



*La principale difficulté est sans doute de parvenir à une modélisation correcte de l'expérience aléatoire étudiée.*



*Les joueurs de dés, Georges de La Tour*

<b>1</b>	<b>Espaces probabilisés</b> .....	1
1	Quiz .....	2
2	Exercices élémentaires .....	2
3	Exercices classiques plus techniques .....	3
4	Indications .....	5
5	Solutions .....	7

## 1. Quizz

**1**   \_\_\_\_\_ *Vrai ou faux ?* \_\_\_\_\_

1. Soit  $A$  de probabilité dans  $]0, 1[$ . Alors, pour tout  $B \subset \Omega$ ,  $\mathbf{P}(B | A) + \mathbf{P}(B | \bar{A}) = 1$ .
2. Pour  $A$  de probabilité non nulle et tout  $B \subset \Omega$ , on a  $\mathbf{P}(B | A) \leq \mathbf{P}(B)$ .
3. Pour  $A, B, C$  de probabilités non nulles, on a  $\mathbf{P}(A | B \cup C) = \mathbf{P}(A | B) + \mathbf{P}(A | C) - \mathbf{P}(A | B \cap C)$ .
4. Un événement indépendant de son complémentaire est de probabilité 0 ou 1.
5. Si  $B \cup C = \Omega$ , alors  $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap C)$ .
6. Il est possible d'avoir  $\mathbf{P}(A) = 0,9$  et  $\mathbf{P}(B) = 0,3$  et  $A \cap B = \emptyset$ .
7. Il est possible d'avoir  $\mathbf{P}(A) = 0,8$ ,  $\mathbf{P}(B) = 0,1$  et  $\mathbf{P}(A \cap B) = 0,2$ .

## 2. Exercices élémentaires

**2**   \_\_\_\_\_ *Jeu de dés* \_\_\_\_\_

On lance un dé blanc et un dé rouge. On note  $b$  et  $r$  les numéros obtenus. Déterminer les paires d'événements indépendants parmi les suivants :

$$A : \ll b + r = 7 \gg, \quad B : \ll b = 4 \gg \quad \text{et} \quad C : \ll |b - r| \text{ est pair} \gg$$

**3**   \_\_\_\_\_ *Trois événements mutuellement indépendants* \_\_\_\_\_

Soit  $(\Omega, \mathbf{P})$  un espace probabilisé fini,  $A, B$  et  $C$  trois événements mutuellement indépendants, de probabilités différentes de 0 et 1.

1. Montrer que les événements  $A$  et  $B \cup C$  sont indépendants.
2. Montrez que  $\mathbf{P}(B \cup C)$  est strictement inférieure à 1.

**4**   \_\_\_\_\_ *Trois dés* \_\_\_\_\_

On jette trois dés identiques. Calculez :

1. la probabilité d'avoir exactement un 6.
2. la probabilité d'obtenir au moins un 6.
3. la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques.

5 ?

BA B.A.

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbf{P})$  tels que

$$\mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(A \cup B) = \frac{4}{9}$$

Calculer  $\mathbf{P}(A|B)$ ,  $\mathbf{P}(\bar{A}|B)$  et  $\mathbf{P}(A \cap B|B)$ .

6 ?

Contrôle de qualité

Dans une usine, on fabrique des composants électroniques sur trois machines  $M_1, M_2$  et  $M_3$  produisant respectivement 50%, 30% et 20% du total. Un technicien estime que 2% des composants fabriqués par  $M_1$ , 3% des composants fabriqués par  $M_2$  et 5% des composants fabriqués par  $M_3$  sont défectueux.

1. Quelle est la probabilité qu'un composant pris au hasard à la sortie de l'usine soit défectueux ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une pièce défectueuse provenant de  $M_1$  ?
3. Les événements « la pièce est défectueuse » et « la pièce provient de  $M_1$  » sont-ils indépendants ?
4. Un composant est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne de  $M_1$  ?

### 3. Exercices classiques plus techniques

7 ?

Paradoxe de Galilée f

Le prince de Toscane demande un jour à Galilée : « Pourquoi, lorsqu'on jette trois dés, obtient-on plus souvent la somme 10 que la somme 9, bien que ces deux sommes soient obtenues toutes les deux de six façons différentes ? ». Pouvez-vous répondre à cette question ?

8 ?

Tirage aléatoire dans  $n$  sacs f

On considère  $n$  sacs  $S_1, \dots, S_n$ . Le sac  $S_k$  contient  $k$  jetons blancs et  $n + 1 - k$  jetons noirs. On choisit un sac aléatoirement, de sorte que le sac  $S_k$  est choisi avec la probabilité  $\alpha k$  pour tout  $1 \leq k \leq n$ , pour un certain réel  $\alpha$  fixé. On tire ensuite un jeton au hasard dans le sac choisi. Il est blanc. Quelle est la probabilité qu'il provienne du sac  $S_k$  ?

9 ?

Formules de Bayes f

On dispose d'un test pour déterminer si un individu est atteint par une maladie donnée. La probabilité qu'un individu soit malade est  $\tau$ , la probabilité que le test soit positif sachant que l'individu est malade est  $\rho$ , la probabilité que le test soit positif sachant que l'individu n'est pas malade est  $\theta$ . Déterminer la probabilité qu'un individu soit malade sachant que le test est positif.

10   ————— True or false about conditional probability *ff* —————

True or false : if  $\mathbf{P}(A|B) > \mathbf{P}(A)$  and  $\mathbf{P}(B|C) > \mathbf{P}(B)$ , then  $\mathbf{P}(A|C) > \mathbf{P}(A)$  ?

## 4. Indications

**1** ↪ \_\_\_\_\_

Si l'on recherche un contre-exemple, on peut commencer par considérer par le cas de l'équiprobabilité sur un ensemble fini.

**2** ↪ \_\_\_\_\_

On vérifie facilement que A et B sont indépendants, B et C aussi, mais pas A et C.

**3** ↪ \_\_\_\_\_

Pour le 2., remarquer que  $1 - \mathbf{P}(B \cup C) = \mathbf{P}(\bar{B})\mathbf{P}(\bar{C}) > 0$ .

**4** ↪ \_\_\_\_\_

Au 2., le plus simple est de passer par la probabilité du complémentaire. Au 3., on pourra remarquer que la probabilité cherchée vaut 6 fois celle d'obtenir au moins deux 6, puis utiliser les questions précédentes.

**5** ↪ \_\_\_\_\_

On trouve  $\mathbf{P}(A|B) = \frac{5}{9}$ ,  $\mathbf{P}(\bar{A}|B) = \frac{4}{9}$  et  $\mathbf{P}(A \cap B|B) = \frac{5}{9}$ .

**6** ↪ \_\_\_\_\_

1. On trouve 29/1000.
2. On a 1/100.
3. Les événements « *la pièce est défectueuse* » et « *la pièce provient de  $M_1$*  » ne sont indépendants.
4. On trouve 10/29.

**7** ↪ \_\_\_\_\_

Dénombrer les triplets  $(a, b, c)$  de somme 10 puis de somme 9.

**8** ↪ \_\_\_\_\_

On trouve  $\alpha = \frac{2}{n(n+1)}$  et  $\frac{6k(n+1-k)}{n(n+1)(n+2)}$ .

**9** ↪ \_\_\_\_\_

Traduire les hypothèses :  $\mathbf{P}(M) = \tau$ ,  $\mathbf{P}(T_+|M) = \rho$  et  $\mathbf{P}(T_+|\bar{M}) = \theta$ .

**10** ↻

C'est faux. Trouver un contre-exemple avec l'équiprobabilité sur un ensemble fini.

## 5. Solutions

### 1 ↻

1. Faux. Cex : la loi uniforme sur  $\Omega = \llbracket 0, 2 \rrbracket$  avec  $A = \{0\}$  et  $B = \{1\}$ . On a

$$\mathbf{P}(B|A) + \mathbf{P}(B|\bar{A}) = 0 + \frac{1}{2} \neq 1$$

2. Faux. En fait, on peut avoir les deux inégalités. Considérons la loi uniforme sur  $\Omega = \llbracket 0, 2 \rrbracket$  avec  $A = \{0\}$  et  $B = \{1\}$ . On a

$$\mathbf{P}(A|B) = 0 < \mathbf{P}(A)$$

mais

$$\mathbf{P}(A|\bar{B}) = \frac{1}{2} > \mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}$$

3. Faux. Cex : la loi uniforme sur  $\Omega = \llbracket 0, 2 \rrbracket$  avec  $A = \{0\}$  et  $B = \{0, 1\}$  et  $C = \{1, 2\}$ . On a  $B \cup C = \Omega$  et  $B \cap C = \{1\}$ , d'où

$$\mathbf{P}(A|B \cup C) = \mathbf{P}(A) = \frac{1}{3}, \quad \mathbf{P}(A|B) = \frac{1}{2}, \quad \mathbf{P}(A|C) = 0, \quad \mathbf{P}(A|B \cap C) = 0$$

4. Vrai. Supposons  $A \perp \bar{A}$ . On a alors  $0 = \mathbf{P}(A \cap \bar{A}) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(\bar{A}) = \mathbf{P}(A) (1 - \mathbf{P}(A))$  d'où  $\mathbf{P}(A) \in \{0, 1\}$ .

5. Faux. Contre-exemple : on lance un dé non pipé,  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ . Considérer les événements  $A = \llbracket 3, 4 \rrbracket$ ,  $B = \llbracket 1, 3 \rrbracket$  et  $C = \llbracket 3, 6 \rrbracket$ .

6. Faux. On aurait  $\mathbf{P}(A \cup B) > 1$ .

7. Faux. On aurait  $\mathbf{P}(A \cap B) > \mathbf{P}(B)$ .

### 2 ↻

On note  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$  l'univers correspondant au tirage du couple  $(b, r)$ .

⇒ On a  $A = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$  et  $B = \{4\} \times \llbracket 1, 6 \rrbracket$  d'où  $A \cap B = \{(4, 3)\}$

$$\mathbf{P}(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad \mathbf{P}(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

Comme  $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B)$ , les événements  $A$  et  $B$  sont bien indépendants.

⇒ L'événement  $C$  n'est autre que «  $b$  et  $r$  ont la même parité », ainsi

$$\mathbf{P}(C) = \frac{3 \times 3 + 3 \times 3}{36} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(B \cap C) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Ainsi  $\mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(B) \mathbf{P}(C)$  donc  $B$  et  $C$  sont indépendants.

⇒ Les événements  $A$  et  $C$  ne sont pas indépendants car  $A \cap C = \emptyset$  donc  $\mathbf{P}(A \cap C) = 0 \neq \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(C)$ .

### 3 ↻

1. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A \cap (B \cup C)) &= \mathbf{P}(A \cap B) + \mathbf{P}(A \cap C) - \mathbf{P}(A \cap B \cap C) = \mathbf{P}(A) (\mathbf{P}(B) + \mathbf{P}(C) - \mathbf{P}(B \cap C)) \\ &= \mathbf{P}(A) \mathbf{P}(B \cup C) \end{aligned}$$

Ainsi A et  $B \cup C$  sont indépendants.

2. On a  $1 - \mathbf{P}(B \cup C) = \mathbf{P}(\overline{B}) \mathbf{P}(\overline{C}) > 0$ .

4



- On vérifie facilement que la probabilité d'avoir exactement un 6 vaut  $\frac{5}{72} + \frac{10}{36} = \frac{25}{72}$ .
- La probabilité de n'avoir aucun 6 vaut  $\left(\frac{5}{6}\right)^3$ , donc celle d'obtenir au moins un 6 vaut  $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{91}{216}$ .
- Pour tout  $1 \leq i \leq 6$ , notons  $A_i$  l'évènement « on obtient au moins deux fois le numéro  $i$  ». Ces évènements étant disjoints et équiprobables, la probabilité cherchée est clairement

$$p = \sum_{i=1}^6 \mathbf{P}(A_i) = 6\mathbf{P}(A_6)$$

Or, d'après les questions précédentes, on déduit que  $\mathbf{P}(A_6) = \frac{91}{216} - \frac{25}{72} = \frac{91-75}{216} = \frac{16}{216} = \frac{2}{27}$ . On en conclut que la probabilité d'obtenir au moins deux faces identiques vaut

$$p = 6 \times \frac{2}{27} = \frac{4}{9}$$

5



⇒ On a  $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cup B) = \frac{5}{36}$ .

⇒ On en déduit que  $\mathbf{P}(A | B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{5}{9}$  puis  $\mathbf{P}(\overline{A} | B) = 1 - \mathbf{P}(A | B) = \frac{4}{9}$ .

⇒ On a  $\mathbf{P}(A \cap B | B) = \mathbf{P}(A | B) = \frac{5}{9}$ .

6



1. Notons D cette probabilité. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(D) &= \mathbf{P}(D | M_1) \mathbf{P}(M_1) + \mathbf{P}(D | M_2) \mathbf{P}(M_2) + \mathbf{P}(D | M_3) \mathbf{P}(M_3) \\ &= \frac{2}{100} \times \frac{50}{100} + \frac{3}{100} \times \frac{30}{100} + \frac{5}{100} \times \frac{20}{100} = \frac{29}{1000} \end{aligned}$$

2. On a  $\mathbf{P}(M_1 \cap D) = \mathbf{P}(D | M_1) \mathbf{P}(M_1) = \frac{1}{100}$ .

3. Comme  $\mathbf{P}(D | M_1) = \frac{2}{100}$  et  $\mathbf{P}(D) = \frac{29}{1000}$ , on a  $\mathbf{P}(D | M_1) \neq \mathbf{P}(D)$ . Les évènements « la pièce est défectueuse » et « la pièce provient de  $M_1$  » ne sont donc pas indépendants.

4. On a  $\mathbf{P}(M_1 | D) = \frac{\mathbf{P}(D | M_1) \mathbf{P}(M_1)}{\mathbf{P}(D)} = \frac{10}{29}$ .

**7** ↻

⇒ On recherche les triplets solutions dans l'ordre croissant :

$$\begin{cases} 10 = 1 + 3 + 6 = 1 + 4 + 5 = 2 + 2 + 6 = 2 + 3 + 5 = 2 + 4 + 4 = 3 + 3 + 4 \\ 9 = 1 + 2 + 6 = 1 + 3 + 5 = 1 + 4 + 4 = 2 + 2 + 5 = 2 + 3 + 4 = 3 + 3 + 3 \end{cases}$$

⇒ En tenant compte des permutations, on obtient en fait  $6 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3 = 27$  triplets pour 10 et seulement  $6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$  pour 9.

**8** ↻

L'énoncé postule l'existence d'un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbf{P})$  tel que les événements  $T_k$  : tirer dans le sac  $k$ ,  $N$  : tirer un jeton noir et  $B$  : tirer un jeton blanc vérifient

$$\mathbf{P}(T_k) = \alpha k, \quad \mathbf{P}(N | T_k) = \frac{n+1-k}{n+1}, \quad \mathbf{P}(B | T_k) = \frac{k}{n+1}$$

⇒ En écrivant que  $(T_1, \dots, T_n)$  est un système complet d'événements, on trouve que  $\alpha = \frac{2}{n(n+1)}$ .

⇒ Par la formule de Bayes :

$$\mathbf{P}(T_k | B) = \frac{\mathbf{P}(B | T_k) \mathbf{P}(T_k)}{\mathbf{P}(B | T_1) \mathbf{P}(T_1) + \dots + \mathbf{P}(B | T_n) \mathbf{P}(T_n)} = \frac{6k^2}{n(n+1)(2n+1)}$$

**9** ↻

Notons  $M$  et  $T_+$  les événements « l'individu est malade » et « le test est positif ». Par hypothèse, on a :

$$\mathbf{P}(M) = \tau, \quad \mathbf{P}(T_+ | M) = \rho \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(T_+ | \bar{M}) = \theta$$

On déduit des formules de Bayes que

$$\mathbf{P}(M | T_+) = \frac{\mathbf{P}(T_+ | M) \mathbf{P}(M)}{\mathbf{P}(T_+ | M) \mathbf{P}(M) + \mathbf{P}(T_+ | \bar{M}) \mathbf{P}(\bar{M})} = \frac{\rho\tau}{\rho\tau + \theta(1-\tau)}$$

**10** ↻

Considérons l'équiprobabilité sur  $[1, 7]$  et  $A := [1, 3]$ ,  $B := [2, 4]$  and  $C := [3, 5]$ . On a

$$\mathbf{P}(A | B) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{2}{3}, \quad \mathbf{P}(A) = \frac{3}{7}, \quad \mathbf{P}(B | C) = \frac{\mathbf{P}(B \cap C)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{2}{3}, \quad \mathbf{P}(C) = \frac{3}{7}$$

mais  $\mathbf{P}(A | C) = \frac{\mathbf{P}(A \cap C)}{\mathbf{P}(C)} = \frac{1}{3}$  est strictement inférieure à  $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{7}$ .