-a \leq 1 \leq a$. Ceci équivaut $a \geq 1$

☞ Cas 1 : $a \geq 1$. On résout sur $] -\infty, -a[$, $[-a, 1[$, $[1, a[$ puis $[a, +\infty[$.

☞ Par exemple, pour $x \geq a$, on a

$$|x - a| - |x + a| = |x - 1| \iff -2a = x - 1 \iff x = 1 - 2a$$

Il reste alors à savoir si $1 - 2a$ vérifie $1 - 2a \geq a$, ie $a \geq \frac{1}{3}$. Comme $a \geq 1$, c'est bien le cas donc le réel $1 - 2a$ est bien solution.

☞ Et ainsi de suite...