ALG 3 | Nombres complexes

Le plus court chemin entre deux vérités dans le domaine réel passe par le domaine complexe. »

Jacques Hadamard

Cathédrale gothique au bord de l'eau, Schinkel

3 Nombres complexes 1

1 Quizz 2

2 Exercices élémentaires 3

3 Exercices classiques plus techniques 4

4 Indications 6

5 Solutions 8

1. Quizz

1 — *QCM spécial géométrie*

1. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z-1| \leqslant 1$ et $|z+1| \leqslant 1$ est :

   a. $\{O\}$; **b.** un rectangle ; **c.** une droite.

2. Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et O, A, B les points d'affixes respectives 0, a et $-ia$. Le triangle OAB est :

   a. rectangle ; **b.** isocèle ; **c.** équilatéral.

2 — *QCM spécial calculs*

1. Pour tous $(u, v) \in \mathbb{C}^2$ et U, V les points d'affixes u et v, le nombre $|u-v|^2$ est égal à :

   a. UV ; **b.** $\|\mathbf{UV}\|^2$; **c.** $|u|^2 - 2\operatorname{Re}\left(u\overline{v}\right) + |v|^2$; **d.** $|u|^2 - 2\operatorname{Im}\left(u\overline{v}\right) + |v|^2$; **e.** $|u|^2 - 2\operatorname{Re}\left(\overline{u}v\right) + |v|^2$.

2. Soit $\Delta \in \mathbb{C}$ et δ une racine carrée de Δ. On a :

   a. $\Delta \in \mathbb{R}_- \iff \delta \in i\mathbb{R}$; **b.** $\Delta \in \mathbb{R}_+ \iff \delta \in \mathbb{R}$; **c.** $\Delta \in \mathbb{U} \iff \delta \in \mathbb{U}$.

3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les racines du polynôme $P = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$ sont :

   a. $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$; **b.** $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$; **c.** $e^{i\theta}$ et $\dfrac{1}{e^{i\theta}}$.

4. Pour tout $(u, v) \in \mathbb{U}^2$ tel que $u \neq v$, le nombre complexe $\dfrac{u+v}{u-v}$ est :

   a. réel ; **b.** imaginaire pur ; **c.** de partie imaginaire positive.

3 — *Vrai ou faux ? f*

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\left(z^2\right) = \operatorname{Im}(z)^2$.
2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\right)$.
3. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\theta) = \operatorname{Re}\left(e^{2i\theta}\right)$.
4. Pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\operatorname{Im}\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\operatorname{Im}(z)$.
5. Le nombre ij est une racine carrée de $1+j$.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$. Les racines n-ème de l'unité sont $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\{\overline{\omega} ; \omega \in \mathbb{U}_n\right\} = \mathbb{U}_n$.
8. Pour tout $z \in \mathbb{U}$, $|z+1|^2 + |z-1|^2 = 4$.
9. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Im}(z) \iff |z-1| = |z-i|$.
10. Pour tout $(a,b) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^3$, $a^3 = b^3 \iff a = b$.
11. Pour $\theta \in]-\pi, \pi[$ et $x = \tan(\theta/2)$, $e^{i\theta} = \dfrac{1+ix}{1-ix}$.
12. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{U}_{2n+1} \cap \mathbb{U}_{2n} = \{1\}$.
13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{U}_{2n+2} \cap \mathbb{U}_{2n} = \{1\}$.
14. Pour tout $(u,v) \in \mathbb{C}^2$, $|u-v| \leqslant |u| - |v|$.
15. Pour tout $(u,v) \in \mathbb{C}^2$, $|u-v| \leqslant |u| + |v|$.
16. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\dfrac{\overline{z}-1}{i-iz} \in \mathbb{U}$.

2. Exercices élémentaires

4 — *Clin d'œil à Pythagore*

Montrer que la fonction $f : z \mapsto |1+iz|^2 + |z+i|^2$ est constante sur $\mathbb{U}$.

5 — *Une forme polaire*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et un argument de $e^{e^{i\theta}}$.

6 — *Un module*

Soit $(n,\theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Déterminer le module de $\left(e^{i\theta} - 1\right)^n$.

7 — *Des racines carrées*

Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Quelles sont les racines carrées de $-\omega^2$? Même question avec $i\omega^2$.

8 — *Des racines et des figures*

Dessiner sur le cercle unité les racines quatrièmes de 1 puis celles de -1.

9 — *Une équation du second degré*

Déterminer *sous forme algébrique* les solutions complexes de $z^2 - 2z + i = 0$.

10 — *Une équation*

Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z-1| = \left|\overline{z} - 1 + i\right|$.

11 — *Cas particulier d'une propriété des homographies*

Soit $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Démontrer que $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{2}$.

12 — *Un peu de géométrie*

Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\dfrac{z}{1-z}$ soit réel.

3. Exercices classiques plus techniques

13 — *Une équation bicarrée*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 2\cos(\theta) z^2 + 1 = 0$.

14 — *Une équation non répertoriée f*

Résoudre l'équation $z^5 \overline{z} = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

15 — *Racines n-èmes f*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les racines n-èmes de $1+i$ et $-i$.

2. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

16 — *Autour des racines n-èmes f*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $(z+1)^n - z^n = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

17 — *Une permutation de $\mathbb{U}_n$ dans le cas où n est pair ff*

Soit n un entier naturel impair. Montrer que $\left\{\omega^2\,;\,\omega \in \mathbb{U}_n\right\} = \mathbb{U}_n$.

18 — *Inégalité de Ptolémée ff*

Soit $(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4$. En développant les produits $(x-z)(y-w)$ et $(x-w)(y-z)$, démontrer que

$$|x-y|\,|z-w| \leqslant |x-z|\,|y-w| + |x-w|\,|y-z|$$

4. Indications

1

Au 1., seul a. est correct. Au 2., seuls a. et b. sont corrects.

2

Au 1., les seules propositions correctes sont b., c. et e. Au 2., tout est vrai. Au 3., seuls a. et c. sont vrais. Au 4., seul b. est correct.

3

Aux 12. et 13., il est plus profitable de revenir à la définition des racines de l'unité.

4

On peut interpréter en terme de distance ou développer brutalement.

5

Commencer par écrire $e^{i\theta}$ sous forme algébrique.

6

Passer à l'angle moitié.

7

Il suffit de trouver une racine carrée de -1 et i.

8

Remarquer que $-1 = e^{i\pi}$ (c'est la méthode vue dans le cours).

9

Appliquer la méthode usuelle pour trouver une racine carrée du discriminant $4(1-i)$.

10

Se ramener à une équation de la forme $|z-a| = |z-b|$.

11

On pourra par exemple écrire z sous forme trigonométrique.

12

On trouve $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

13 ↺

C'est une équation bicarrée : poser $Z := z^2$.

14 ↺

On peut rechercher les solutions sous forme polaire. Elle sont manifestement de module un.

15 ↺

Au 2., on se ramènera à une équation du second degré en $Z := z^n$.

16 ↺

Se ramener à une équation de la forme $Z^n = 1$.

17 ↺

Écrire $n = 2m + 1$ pour l'inclusion non triviale.

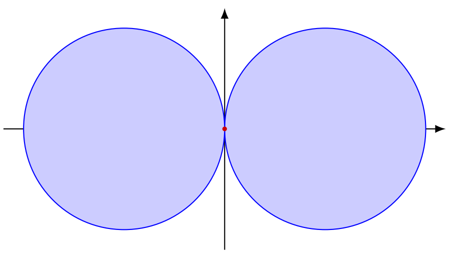
18 ↺

Appliquer l'inégalité triangulaire.

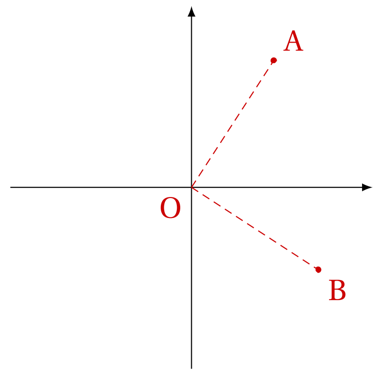
5. Solutions

1

1. Seul a. est correct car l'ensemble recherché est l'intersection des disques de centre 1 et -1 et de rayon 1 :



2. Seuls a. et b. sont corrects car **OB** est l'image par la rotation d'angle $-\pi/2$ de **OA** :



2

1. Les seules propositions correctes sont b., c. et e. Il suffit de développer

$$|u-v|^2 = (u-v)(\overline{u}-\overline{v})$$

et remarquer que $\overline{u}v = \overline{u\overline{v}}$ puis $u\overline{v}+\overline{u}v = 2\,\mathrm{Re}\left(u\overline{v}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{u}v\right)$.

Un développement à connaître

Il serait bon d'obtenir le développement de $|u-v|^2$ de tête. Au déduit de ce résultat que l'équation

$$z\overline{z} - 2\,\mathrm{Re}(\overline{\omega}z) + \overline{\omega}\omega = \rho^2 \quad (\text{où } \rho \in \mathbb{R}_+^*)$$

est celle du cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon ρ.

2. Les trois propositions sont correctes. Cf. le cours pour a. et b. et $|\Delta| = |\delta|^2$ pour c.
3. Seuls a. et c. sont corrects : le discriminant de l'équation vaut $(2i\sin\theta)^2$.
4. ⇛ Le couple $(u,v) = (1,-i)$ est un contre-exemple pour les a. et c.

   ⇛ Le b. est correct car notant Z le quotient $\overline{Z} = \dfrac{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}} = -Z$.

3

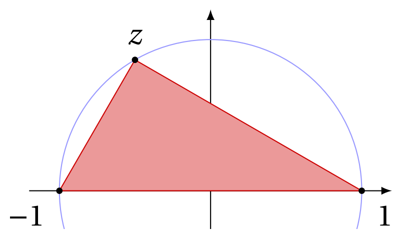
1. Faux car par exemple $\mathrm{Im}\left(i^2\right) \neq \mathrm{Im}(i)^2$.
2. Vrai par définition de l'exponentielle.

3. Faux : $\theta = \pi/2$ est un contre-exemple. Plus généralement, $\forall \theta \neq 0\,[\pi]$, $\cos^2(\theta) \neq \cos(2\theta)$.
4. Vrai car pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$.
5. Vrai : $1 + j = -j^2 = (ij)^2$.
6. Faux car pour $n = 4$ et $\omega = -1$, on a $\left\{\omega^k \,;\, k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{U}_2 \neq \mathbb{U}_4$.

Générateurs de $\mathbb{U}_n$

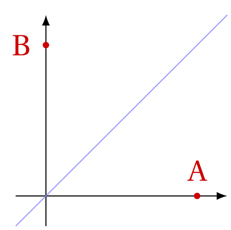
Le cours nous apprend que si $\omega := e^{2i\pi/n}$, alors $\mathbb{U}_n = \{\omega^k \,;\, k \in \mathbb{Z}\}$ mais cet exercice nous dit que l'on ne peut pas remplacer ω par n'importe quelle autre racine n-ème différente de 1.

7. Vrai : $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^n = 1 \iff \overline{z}^n = 1$.
8. Vrai car par le théorème de Pythagore :



On peut aussi utiliser $|z+1|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z) + 1$.

9. Vrai car l'ensemble des points équidistants de $A(1)$ et de $B(i)$ est la médiatrice de $[AB]$, d'équation $y = x$:



Il faut dessiner !

Dans les questions 8. et 9., une interprétation géométrique s'avère éclairante.

10. Faux car pour a et b non nuls $a^3 = b^3 \iff \frac{a}{b} \in \mathbb{U}_3 = \left\{1, j, j^2\right\}$. En revanche, le résultat est vrai si a et b sont réels.
11. Vrai car $1 + ix = \frac{e^{i\theta/2}}{\cos(\theta/2)}$.
12. Vrai car $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^{2n} = z^{2n+1} = 1 \iff z = 1$.
13. Faux car $\forall z \in \mathbb{C}$, $z^{2n} = z^{2n+2} = 1 \iff z^2 = 1$.

Expression Versus définition

Il faut parfois revenir à la définition (ce sont les solutions de $z^n = 1$) car la forme exponentielle n'est pas toujours une bonne piste, cf. les exercices 12. et 13.

14. Faux car $(u, v) = (1, 2)$ est clairement un contre-exemple.

Expression Versus définition

Il ne faut confondre l'inégalité proposée avec $||u| - |v|| \leqslant |u - v|$ qui est vraie.

15. Vrai car par l'inégalité triangulaire $|u - v| \leqslant |u| + |-v| = |u| + |v|$.

16. Vrai : $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\left|\dfrac{\overline{z}-1}{i-iz}\right| = \dfrac{|z-1|}{|i| \times |1-z|} = 1$.

4

Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $f(z) = (1 + iz)(1 - i\overline{z}) + (z + i)(\overline{z} - i) = 2z\overline{z} + 2 = 4$.

Commentaire

On peut aussi remarquer que, pour $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = |z-i|^2 + |z+i| = 2^2 = 4$ par le théorème de Pythagore (le point $\mathrm{M}(z)$ appartenant au cercle de diamètre $[\mathrm{AB}]$, où $\mathrm{A}(-i)$ et $\mathrm{B}(i)$).

5

On a $\mathrm{Z} = e^{e^{i\theta}} = e^{\cos(\theta)} e^{i \sin\theta}$, donc $|\mathrm{Z}| = e^{\cos\theta}$ et $\arg \mathrm{Z} = \sin\theta \, [2\pi]$.

6

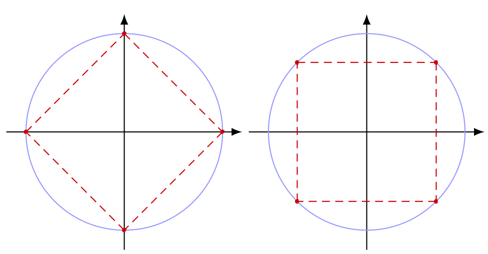
On a $\mathrm{Z} = \left(e^{i\theta} - 1\right)^n = (2i)^n \sin^n(\theta/2) e^{in\theta/2}$ donc $|\mathrm{Z}| = 2^n |\sin(\theta/2)|^n$.

7

On a $-\omega^2 = (i\omega)^2$ et $i\omega^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\omega\right)^2$.

8

Les racines quatrièmes de -1 sont de la forme $e^{i\frac{\pi}{4}}\omega$ où $\omega \in \mathbb{U}_4$, on les obtient à partir de $\mathbb{U}_4$ par la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{4}$:



9

Le discriminant de l'équation vaut $\Delta = 4(1-i)$. Soit $\delta = x + iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(\delta^2) &= 4 \\ \mathrm{Im}(\delta^2) &= -4 \\ |\delta|^2 &= |\Delta| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= 4 \\ 2xy &= -4 \\ x^2 + y^2 &= 4\sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} (x,y) &= \left(\sqrt{2\sqrt{2}+2}, -\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right) \\ & \text{ou} \\ (x,y) &= \left(-\sqrt{2\sqrt{2}+2}, \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right) \end{cases}$$

Les racines de l'équation sont donc $1 + \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$ et $1 - \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

Commentaire

On peut aussi remarquer que $\Delta = \left(2\sqrt{\sqrt{2}e^{-i\pi/8}}\right)^2$ mais il faut alors calculer le cosinus et le sinus de $\pi/8$ au moyen des formules de duplication.

10

L'équation s'écrit $|z-1| = |z-1-i|$. On reconnaît la médiatrice de $[AB]$ où $A(1)$ et $B(1+i)$, ie la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$.

11

Soit $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Il existe $\theta \in]0, 2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$ d'où

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-e^{i\theta}} = \frac{1}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \text{puis} \quad \mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{2}$$

12

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{z}{1-z} \in \mathbb{R} &\iff \frac{z}{1-z} = \overline{\frac{z}{1-z}} \\ &\iff \frac{z}{1-z} = \frac{\overline{z}}{1-\overline{z}} \\ &\iff z - z\overline{z} = \overline{z} - z\overline{z} \\ &\iff z = \overline{z} \end{aligned}$$

L'ensemble recherché est donc $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

13 ↺

⇛ Un nombre complexe z vérifie $z^4-2\cos(\theta)z^2+1=0$ *si et seulement si* son carré z^2 est racine du polynôme $X^2-2\cos(\theta)X+1$.

⇛ Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta=2\cos^2\theta-4=(2i\sin\theta)^2$; racines sont donc $e^{\pm i\theta}$.

⇛ Il reste à résoudre $z^2=e^{\varepsilon i\theta}$ où $\varepsilon\in\{-1,1\}$. Cette équation équivaut à $z=\pm e^{\varepsilon i\frac{\theta}{2}}$.

⇛ L'ensemble des solutions est donc $\left\{\varepsilon_1 e^{\varepsilon_2 i\frac{\theta}{2}}\,;\,(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in\{-1,1\}^2\right\}$.

Équations bicarrées

Le changement de variable $Z:=z^2$ permet de résoudre toutes les équations bicarrées, i.e. de la forme $az^4+bz^2+c=0$.

14 ↺

On remarque que 0 n'est pas solution. Soit $(r,\theta)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ et $z:=re^{i\theta}$. On a

$$\begin{aligned}z^5\overline{z}=1 &\iff r^5e^{5i\theta}re^{-i\theta}=1\\ &\iff r^6e^{4i\theta}=1\\ &\iff r^6=1 \text{ et } 4\theta=0\,[2\pi]\\ &\iff r=1 \text{ et } \theta=0\left[\frac{\pi}{2}\right]\end{aligned}$$

On en déduit l'ensemble des solutions : $\{1,i,-1,-i\}$.

15 ↺

1. ⇛ Comme $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, l'équation E_1 : $z^n=1+i$ équivaut à $\left(\dfrac{z}{\sqrt[2n]{2}e^{i\pi/(4n)}}\right)^n=1$, l'ensemble des solutions de E_1 est donc :

$$\mathscr{S}_1=\left\{\sqrt[2n]{2}\exp\left(\frac{i\pi}{4n}+\frac{2ik\pi}{n}\right)\,;\,k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$$

⇛ Comme $-i=e^{-i\pi/2}$, l'équation E_2 : $z^n=-i$ équivaut à $\left(\dfrac{z}{e^{-i\pi/(2n)}}\right)^n=1$, l'ensemble des solutions de E_2 est donc :

$$\mathscr{S}_2=\left\{\exp\left(-\frac{i\pi}{2n}+\frac{2ik\pi}{n}\right)\,;\,k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$$

2. L'équation F : $z^{2n}-z^n+1-i=0$ est équivalente à F′ : $Z^2-Z+1-i$ où $Z=z^n$. Le discriminant de F′ vaut $\Delta=1-4(1-i)=-3+4i=(1+2i)^2$, les racines de F sont donc $-i$ et $1+i$. On déduit de la question précédente que l'ensemble des solutions de F est $\mathscr{S}_1\cup\mathscr{S}_2$.

16

On remarque que 0 n'est pas solution. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a

$$\begin{aligned}(z+1)^n - z^n = 0 &\iff \left(\frac{z+1}{z}\right)^n = 1\\ &\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!],\ \frac{z+1}{z} = e^{2ik\pi/n}\end{aligned}$$

Fixons $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a $\dfrac{z+1}{z} = e^{2ik\pi/n} \iff (e^{2ik\pi/n} - 1)z = 1 \iff 2i\sin(k\pi/n)e^{ik\pi/n}z = 1$.

⇛ Si $k = 0$, alors cette équation n'a pas de solution.

⇛ Sinon, $\sin(k\pi/n) \neq 0$ et l'équation admet une unique solution.

On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation initiale :

$$\mathscr{S} = \left\{ -\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) ; k \in [\![1, n-1]\!] \right\}$$

17

On pose $\mathrm{E} := \left\{\omega^2 ; \omega \in \mathbb{U}_n\right\}$ et $n = 2m+1$ avec $m \in \mathbb{N}$.

⇛ Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. On a $\left(\omega^2\right)^n = \left(\omega^n\right)^2 = 1^2 = 1$. Ainsi $\mathrm{E} \subset \mathbb{U}_n$.

⇛ Soit $\omega \in \mathbb{U}_n$. Comme on a $\omega^{2m+1} = 1$, $\omega = (\omega^{-m})^2$ d'où $\mathbb{U}_n \subset \mathrm{E}$.

18

Soit $(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4$. Comme $(x-z)(y-w) - (x-w)(y-z) = -xw - zy + xz + wy = (x-y)(z-w)$, on déduit de l'inégalité triangulaire et de la multiplicativité du module que

$$|x-y|\,|z-w| \leqslant |x-z|\,|y-w| + |x-w|\,|y-z|$$