



Il faut s'entraîner aux incessants allers-retours entre les points de vue géométrique et numérique.



Blek Le Rat, Banksy

12	Représentation matricielle des applications linéaires	1
1	Quiz	2
2	Exercices élémentaires	3
3	Exercices classiques plus techniques	5
4	Indications	7
5	Solutions	9

1. Quizz



Vrai ou faux ? *f*

1. Il existe une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de matrices de rang 1; 2. Une matrice nilpotente appartient à $\mathcal{F}_n^{++}(\mathbb{K})$.
3. Pour tout projecteur p de \mathbb{R}^n , il existe une base \mathcal{B} telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = J_r$;
4. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, AB n'est pas inversible; 5. $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$, AB n'est pas inversible;
6. $GL_n(\mathbb{K})$ est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$; 7. Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB \in GL_n(\mathbb{K}) \iff (A, B) \in GL_n(\mathbb{K})^2$.
8. La matrice dans une base d'une symétrie est symétrique; 9. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\text{rg } M \leq 1 \iff \exists (X, Y) \in (\mathbb{K}^n)^2$, $M = XY^T$;
10. $\forall (i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$, $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,\ell}E_{i,k}$; 11. $\forall (\lambda, M) \in \mathbb{K} \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $(\exists X \neq 0, MX = \lambda X) \iff \text{rg}(M - \lambda I_n) < n$;
12. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si $\exists P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(0) \neq 0$ et $P(A) = 0$, alors A est inversible;
13. L'espace des $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de trace nulle est de dimension n ;
14. L'application $u: \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ est linéaire $\iff \exists A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $u: X \mapsto AX$;
15. Pour tout $l \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, on a $\text{tr } f = \text{rg } f$; 16. Si s est une symétrie de \mathbb{R}^n , alors $\text{tr } s \in \llbracket -n, n \rrbracket$;
17. $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, X et X^T ont le même noyau; 18. $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, X est nilpotente $\iff X^T$ est nilpotente.



QCM sur les matrices *f*

1. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a. f est un projecteur de \mathbb{R}^3 ; 2. $\text{rg } f = 2$; 3. $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 ;
 4. $\text{Ker } f^2$ et $\text{Im } f^2$ sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 ;
2. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ base de \mathbb{R}^3 et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = T$ où $T := \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$.
 - a. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\mathcal{B}_\lambda = (\lambda e_1, \lambda e_2, \lambda e_3)$, $\text{mat}_{\mathcal{B}_\lambda}(u) = T$; 2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\mathcal{B}_\lambda = (e_1, \lambda e_2, \lambda^2 e_3)$, $\text{mat}_{\mathcal{B}_\lambda}(u) = T$;
 - b. Pour $\mathcal{B}' = (e_3, e_2, e_1)$, on a $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} c & b & a \\ e & d & 0 \\ f & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 4. Pour $\mathcal{B}'' = (e_1 + e_2, e_3 - e_2, e_1)$, on a $\text{mat}_{\mathcal{B}''}(u) = \begin{pmatrix} c & b & a \\ e & d & 0 \\ f & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ de rang r où E est un \mathbb{K} -ev de dimension n .
 - a. Si S est supplémentaire de $\text{Ker } u$ dans E , T un supplémentaire de $\text{Im } u$ dans E , \mathcal{B} est une base adaptée à $E = S \oplus \text{Ker } u$ et \mathcal{C} est une base adaptée à $E = \text{Im } u \oplus T$ alors

$$\exists A \in GL_r(\mathbb{K}), \text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
 - b. Il existe une base \mathcal{D} telle que $\text{mat}_{\mathcal{D}}(u) = J_r$;
4. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - a. $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $A = PB \iff \text{Ker } A = \text{Ker } B$; 2. $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $A = BP \iff \text{rg } A = \text{rg } B$;
 3. $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$, $A = BP \iff \text{Im } A = \text{Im } B$; 4. $\exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{R})^2$, $A = QBP \iff \text{rg } A = \text{rg } B$.
5. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ nilpotent. On pose $N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - a. Si $\text{rg } u = 1$, alors il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = N_1$;
 - b. Si $\text{rg } u = 2$, alors il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = N_2$;
 - c. Il existe une base \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) \in \{N_1, N_2\}$.

2. Exercices élémentaires

3  

Polynômes

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $A = a + bX + cX^2$ un élément de E . On définit l'application f par $\forall P \in E, f(P) = (AP)''$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Donner la matrice M de f dans la base canonique de E .
3. Déterminer une condition sur A pour que f soit bijective.
4. On pose $A = X^2 + 1$. Déterminer M^{-1} et M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans ce cas.

4  

Un endomorphisme nilpotent

Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \ni P \mapsto P(X+2) + P(X) - 2P(X+1)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. En déduire $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$.
3. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}_3[X]$ dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5  

Une projection

Soit P le plan de \mathbb{R}^3 d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection sur P parallèlement à D . Donner la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
3. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de p est diagonale.

6  

Sans calculs

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer *sans calcul* des bases de $\text{Ker } A$ et $\text{Im } A$.

7  

Permutation des vecteurs de base

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de \mathbb{R}^3 et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$.

Déterminer la matrice de u dans la base $\mathcal{B}' := (e_2, e_3, e_1)$.

8  

Matrice d'un endomorphisme

Dans le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on pose $\mathcal{B} = (\cos, \sin, \cosh, \sinh)$ et $V = \text{Vect } \mathcal{B}$.

1. Justifier que V est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension quatre.
2. Vérifier que la dérivation induit sur V un endomorphisme. On le notera δ .
3. Calculer $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\delta)$.
4. Justifier que δ est un automorphisme de V . En déduire *sans calcul* l'existence et l'expression de M^{-1} .

9 ?

Puissances entières

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $(A - I_3)^2$ puis en déduire les valeurs de A^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

10 ?

Espaces de polynômes

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et f l'application définie sur l'espace E par $f(P) = P + P'$.

1. Prouver que f est un endomorphisme de E .
2. On note \mathcal{B}_0 la base canonique de E . Déterminer la matrice $M = \text{mat}_{\mathcal{B}_0}(f)$.
3. Etablir que f est un automorphisme de E et calculer M^{-1} .
4. En déduire la solution P de $P + P' = X^2 + X + 1$.

11 ?

Matrice d'un projecteur

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de \mathbb{R}^2 et f la projection sur $\text{Vect}(e_1)$ parallèlement à $\text{Vect}(e_1 + e_2)$.

1. Déterminer $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.
2. Même question avec $\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f)$ où \mathcal{B}' est la base $(e_1 - e_2, -2e_1 + 3e_2)$ de \mathbb{R}^2 .
3. Même question avec $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

12 ?

Un changement de base f

Soit P la matrice de passage de $\mathcal{B} = (X^k)_{0 \leq k \leq n}$ de $\mathbb{R}_n[X]$ à la base $\mathcal{B}' = ((X-1)^k)_{0 \leq k \leq n}$. Expliciter P et P^{-1} .

13 ?

Un calcul de rang f

Soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $A := \begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_2 & \vdots & \dots & \vdots & \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ a_n & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$. Discuter le rang de A et de A^2 en fonction des a_i .

14 ?

Etude d'un isomorphisme f

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $M \mapsto f(M) = M + (\text{tr } M)I_n$. Prouver que f est un isomorphisme et calculer son inverse.

15 ?

Diagonalisation d'une symétrie f

Soit $s: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (5x + 6y + 6z, -2x - 3y - 2z, -2x - 2y - 3z)$ et \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^3 .

1. Déterminer $M := \text{mat}_{\mathcal{B}}(s)$.
2. Justifier que s est une symétrie de \mathbb{R}^3 .
3. En déduire l'existence d'une matrice $Q \in \text{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $M = Q^{-1}DQ$ où $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

16  Diagonalisation d'un projecteur et d'une symétrie *f*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, notée n .

1. Soit p un projecteur de E , peut-on trouver une base dans laquelle la matrice de p est diagonale ?
2. Même question pour une symétrie (on rappellera au passage la définition d'une symétrie de E).

3. Exercices classiques plus techniques

17  Formule à trois bases *f*

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, \mathcal{B}_1 , \mathcal{B}_2 et \mathcal{B}_3 trois bases de E . Pour $(i, j) \in [1, 3]^3$, on note $P_{i,j}$ la matrice \mathcal{B}_i à \mathcal{B}_j . Exprimer $P_{1,3}$ en fonction de $P_{1,2}$ et $P_{2,3}$.

18  Le commutant d'une matrice *f*

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et φ_A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_A : M \mapsto AM - MA$.

1. Prouver que φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le noyau et l'image de φ_A .
3. En déduire que le commutant de A , ie l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A , est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on donnera une base.

19  Produits hétérogène *f*

Soit $A \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R})$.

1. Démontrer que AB n'est pas inversible.
2. Qu'en est-il de BA ?

20  Espace vectoriel engendré par le groupe linéaire *f*

1. Montrer que, pour tout $(i, j) \in [1, n]^n$, $I_n + E_{i,j}$ est inversible.
2. En déduire que $\text{VectGL}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

21  Une réduction *f*

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $\exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, $\lambda \neq \mu$ tels que $(u - \lambda \text{id}_E) \circ (u - \mu \text{id}_E) = 0$.

1. Montrer que $E = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u - \mu \text{id}_E)$.
2. Montrer que l'existence d'une base de E où la matrice de u est diagonale.

22  Équation $u^2 = -\text{id}_E$ *f*

Soit E un espace vectoriel réel de dimension 2 et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $u^2 = -\text{id}_E$.

Montrer qu'il existe une base \mathcal{B} de E telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

23*Étude d'un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$* **f**

On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ où $n \geq 3$, pour $P \in E$, on pose $\phi(P) := (X - 1)P' + P''(0)$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E .
2. Donner la matrice M de ϕ dans la base canonique de E .
3. Déterminer $\text{Ker } \phi$ et $\text{rg } \phi$.
4. En déduire que $\text{Im } \phi = \{Q \in E; Q(0) + Q'(0) = 0\}$.

4. Indications

1 ↪ _____

N'hésitez pas à considérer des matrices de aille deux afin de se forger une intuition.

2 ↪ _____

Il est recommandé d'avoir traité les exercices de AN 12 avant d'aborder ce QCM.

3 ↪ _____

On trouve $M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$.

4 ↪ _____

S'aider de la base canonique au 3.

5 ↪ _____

Pour $X \in \mathbb{R}^3$, rechercher l'unique $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X - \lambda u \in P$.

6 ↪ _____

Chercher des relations de liaisons sur les colonnes de A.

7 ↪ _____

Revenir à la définition de la matrice de u dans une base.

8 ↪ _____

On trouve $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

9 ↪ _____

On trouve que $(A - I_3)^2 = 0$.

10 ↪ _____

Tout traiter matriciellement.

11 ↪ _____

On peut calculer la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' mais ce n'est pas indispensable.

12 ↪ _____

Utiliser la formule du binôme.

13

On pourra poser $\sigma := a_1^2 + \dots + a_n^2$.

14

Look at the kernel of f or be smart.

15

Pour une symétrie s , on a $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(s + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \text{Ker}(s - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.

16

Exploiter les décompositions $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$ et $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

17

Revenir par exemple à la définition : $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$.

18

Travaillez dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Traiter toutes les questions matriciellement.

19

Intéressez-vous au rang de AB (le comparer à ceux de A et B).

20

Au 2., il suffit de montrer que $\text{VectGL}_n(\mathbb{K})$ contient une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

21

Effectuer une analyse-synthèse au 1.

22

Commencez par une analyse.

23

Quelle st la dimension de $\{Q \in E; Q(0) + Q'(0) = 0\}$,

5. Solutions

1 ↻

1. Vrai. La base canonique convient.
2. Faux. Cex $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. Vrai. Il suffit de choisir une base adaptée à $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$.
4. Vrai. On a $\text{rg } AB \leq \text{rg } A \leq 2$ et $AB \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ donc AB est non inversible.
5. Faux. Cex $A = B^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
6. Faux. $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas stable par l'addition : $I_n - I_n \notin \text{GL}_n(\mathbb{K})$.
7. Vrai. Un produit de matrices inversibles est inversible. Réciproquement, si AB est inversible, comme $\text{rg } AB = n \leq \text{rg } A$ on a $\text{rg } A = n$. De même pour B . Ainsi, A et B sont inversibles.
8. Faux. Cex $S = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ vérifie $S^2 = I_2$ mais n'est pas symétrique.
9. Vrai. Si $M = XY^\top$, alors $\text{Im } M \subset \text{Vect } X$ donc $\text{rg } M \leq 1$. Supposons $\text{rg } M = 1$. Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $\text{Im } M = \text{Vect } X$. Pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la i -ème colonne de M est de la forme $y_i X$. En posant Y l'élément de \mathbb{R}^n de composantes y_1, \dots, y_n , on a donc $M = XY^\top$. Si $M = 0$, pour $X = Y = 0$, on a bien $M = XY^\top$.
10. Faux. La relation correcte est $\forall (i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4, E_{i,j} E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$.
11. Vrai. L'existence X non nul tel que $MX = \lambda X$ est équivalente à $\text{Ker}(M - \lambda I_n) \neq \{0\}$, c'est-à-dire $\text{rg}(M - \lambda I_n) < n$.
12. Vrai. Écrivons $P(X) = p_0 + XQ(X)$ avec Q polynôme et $p_0 \neq 0$. On a $p_0 I_n = -AQ(A)$ donc A est inversible d'inverse $-p_0^{-1}Q(A)$.
13. Faux. Ce sev est le noyau de $f : X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \text{tr } X \in \mathbb{K}$ qui est de rang 1 donc son noyau est de dimension $n^2 - 1$.
14. Vrai. Si $u : \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n$ est linéaire, alors u est l'endomorphisme canoniquement associé à sa matrice dans les bases canoniques de \mathbb{K}^p et \mathbb{K}^n . La réciproque est évidente.
15. Faux. Cex : l'endomorphisme canoniquement associé à $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
16. Vrai. En notant \mathcal{B} une base adaptée à $\mathbb{R}^n = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ on a

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

donc $\text{tr}(s) = p - q \in \llbracket -n, n \rrbracket$ car $p + q = n$.

17. Faux. Cex $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
18. Vrai car $\forall k \in \mathbb{N}, (A^\top)^k = (A^k)^\top$.

2 ↻

1. Seuls b. et d. sont vrais. Notons (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{R}^3 .
 - a. On a $f^2 \neq f$ car $A^2 \neq A$.
 - b. L'image de A est engendrée par ses deux dernières colonnes qui ne sont pas colinéaires donc $\text{rg } f = \text{rg } A = 2$.
 - c. On a $e_1 \in \text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f)$ donc $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f)$ n'est pas direct.
 - d. On vérifie que $\text{Ker}(f^2) = \text{Vect}(e_1, e_2)$ et $\text{Im}(f^2) = \text{Vect}(3e_1 + e_2 + e_3)$ donc ces deux sev de \mathbb{R}^3 sont supplémentaires.
2. Seul a. est vrai.
 - a. On a $\text{mat}_{\mathcal{B}_\lambda}(f) = P^{-1} \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) P = T$ car $P = \lambda I_n$ et $P^{-1} = \lambda^{-1} I_n$.

b. On a $\text{mat}_{\mathcal{B}_\lambda}(f) = P^{-1} \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) P = \begin{bmatrix} a & \lambda b & \lambda^2 c \\ 0 & d & \lambda e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$ car $P = \text{Diag}(1, \lambda, \lambda^2)$ et $P^{-1} = \text{Diag}(1, \lambda^{-1}, \lambda^{-2})$.

c. On a $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1} \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) P = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ e & d & 0 \\ c & b & a \end{bmatrix}$ car $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = P^{-1}$.

d. On a $\text{mat}_{\mathcal{B}''}(f) = P^{-1} \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) P = \begin{bmatrix} d & -d+e+f & 0 \\ 0 & f & 0 \\ a+b-d & -b+c+d-e-f & a \end{bmatrix}$ car $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ et $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

3. Seul a est vrai.

- Le a. est vrai. Par le théorème du rang, u induit sur S un isomorphisme sur son image, la matrice A est celle de l'isomorphisme $u|_S^{\text{Im}(u)}$.
- Le b. est faux car équivalent à u est un projecteur.

4. Seuls a., c. et d. sont vrais.

- Nous abordons uniquement le sens non trivial de l'implication. Notons a et b les endomorphismes canoniquement associés à A et B . Soit m leur rang commun, (e_1, \dots, e_m) une base d'un supplémentaire de $\text{Ker } b = \text{Ker } a$, (e'_1, \dots, e'_{n-m}) et (f_1, \dots, f_{n-m}) des bases d'un supplémentaire de $\text{Im } a$ et d'un supplémentaire de $\text{Im } b$. On sait alors que $(b(e_1), \dots, b(e_m))$ est une base de $\text{Im } b$. Soit u l'unique endomorphisme de \mathbb{R}^n défini par $u(b(e_i)) = a(e_i)$ pour $1 \leq i \leq m$ et $u(f_i) = e'_i$ pour $1 \leq i \leq n - m$. On a que u est bijectif (car envoie $\text{Im } b$ sur $\text{Im } a$ bijectivement et envoie un supplémentaire de $\text{Im } b$ sur un supplémentaire de $\text{Im } a$ bijectivement) et vérifie $a = u \circ b$.
- Pour $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\text{rg } A = \text{rg } B = 1$ mais $\text{Im } A \neq \text{Im } B$ donc $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$, $A = BP$.
- Nous abordons uniquement le sens non trivial de l'implication. Notons a et b les endomorphismes canoniquement associés à A et B . Soit m leur rang commun, (e_1, \dots, e_m) une base d'un supplémentaire de $\text{Ker } a$, (e'_1, \dots, e'_m) une base d'un supplémentaire de $\text{Ker } b$ telle que $a(e_i) = b(e'_i)$ (ceci est possible car $\text{Im } a = \text{Im } b$), (f_1, \dots, f_{n-m}) et (f'_1, \dots, f'_{n-m}) des bases de $\text{Ker } a$ et $\text{Ker } b$. Soit u l'unique endomorphisme de \mathbb{R}^n défini par $u(e_i) = e'_i$ pour $1 \leq i \leq m$ et $u(f_i) = f'_i$ pour $1 \leq i \leq n - m$. On a que u est bijectif (car envoie bijectivement un supplémentaire de $\text{Ker } a$ sur un supplémentaire de $\text{Ker } b$ et envoie bijectivement $\text{Ker } a$ sur $\text{Ker } b$) et vérifie $a = b \circ u$.
- La multiplication par une matrice inversible conserve le rang et, pour la réciproque : par algorithme de Gauss-Jordan, $A = PJ_r Q$ avec P, Q inversible et $r = \text{rg } A$.

5. Seuls a. et c. sont vrais.

- Supposons u de rang 1. Alors $u^2 = 0$ ($\text{rg } u^2 < \text{rg } u$ sinon toutes les puissances suivantes de u seraient de rang 1). Comme $\text{Im } u \subset \text{Ker } u$, il existe une base du noyau de u de la forme $(u(e_1), e_2)$. Comme $e_1 \notin \text{Ker } u$, $\mathcal{B} = (u(e_1), e_2, e_1)$ est une base de \mathbb{R}^3 et $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = N_1$.
- Supposons u de rang 2. Alors $\text{Im } u \not\subset \text{Ker } u$ donc $u^2 \neq 0$ et fixons $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Ker } u^2$. On vérifie que $\mathcal{B} = (u^2(x), u(x), x)$ est une base de E et $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = N_2$.
- Il manque le cas $u = 0$ (le cas u inversible est ici impossible par nilpotence de u).

Enseignements à tirer de cet exercice

- ⇒ Au 3., on peut modifier le b. de la sorte : en notant (e_1, \dots, e_r) les premiers vecteurs de \mathcal{B} , et en choisissant \mathcal{C}' base adaptée à $E = \text{Im}(u) \oplus T$ de premiers vecteurs $u(e_1), \dots, u(e_r)$ (c' est le théorème de rang qui justifie que c' est possible), on a $\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}'}(u) = J_r$.
- ⇒ On peut aborder le 5. par analyse-synthèse : si une telle base (e_1, e_2, e_3) existe (cas de N_2), alors $u(e_1) = 0$, $u(e_2) = e_1$ et $u(e_3) = e_2$. On a donc $(e_1, e_2, e_3) = (u^2(e_3), u(e_3), e_3)$. La réciproque étant claire, il s'agit de prouver l'existence d'une base de cette forme.

3



1. Comme $A, P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\text{deg}(AP) \leq 4$. Ainsi $\text{deg}(AP)'' \leq 2$ i.e. $f(P) \in E$.

2. $f(1) = 2c$, $f(X) = 2b + 6cX$, $f(X^2) = 2a + 6bX + 12cX^2$. Ainsi $M = \begin{pmatrix} 2c & 2b & 2a \\ 0 & 6c & 6b \\ 0 & 0 & 12c \end{pmatrix}$.

3. $\det M = 144c^3$. Ainsi M est inversible *si et seulement si* $c \neq 0$ i.e. $\deg A = 2$.
4. On a alors $a = 1$, $b = 0$ et $c = 0$. Ainsi $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. On sait que les coefficients diagonaux d'un produit de matrice triangulaire sont les produits des coefficients diagonaux. De plus, on voit sur quelques exemples que les coefficients de la surdiagonale de M sont nuls. On est donc amené à formuler l'hypothèse de récurrence $HR(n)$ suivante $M^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & a_n \\ 0 & 6^n & 0 \\ 0 & 0 & 12^n \end{pmatrix}$. $HR(0)$ est évidemment vraie. On suppose $HR(n)$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. $M^{n+1} = M^n \cdot M$. Comme M^n et M sont triangulaires supérieures, M^{n+1} est triangulaire supérieure et les coefficients diagonaux de M^{n+1} sont 2^{n+1} , 6^{n+1} et 12^{n+1} . On s'aperçoit également que les coefficients de la surdiagonale de M^{n+1} sont nuls. M^{n+1} est bien de la forme annoncé et on obtient en plus, $a_{n+1} = 2^{n+1} + 12a_n = 2a_n + 2 \cdot 12^n$. Ainsi $a_n = \frac{12^n - 2^n}{5}$. Après tout calcul, on trouve

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix}$$

4 ↻

1. Les applications $P \mapsto P(X+a)$ pour $a \in \mathbb{R}$ sont linéaires. Donc f est bien linéaire comme somme d'applications linéaires. De plus, $\deg P(X+a) = \deg(P)$ pour $a \in \mathbb{R}$. Donc $\deg f(P) \leq \max(\deg P(X+1), \deg P(X-1), \deg P) = \deg P$. Ainsi f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Des calculs élémentaires aboutissent à :

$$\begin{aligned} f(1) &= 0 & f(X^2) &= (X+2)^2 + X^2 - 2(X+1)^2 = 2 \\ f(X) &= (X+2) + X - 2(X+1) = 0 & f(X^3) &= (X+2)^3 + X^3 - 2(X+1)^3 = 6X + 6 \end{aligned}$$

La matrice de f dans la base canonique est donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Il est alors clair que $\text{Ker } f = \text{Im } f = \text{Vect}(1, X)$.

3. Aidons nous de la matrice de f . On remarque que

$$f(1) = f(X) = 0 \quad , \quad f\left(\frac{X^2}{2}\right) = 1 \quad , \quad f\left(\frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{2}\right) = X$$

La famille $\mathcal{B} := \left(1, X, \frac{X^2}{2}, \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{2}\right)$ est libre (car de degré échelonnés). Puisqu'elle comporte 4 vecteurs et $\dim \mathbb{R}_3[X] = 4$, c'est une base de $\mathbb{R}_3[X]$. On a bien

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Généralisation

On peut en fait montrer que pour tout endomorphisme f d'un espace vectoriel de dimension $2n$ tel que $\text{Ker } f = \text{Im } f$, il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}$.

5 ↻

1. On a $\dim P = 2$ et $D = \text{Vect } u$ avec $u = (1, 2, 3)^\top$ donc $\dim D = 1$, ainsi $\dim \mathbb{R}^3 = \dim P + \dim D$. Comme $u \notin P$, D et P sont en somme directe. D'où $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit $X := (x, y, z)^\top$. Par le 1., il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X - \lambda u \in P$, i.e. $(x - \lambda, y - 2\lambda, z - 3\lambda)^\top \in P$. On a donc $x + y + z = 6\lambda$ d'où

$$p(X) = \left(x - \frac{x+y+z}{6}, y - 2\frac{x+y+z}{6}, z - 3\frac{x+y+z}{6}\right)^\top = \frac{1}{6} (5x - y - z, -2x + 4y - 2z, -3x - 3y + 3z)^\top$$

La matrice dans la base canonique de \mathbb{R}^3 de p vaut donc $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$.

3. La matrice de p est diagonale dans toute base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$, par exemple dans la base (a, b, u) où $a = (1, -1, 0)$ et $b = (1, 0, -1)$.

6 ↻

Notons C_1, C_2, C_3 et C_4 les colonnes de $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

⇒ On remarque que $C_3 = 0, C_4 = -2C_1$ et (C_1, C_2) est libre. On en déduit que f est de rang 2 et que $(f(e_1), f(e_2)) = (-e_2 + e_3, 2e_1)$ est une base de $\text{Im } f$.

⇒ Par les relations de liaisons données ci-dessus, on sait que les vecteurs e_3 et $2e_1 + e_4$ appartiennent à $\text{Ker } f$. Comme ils ne sont pas colinéaires et que $\dim \text{Ker } f = 2$ par le théorème du rang, ils forment une base de $\text{Ker } f$.

7 ↻

On a $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(u) = \begin{pmatrix} e & f & d \\ h & i & g \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

8 ↻

- Il s'agit de montrer que \mathcal{B} est libre. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $a \cos + b \sin + c \cosh + d \sinh = 0$. En évaluant en 0, on trouve $a + c = 0$. En dérivant deux fois puis en évaluant en 0, on obtient $-a + c = 0$. Ainsi $a = c = 0$. En dérivant une fois, puis trois fois, on obtient après évaluation en 0 : $b + d = 0$ et $-b + d = 0$; d'où $b = d = 0$. Ainsi, \mathcal{B} est libre.
- Comme $\sin' = \cos, \cos' = -\sin, \sinh' = \cosh, \cosh' = \sinh$ et la dérivation est linéaire, V est stable par la dérivation.
- Par la question précédente $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- Les colonnes de M étant clairement libres, M est inversible : δ est donc un automorphisme de V . Les calculs du 1.b. permettent de conclure directement que

$$M^{-1} = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\delta^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9 ↻

⇒ On trouve que $(A - I_3)^2 = 0$

⇒ En posant $N := A - I_3$, on a donc $A = I_3 + N$ où $N^2 = 0$. Comme N et I_3 commutent, on déduit de la formule du binôme que

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} N^k = I_n + nN = (1 - n)I_3 + nA$$

Comme $N^2 = 0$, on a $(I_3 - nN)(I_3 + nN) = I_3$ et A^n est inversible et $A^{-n} = I_n - nN = (1 + n)I_3 - nA$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{Z}, A^n = (1 - n)I_n + nA$.

Commentaire

Plus généralement, pour $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ nilpotente, $I_n - N$ est inversible et $(I_n - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1} N^k$.

10 ↻

- Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Puisque P' est alors de degré au plus un, $f(P)$ est de degré au plus deux donc appartient à $\mathbb{R}_2[X]$. L'application f est clairement linéaire par linéarité de la dérivation sur $\mathbb{R}_2[X]$: on a bien $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$.

2. On a clairement $f(1) = 1$, $f(X) = 1 + X$ et $f(X^2) = 2X + X^2$. Ainsi, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. La matrice M étant clairement de rang 3, f est un automorphisme de E . Invertisons M par la méthode du pivot :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

par les opérations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$. Ainsi M est inversible et $M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Notons U le vecteur colonne des coordonnées du polynôme $P = f^{-1}(1 + X + X^2)$ dans la base canonique de E . Puisque le vecteur colonne des coordonnées de $1 + X + X^2$ dans la base canonique de E est $V = (1, 1, 1)^T$, on a $U = M^{-1}V$, c'est-à-dire $U = (2, -1, 1)^T$ et donc $P = 2 - X + X^2$.

11



1. Comme $f(e_1) = e_1$ et $f(e_2 + e_1) = 0$, on a $f(e_2) = -f(e_1) = -e_1$ d'où la matrice $M = \text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Par le 1., on a $f(e_1 - e_2) = f(e_1) - f(e_2) = 2e_1$ et $f(-2e_1 + 3e_2) = -2f(e_1) + 3f(e_2) = -5e_1$ d'où la matrice $\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Comme la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' vaut $P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 6 & -15 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$$

12



On numérotera exceptionnellement les colonnes et les lignes à partir de 0.

$$\Rightarrow \text{Comme } (X-1)^k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (-1)^{k-\ell} X^\ell, \text{ on a } P = \left(\binom{j}{i} (-1)^{j-i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}.$$

$$\Rightarrow \text{Comme } X^k = (X-1+1)^k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} (X-1)^\ell, \text{ on a } P^{-1} = \left(\binom{j}{i} \right)_{0 \leq i, j \leq n}.$$

13



Notons $L = [a_1, a_2, \dots, a_n] \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $\sigma := a_1^2 + \dots + a_n^2$. Par un calcul (par exemple par blocs), on obtient que

$$A = \left(\begin{array}{c|c} 0 & L \\ \hline L^T & 0 \end{array} \right) \text{ et } A^2 = \left(\begin{array}{c|c} \sigma & 0 \\ \hline 0 & L^T L \end{array} \right)$$

Les n dernières colonnes de A étant deux à deux colinéaires, on a dans tous les cas que $\text{rg } A \leq 2$.

\Rightarrow Cas 1 : $\forall i \in [1, n], a_i = 0$. Dans ce cas, on a clairement $\text{rg } A = \text{rg } A^2 = 0$.

\Rightarrow Cas 2 : $\exists i \in [1, n], a_i \neq 0$. Dans ce cas, la première colonne et la colonne $n^o i + 1$ de A sont non colinéaires donc $\text{rg } A = 2$. De plus, $\sigma \neq 0$ (car les a_i sont réels) et $\text{rg } LL^T = 1$. On en déduit que $\text{rg } A^2 = 2$ (la première colonne de A^2 n'est pas combinaison linéaire des autres).

14



\Rightarrow Prouvons que f est linéaire. Pour $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(M + \lambda N) &= M + \lambda N + \text{tr}(M + \lambda N)I_n = M + \lambda N + \text{tr}(M)I_n + \lambda \text{tr}(N)I_n \\ &= M + \text{tr}(M)I_n + \lambda M + \lambda \text{tr}(N)I_n = f(M) + \lambda f(N) \end{aligned}$$

⇒ Puisque f est linéaire et que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie, il suffit de prouver que f est surjective. Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Une matrice M est un antécédent par f de N si et seulement si $M + \text{tr}(M)I_n = N$. Si un tel M existe, on a nécessairement $\text{tr}(M + \text{tr}(M)I_n) = \text{tr}(N)$, ie $(n + 1) \text{tr}(M) = \text{tr}(N)$, d'où $M = N - \text{tr}(M)I_n = N - \frac{\text{tr}(N)}{n+1}I_n$. On vérifie alors que cette formule fourni un antécédent de N par f :

$$f\left(N - \frac{\text{tr}(N)}{n+1}I_n\right) = N - \frac{\text{tr}(N)}{n+1}I_n + \text{tr}\left(N - \frac{\text{tr}(N)}{n+1}I_n\right)I_n = N - \frac{\text{tr}(N)}{n+1} + \text{tr}(N)I_n - \frac{n \text{tr}(N)}{n+1}I_n = N$$

15 ↻

1. On a directement par la définition de la matrice d'une application linéaire dans une base que $M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

2. Comme $M^2 = I_3$, on a $s^2 = \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ donc s est une symétrie de \mathbb{R}^3 .

3. Puisque s est une symétrie que \mathbb{R}^3 , on a $\mathbb{R}^3 = \text{Ker}(s - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$.

⇒ Le sev $\text{Ker}(s - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène de matrice

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ -2 & -4 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

Après tout calcul, on trouve que $\text{Ker}(s - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(u_1)$ où $u_1 := (-3, 1, 1)$.

⇒ Le sev $\text{Ker}(s + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène de matrice

$$M + I_3 = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ -2 & -2 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

donc d'équation $x + y + z = 0$. Ainsi $\text{Ker}(s + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{Vect}(u_2, u_3)$ où $u_2 := (1, -1, 0)$ et $u_3 = (0, 1, -1)$.

La famille $\mathcal{B}' := (u_1, u_2, u_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 adaptée à la décomposition en somme de noyaux mise en évidence ci-dessus. On a clairement $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(s) = D$ et donc $M = Q^{-1}DQ$ où Q est la matrice de passage de \mathcal{B}' à \mathcal{B} .

Commentaire

La démarche est ici naturelle : trouver Q inversible telle que $M = Q^{-1}DQ$ revient à trouver une base de \mathbb{R}^3 dans la quelle la matrice de s est D . Il est clair que s admet pour matrice D dans une base si et seulement si celle-ci est adaptée à la décomposition en somme de noyaux donnée ci-dessus (laquelle a été démontrée dans le cours sur les applications linéaires).

16 ↻

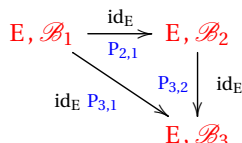
1. Soit \mathcal{B} une base de E adaptée à la décomposition $E = \text{Im } p \oplus \text{Ker } p$. On a $\text{mat}_{\mathcal{B}}(p) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ où $r := \text{rg } p$.

2. Soit s une symétrie de E et \mathcal{B} une base de E adaptée à la décomposition $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$. On a $\text{mat}_{\mathcal{B}}(s) = \begin{bmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_{n-m} \end{bmatrix}$ où $m := \dim \text{Ker}(s - \text{id}_E)$.

17 ↻

On donne deux solutions d'esprits différents.

⇒ En utilisant que la matrice de passage de \mathcal{B} à \mathcal{B}' est $\text{mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$. On commence par un petit diagramme afin d'y voir plus clair :



On déduit de la relation $\text{id}_E = \text{id}_E \circ \text{id}_E$ que $P_{3,1} = P_{3,2}P_{2,1}$.

⇒ Une version avec coordonnées. Soit x un vecteur de E . On note X_i ses coordonnées dans la base \mathcal{B}_i . On a $X_2 = P_{2,1}X_1$ et $X_3 = P_{3,2}X_2$ ainsi $X_3 = P_{3,2}P_{2,1}X_1$. Comme cela est vrai $\forall x \in E$, on a $P_{3,1} = P_{3,2}P_{2,1}$.

18



1. Soit $M, N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. D'après la structure d'algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\varphi_A(M + \lambda N) = A(\lambda M + N) = A(\lambda M) + AN = \lambda AM + AN = \lambda \varphi_A(M) + \varphi_A(N)$$

ainsi φ_A est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. ⇒ On a $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \text{Ker } \varphi_A \iff \varphi_A(M) = \begin{pmatrix} 2z-2y & -2x-3y+2t \\ 2x+3z-2t & 2y-2z \end{pmatrix} = 0$, ie $z - y = 2x + 3z - 2t = 0$.

Les éléments du noyau de φ_A sont donc les matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} t - \frac{3}{2}z & z \\ z & t \end{pmatrix}$.

⇒ D'après le théorème du rang, l'image de φ_A est de dimension 2. Puisque qu'elle est engendrée par l'image de la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que $\varphi_A(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $\varphi_A(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ forment une famille libre, c'est une base de $\text{Im } \varphi_A$.

3. Le commutant de A est égal au noyau de φ_A : $\text{Ker } \varphi_A = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.

19



1. Comme $\text{rg } AB \leq \text{rg } A \leq 3$ (le rang de A vaut celui de ses lignes) et $AB \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$, AB n'est pas inversible.

2. La matrice BA peut être inversible : pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $BA = I_3$.

20



1. La matrice $I_n + E_{i,j}$ est triangulaire supérieure sans zéro sur la diagonale donc elle est inversible.

2. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $E_{i,j} = I_n + E_{i,j} - I_n \in \text{VectGL}_n(\mathbb{R})$ donc $\text{VectGL}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car contient la base canonique.

21



1. ⇒ ANALYSE. Soit $x \in E$. Supposons que $x \in \text{Ker}(u - \text{lid}_E) \oplus \text{Ker}(u - \mu \text{id}_E)$. il existe alors $(a, b) \in E^2$ tel que $x = a + b$, $u(a) = \lambda a$ et $u(b) = \mu b$. En particulier $x = a + b$ et $u(x) = \lambda a + \mu b$ par linéarité de u .

En résolvant ces deux équations d'inconnues a et b , on en déduit que $a = \frac{u(x) - \mu x}{\lambda - \mu}$ et $b = \frac{u(x) - \lambda x}{\mu - \lambda}$.

Ceci démontre que la somme des deux noyaux est directe.

⇒ SYNTHÈSE. Soit $x \in E$. Posons $a := \frac{u(x) - \mu x}{\lambda - \mu}$ et $b := \frac{u(x) - \lambda x}{\mu - \lambda}$.

On a bien $a + b = x$. De plus, $(u - \text{lid}_E)(a) = \frac{(u - \text{lid}_E) \circ (u - \mu \text{id}_E)(x)}{\lambda - \mu} = 0$. Ainsi $a \in \text{Ker}(u - \text{lid}_E)$.

On démontre de même que $b \in \text{Ker}(u - \mu \text{id}_E)$ en remarquant que $u - \text{lid}_E$ et $u - \mu \text{id}_E$ commutent.

On a donc $E = \text{Ker}(u - \text{lid}_E) \oplus \text{Ker}(u - \mu \text{id}_E)$.

Commentaire

La démonstration ci-dessus est en fait valable même si E est de dimension infinie. E dimension finie, on peut aussi remarquer que les deux noyaux sont supplémentaires et déduire de l'inclusion $\text{Im}(u - \mu \text{id}_E) \subset \text{Ker}(u - \text{lid}_E)$ et du théorème du rang que la somme des dimensions des deux noyaux est supérieure ou égale à $\dim E$. On déduit de ces deux propriétés que les deux noyaux sont supplémentaires dans E .

2. En notant \mathcal{B} une base adaptée à la décomposition de E démontrée au a., on a

$$\text{mat}_f(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} \lambda I_p & 0 \\ 0 & \mu I_q \end{bmatrix} \quad \text{où } p = \dim \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) \text{ et } q = \dim \text{Ker}(u - \mu \text{id}_E)$$

22



Une analyse nous conduit à rechercher une base de la forme $(x, u(x))$. Soit $x \in E$ non nul. Montrons que $(x, u(x))$ est libre. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u(x) = \lambda x$. On a alors $-x = u^2(x) = \lambda^2 x$, d'où $\lambda^2 = -1$, ce qui est absurde car $\lambda \in \mathbb{R}$. La famille $\mathcal{B} := (x, u(x))$ est donc une base de E . On en déduit que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

23



1. Soit $(P, Q) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \phi(P + \lambda Q) &= (X - 1)(P + \lambda Q)' + (P + \lambda Q)''(0) = (X - 1)(P' + \lambda Q') + (P'' + \lambda Q'')(0) \\ &= (X - 1)(P' + \lambda Q') + P''(0) + \lambda Q''(0) = (X - 1)P' + P''(0) + \lambda((X - 1)Q' + Q''(0)) \\ &= \phi(P) + \lambda \phi(Q) \end{aligned}$$

Comme $\deg P' < \deg P$, on a $\deg \phi(P) \leq \deg P = n$ d'où $\phi(P) \in E$. Ainsi ϕ est un endomorphisme de E .

2. On a $\phi(1) = 0$, $\phi(X) = X$, $\phi(X^2) = (X - 1)2X + 2 = 2X^2 - 2X + 2$ et $\phi(X^k) = (X - 1)kX^{k-1} = kX^k - kX^{k-1}$ pour $k \geq 3$ d'où

$$A := \text{mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & 2 & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & & -n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

où \mathcal{B} est la base canonique de E .

3. Comme $\text{rg} A = n$ (première colonne nulle et les n suivantes échelonnées donc libres), on a $\text{rg} \phi = \text{rg} A = n$ d'où $\dim \text{Ker} \phi = 1$ par le théorème du rang. Comme $1 \in \text{Ker} \phi$, on en déduit que $\text{Ker} \phi = \text{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]$.

4. Notons $F := \{Q \in E; Q(0) + Q'(0) = 0\}$. Comme F est le noyau de la forme linéaire non nulle $Q \mapsto Q(0) + Q'(0)$, F est un hyperplan de E donc de dimension n . Comme $\text{rg} \phi = n$, il suffit d'établir que $\text{Im} \phi \subset F$ pour en conclure que $F = \text{Im} \phi$. Soit $P \in E$ et $Q := \phi(P) = (X - 1)P' + P''(0)$. On a $Q' = P' + (X - 1)P''(X)$ d'où $Q(0) + Q'(0) = -P'(0) + P''(0) + P'(0) - P''(0) = 0$ d'où $Q \in F$.