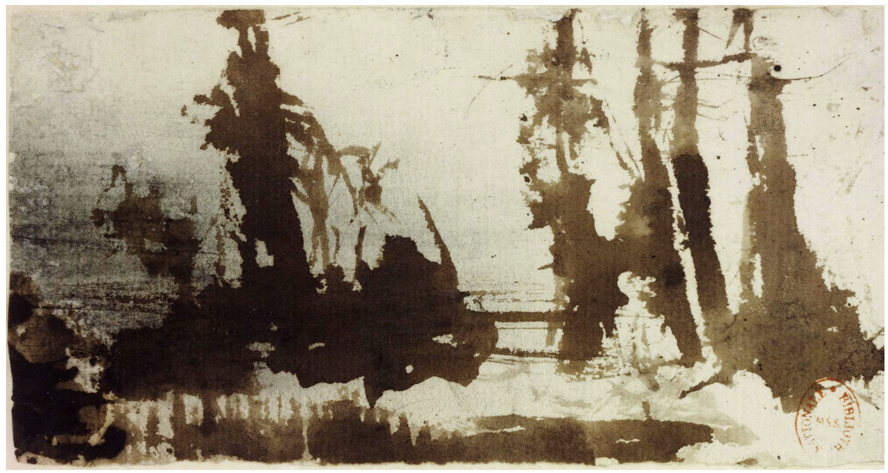
PB 2 | Variables aléatoires

Il est souvent utile d'introduire des variables aléatoires « intermédiaires » afin d'exploiter la linéarité de l'espérance, les hypothèses d'indépendance, etc.



Tache d'encre, Victor Hugo

2 Variables aléatoires 1

1 Quizz 2

2 Exercices élémentaires 3

3 Exercices classiques plus techniques 5

4 Indications 6

5 Solutions 8

1. Quizz

1 — *Vrai ou faux ? f*

1. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$, alors $n - X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$.
2. Si $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0,n]\!])$, alors $n - X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0,n]\!])$.
3. Si une variable X est d'espérance nulle, alors la variable e^X est d'espérance 1.
4. Si $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, alors $X + Y \hookrightarrow \mathscr{B}(2,p)$.
5. La somme de deux variables indépendantes de loi uniforme suit une loi uniforme.
6. Si les variables X, Y, Z, T sont indépendantes, alors $X + Y \perp\!\!\!\perp Z - T$.
7. Si $Y \perp\!\!\!\perp X$ et $X \perp\!\!\!\perp Z$, alors $Y \perp\!\!\!\perp Z$.
8. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $X \perp\!\!\!\perp Z$, alors $X \perp\!\!\!\perp (Y,Z)$.
9. Si $X \perp\!\!\!\perp (Y,Z)$, alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.
10. Soit une variable X telle que $\mathbf{E}\big(X^2\big) = 0$, alors $\mathbf{E}(XY) = 0$ pour toute variable Y.
11. Pour toute variable réelle X, on a $\mathbf{E}(X)^2 \leqslant \mathbf{E}\big(X^2\big)$.
12. Pour toute variable réelle X, on a $\mathbf{E}(|X|) \leqslant |\mathbf{E}(X)|$.
13. Pour toute variable réelle X et $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\mu\,\mathbf{P}\big(X \geqslant \mu\big) \leqslant \mathbf{E}(X)$.
14. La variance d'une somme de variables est égale à la somme de leurs variances.

2 — *QCM sur les variables aléatoires*

1. Soit A et B deux événements pour lesquels $\mathbf{P}(A) = 1/2$, $\mathbf{P}(B) = 1/3$ et $\mathbf{P}(A \cap B) = 1/4$. On pose $X = \mathbb{1}_A + 2\mathbb{1}_B$.

   a. A et B sont indépendants ;

   b. A et B sont incompatibles ;

   c. $\exists p \in]0,1[,\ X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$;

   d. $\mathbf{E}(X) = \dfrac{7}{6}$;

   e. $\mathbf{E}(X) = 3$;

   f. $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(\mathbb{1}_A) + 4\mathbf{V}(\mathbb{1}_B)$;

   g. $\mathbf{V}(X) = \dfrac{41}{36}$;

   h. $\mathbf{V}(X) = \dfrac{53}{36}$.

2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et X une variable finie à valeurs dans $[a,b]$.

   a. Si $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(1/2)$ alors $X_0 = (b-a)Y + a$ est à valeurs dans $[a,b]$ et $\mathbf{V}(X_0) = (b-a)^2$;

   b. $\mathbf{E}\big(X^2 - (a+b)X + ab\big) \geqslant 0$;

   c. $\mathbf{V}(X) \leqslant (b - \mathbf{E}(X))(\mathbf{E}(X) - a)$;

   d. $\mathbf{V}(X) \leqslant \dfrac{(b-a)^2}{4}$;

e. $\exists$X variable à valeurs dans $[a,b]$ telle que $\mathbf{V}(\mathrm{X}) = \dfrac{(b-a)^2}{4}$.

3. Un fleuve subit une crue chaque année (indépendamment des autres années) avec une probabilité p. Sur une période d'un siècle, le nombre de crues moyen est égal 1.

a. Le nombre de crues sur une période donnée d'un siècle sur la loi $\mathscr{B}(100, p)$;

b. $p = \frac{1}{100}$;

c. La probabilité de n'observer aucune crue sur une période d'un siècle vaut $\frac{99}{100}$;

d. La probabilité d'observer une crue chaque année sur un siècle vaut $\frac{1}{10000}$.

4. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On en tire une poignée. Les 2^n poignées possibles sont supposées équiprobables. On note N et X les variables aléatoires donnant respectivement le nombre de numéros tirés et leur somme. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable valant 1 si le numéro i a été tiré et 0 sinon.

a. $\mathbf{P}(\mathrm{N} = 0) = 2^{-n}$;

b. Pour tout i, $\mathrm{X}_i \hookrightarrow \mathscr{B}(1/2)$;

c. $\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$;

d. $\mathbf{E}(\mathrm{X}) = \frac{n}{2^n}$;

e. $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ sont indépendantes ;

f. $\mathrm{N} \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1/2)$.

2. Exercices élémentaires

3 — *BA B.A. sur les variables aléatoires*

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi $\mathscr{B}\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

1. Déterminer la loi de $(\mathrm{X}-1)^2$ et $(\mathrm{Y}-1)^2$.
2. En déduire la loi de $\mathrm{S} := (\mathrm{X}-1)^2 + (\mathrm{Y}-1)^2$.
3. On pose $\mathrm{T} := (\mathrm{X}-1)(\mathrm{Y}-1)+1$. Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{S}(\mathrm{T}-1))$.
4. Calculer $\mathrm{cov}(\mathrm{S},\mathrm{T})$. Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

4 — *Minimum de deux variables de Bernoulli*

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathscr{B}(p)$. Calculer l'espérance de $\min(\mathrm{X},\mathrm{Y})$.

5 — *Étude d'un couple de variables aléatoire*

Soit X et Y deux variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètres respectifs $p_1 \in]0,1[$ et $p_2 \in]0,1[$. On pose $\mathrm{U}_1 := \mathrm{X}+\mathrm{Y}$ et $\mathrm{U}_2 := \mathrm{XY}$.

1. Déterminer les lois, espérances et variances de U_1 et U_2.

2. Quelle est la loi du couple (U_1, U_2) ?
3. Les variables U_1 et U_2 sont-elles indépendantes ?

6 — *Loi d'un couple*

Dans une urne contenant trois boules portant le numéro 1 et 4 boules portant le numéro 0, on tire successivement et sans remise deux boules, on note X le numéro de la première boule et Y celui de la seconde. Déterminer la loi du couple (X, Y), ses lois marginales, puis la loi et l'espérance de $Z := X + Y$.

7 — *On lance deux dés*

On lance deux dés équilibrés. Soit U_1 et U_2 deux variables aléatoires correspondant aux résultats des lancers. On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

1. Calculer $\mathbf{P}(U \geqslant i)$ pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$ et en déduire la loi de X.
2. Déterminer l'espérance de X. On admettra que $\mathbf{E}(U) = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{P}(U \geqslant i)$ (cf. le TD).
3. Calculer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2. En déduire l'espérance de Y.
4. Calculer de même XY et en déduire $\mathbf{Cov}(X, Y)$.

8 — *Espérance et variance*

Soit X et Y deux va indép. de loi $\mathscr{B}\left(n, \frac{1}{2}\right)\cdot$ Calculer l'espérance et la variance de $Z := X - Y$.

9 — *Avis de recherche* f

Soit X une va à valeurs dans $[\![0, 2]\!]$ telle que $\mathbf{E}(X) = 1$ et $\mathbf{V}(X) = \dfrac{1}{2}\cdot$ Déterminer la loi de X.

10 — *Une matrice aléatoire* f

On considère quatre variables aléatoires X, Y , Z et T iid de loi $\mathscr{B}(p)$ et la matrice $A := \begin{pmatrix} X & X & X & X \\ X & Y & Y & Y \\ X & Y & Z & Z \\ X & Y & Z & T \end{pmatrix}$.

1. Donner la loi de tr A.
2. Quelle est la probabilité que A soit inversible ?

11 — *Une inégalité* f

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va indépendantes à valeurs dans $\{-1, 1\}$ et de même loi uniforme. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que

$$\forall \theta > 0,\ \mathbf{P}\big(S_n \geqslant \theta\sqrt{n}\big) \leqslant \frac{1}{\theta^2}$$

3. Exercices classiques plus techniques

12 — *Ampoules aléatoires f*

On considère n ampoules numérotées de 1 à n qui s'allument aléatoirement et indépendamment. L'ampoule i a une probabilité $p_i > 0$ d'être allumée. On note Y le nombre d'ampoules allumées.

1. Calculer l'espérance et la variance de Y.
2. Soit $m \in \mathbb{R}^*$. Déterminer les p_i de sorte que $\mathbf{V}(\mathrm{Y})$ soit maximale et vérifie la contrainte $\mathbf{E}(\mathrm{Y}) = m$.

   INDICATION : Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $\mathbb{R}^n$ ainsi que son cas d'égalité.

13 — *Un déterminant aléatoire f*

Soit A, B, C et D des va indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On pose $\mathrm{X} := \det\begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D}\end{pmatrix}$.

1. Calculer $\mathbf{E}(\mathrm{X})$.
2. Déterminer $\mathbf{V}(\mathrm{X})$.

14 — *Inégalités sur l'espérance ff*

Soit a, b dans $\mathbb{R}$ tels que $0 < a \leqslant b$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$.

1. Montrer que $\dfrac{1}{\mathrm{X}} \leqslant \dfrac{a+b-\mathrm{X}}{ab}\cdot$
2. En déduire que $\mathbf{E}(\mathrm{X})\,\mathbf{E}\left(\dfrac{1}{\mathrm{X}}\right) \leqslant \dfrac{(a+b)^2}{4ab}\cdot$

15 — *Une convergence ff*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne X_n de loi $\mathscr{B}\left(4n, \dfrac{1}{2}\right)$.

1. Calculer la variance de X_n.
2. Montrer que la suite $\mathbf{P}(|\mathrm{X}_n - 2n| \geqslant n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
3. Montrer que la suite $(\mathbf{P}(|\mathrm{X}_n - 2n| \leqslant n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser sa limite.
4. En déduire un équivalent simple de $x_n := \displaystyle\sum_{k=n}^{3n} \binom{4n}{k}$.

4. Indications

1

On a $n - X \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-p)$.

2

Remarquer que $\mathbb{1}_A$ est une variable de Bernoulli de paramètre $\mathbf{P}(A)$.

3

Revenir aux définitions et exploiter la linéarité de l'espérance (pour les sommes) et l'indépendance (pour les produits).

4

Remarquer que $\min(X, Y)$ est une variable de Bernoulli.

5

Les deux variables ne sont pas indépendantes ;

6

L'ensemble des valeurs du couple (X, Y) est $\{0, 1\}^2$. On a par exemple

$$\mathbf{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0) \times \mathbf{P}(Y = 0 \mid X = 0) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

7

On trouve $\mathbf{P}(U \geqslant i) = \left(\frac{7-i}{6}\right)^2$.

8

Aucune difficulté calculatoire : la linéarité de l'espérance permet de calculer $\mathbf{E}(Z)$ et l'indépendance de X et Y permet un calcul simple de la variance.

9

Les inconnues du problème sont les probabilités $p_i = \mathbf{P}(X = i)$ pour $i \in [\![0, 2]\!]$. Trouver trois équations.

10

Le déterminant de A vaut $X(Y - X)(Z - Y)(T - Z)$.

11

Appliquer l'inégalité de Tchebychev.

12

Noter X_i la variable égale à 1 si l'ampoule i est allumée, et 0 sinon. Par hypothèse, les va $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et X_i suit la loi $\mathscr{B}(p_i)$.

13

Les variables AD et BC sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $\{-1,1\}$.

14

Pour $t \in [a,b]$, on a $t(a+b-t)-ab = -(t-a)(t-b) \geqslant 0$.

15

Appliquer l'inégalité de Tchebychev au 2.

5. Solutions

1 ↺

1. Faux. Posons $Y := n - X$. On a $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a
$$\mathbf{P}(()\, Y = k) = \mathbf{P}(X = n-k) = \binom{n}{n-k} p^{n-k}(1-p)^k = \binom{n}{k} p^{n-k}(1-p)^k$$
Ainsi $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1-p)$.
2. Vrai. Posons $Y := n - k$. On a $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et pour $k \in [\![0, n]\!]$, on a
$$\mathbf{P}(()\, Y = k) = \mathbf{P}(X = n-k) = \frac{1}{n+1}$$
Ainsi $Y \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0, n]\!])$.
3. Faux. Cex : X suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On a $\mathbf{E}(X) = 0$ mais
$$\mathbf{E}\big(e^X\big) = \frac{e^1 + e^{-1}}{2} = \cosh 1 > 1$$
4. Faux. Cex : choisir par exemple $Y = X$ (on a alors $(X+Y)(\Omega) = \{0, 2\}$ donc $X+Y$ ne peut suivre la loi $\mathscr{B}(2, p)$).
5. Faux. Cex : choisir des variables X et Y suivant le loi uniforme sur $[\![0, 1]\!]$ et indépendantes. On a $(X+Y)(\Omega) = [\![0, 2]\!]$ mais
$$\mathbf{P}(X+Y = 1) = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3}$$
6. Vrai par le lemme des coalitions.
7. Faux. L'indépendance n'est pas une relation transitive. Cex : choisir $Z = X$ et $X \perp\!\!\!\perp Y$ avec $X \hookrightarrow \mathscr{U}([\![0, 1]\!])$.
8. Faux. Cex : considérer X et Y indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![0, 1]\!]$ et Z égal au reste de $X+Y$ dans la division euclidienne par 2. On a clairement $X \perp\!\!\!\perp Z$ mais $\mathbf{P}(X = 0, (Y, Z) = (1, 0)) = 0$ et $\mathbf{P}(X = 0)\,\mathbf{P}((Y, Z) = (1, 0)) = 1/8$.
9. Vrai par le lemme des coalitions : posons $f(u, v) = u$ (fonction définie sur $\mathbb{R}^2$), comme $X \perp\!\!\!\perp (Y, Z)$, on a $X \perp\!\!\!\perp f(Y, Z)$, ie $X \perp\!\!\!\perp Y$.
10. Vrai. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a
$$|\,\mathbf{E}(XY)\,| \leqslant \sqrt{\mathbf{E}\big(X^2\big)\,\mathbf{E}\big(Y^2\big)} = 0$$
d'où $\mathbf{E}(XY) = 0$.
11. Vrai. Par exemple
$$\mathbf{E}\big(X^2\big) - \mathbf{E}(X)^2 = \mathbf{V}(X) \geqslant 0$$
mais on peut aussi appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
12. Faux. Cex : X suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On a $\mathbf{E}(X) = 0$ mais $\mathbf{E}(|X|) = 1$.
13. Faux. Cex : X suivant la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On a $\mathbf{E}(X) = 0$ mais $\mathbf{P}(X \geqslant 1) = 1/2$.

14. Faux. Cex : X et Y = X avec $X \hookrightarrow \mathscr{B}(1/2)$. On a $\mathbf{V}(X) = \mathbf{V}(Y) = 1/4$ et
$$\mathbf{V}(X+Y) = 4\mathbf{V}(X) = 1 \neq \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y)$$

2

1. Seuls d. et h. sont vrais.
   - ⇛ Comme $\mathbf{P}(A \cap B) \neq \mathbf{P}(A)\,\mathbf{P}(B)$ et $\mathbf{P}(A \cap B) \neq 0$, les événements A et B ne sont ni indépendants, ni incompatibles.
   - ⇛ Le c. est faux car $\mathbf{P}(X=3) = \mathbf{P}(A \cap B) = \dfrac{1}{4}\cdot$
   - ⇛ Par linéarité de l'espérance, on a $\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(\mathbb{1}_A) + 2\mathbf{E}(\mathbb{1}_B) = \mathbf{P}(A) + 2\mathbf{P}(B) = \dfrac{7}{6}\cdot$
   - ⇛ On a $\mathbf{E}\big(X^2\big) = \mathbf{E}(\mathbb{1}_A + 4\mathbb{1}_{A\cap B} + 4\mathbb{1}_B) = \mathbf{P}(A) + 4\mathbf{P}(A \cap B) + 4\mathbf{P}(B) = \dfrac{17}{6}$ d'où $\mathbf{V}(X) = \dfrac{17}{6} - \dfrac{7^2}{6^2} = \dfrac{53}{36}\cdot$
2. Seuls c., d. et e. sont vrais.
   - ⇛ La variable X_0 est bien à valeurs dans $[a,b]$ mais $\mathbf{V}(X_0) = (b-a)^2\mathbf{V}(Y) = \frac{(b-a)^2}{4}\cdot$
   - ⇛ On a $X^2 - (a+b)X + ab = (X-a)(X-b) \leqslant 0$ donc $\mathbf{E}\big(X^2 - (a+b)X + ab\big) \leqslant 0$ par croissance de l'espérance.
   - ⇛ Par ce qui précède, on a
   $$(b - \mathbf{E}(X))(\mathbf{E}(X) - a) - \mathbf{V}(X) = (a+b)\mathbf{E}(X) - ab - \mathbf{E}(X)^2 - \mathbf{E}\big(X^2\big) + \mathbf{E}(X)^2 = -\mathbf{E}\big(X^2 - (a+b)X + ab\big) \geqslant 0$$
   - ⇛ Comme $\mathbf{E}(X) \in [a,b]$ ($a \leqslant X \leqslant b \implies a \leqslant \mathbf{E}(X) \leqslant b$ par croissance de l'espérance) et que la fonction $t \mapsto (b-t)(t-a)$ est maximale en $t = (a+b)/2$ où elle vaut $\frac{(b-a)^2}{4}$ (simple étude de fonction), le d. est vrai.
   - ⇛ On peut avoir égalité comme le prouve l'exemple de la variable X_0.
3. Seuls a. et b. sont vrais.
   - ⇛ Pour l'année i, notons X_i la variable égale à 1 si le fleuve connaît une crue et 0 sinon. Comme $N = X_1 + \cdots + X_{100}$ et les X_i sont iid de loi $\mathscr{B}(p)$, on a $N \hookrightarrow \mathscr{B}(100, p)$.
   - ⇛ Comme $\mathbf{E}(N) = 100p = 1$, on a $p = \dfrac{1}{100}\cdot$ On a $\mathbf{P}(N=0) = \left(\dfrac{99}{100}\right)^{100}$ et $\mathbf{P}(N=100) = \left(\dfrac{1}{100}\right)^{100}\cdot$
4. Tout est vrai sauf d.
   - ⇛ On a $N = X_1 + \cdots + X_n$ et $X = \sum_{i=1}^n iX_i$. De plus, pour $i \in [\![1,n]\!]$, le nombre de parties de $[\![1,n]\!]$ contenant i vaut 2^{n-1} (elles s'écrivent de manière unique sous la fome $\{i\} \cap E$ où E est une partie quelconque de $[\![1,n]\!] \setminus \{i\}$). Ainsi, $X_i \hookrightarrow \mathscr{B}(1/2)$.
   - ⇛ On en déduit que $\mathbf{E}(X) = \dfrac{1+\cdots+n}{2} = \dfrac{n(n+1)}{4}\cdot$
   - ⇛ Soit $I \subset [\![1,n]\!]$ tel que $I \neq \varnothing$. Fixons $(\varepsilon_i)_{i\in I} \in \{0,1\}^I$. On a
   $$\mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in I}(X_i = \varepsilon_i)\right) = \frac{2^{n-\#I}}{2^n} = \frac{1}{2^{\#I}} = \prod_{i\in I}\mathbf{P}(X_i = \varepsilon_i)$$
   car l'événement $\bigcap_{i\in I}(X_i = \varepsilon_i)$ correspond au choix d'une partie de $[\![1,n]\!]$ de la forme $I_1 \cup J$ où I_1 est l'ensemble des i tels que $\varepsilon_i = 1$ et J est une partie quelconque de $[\![1,n]\!] \setminus I$. Les X_i sont donc indépendantes. Ainsi $N = X_1 + \cdots + X_n \hookrightarrow \mathscr{B}(n, 1/2)$ et le a. s'en déduit.

3

1. La variable $(X-1)^2$ est à valeurs dans $\{0,1\}$ donc suit la loi de Bernoulli de paramètre $1 = \mathbf{P}\big((X-1)^2=0\big) = 1-\mathbf{P}(X=1) = \frac{1}{2}\cdot$ De même pour $(Y-1)^2$.
2. Comme $(X-1)^2$ et $(Y-1)^2$ sont indépendantes et suivent la loi $\mathscr{B}\left(\frac{1}{2}\right)$ donc $S := (X-1)^2+(Y-1)^2$ suit la loi $\mathscr{B}\left(2,\frac{1}{2}\right)$.
3. On a $ST = \big((X-1)^2+(Y-1)^2\big)((X-1)(Y-1)+1) = (X-1)^3(Y-1)+(X-1)(Y-1)^2+S$ d'où, par linéarité de l'espérance :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(ST) &= \mathbf{E}\big((X-1)^3(Y-1)\big)+\mathbf{E}\big((X-1)(Y-1)^2\big)+\mathbf{E}(S) = \mathbf{E}\big((X-1)^3\big)\mathbf{E}(Y-1)+\mathbf{E}(X-1)\,\mathbf{E}\big((Y-1)^2\big)+\mathbf{E}(S)\\ &= \mathbf{E}(S) = 1\end{aligned}$$

par indépendance de $(X-1)$ et $(Y-1)^2$ (et de $(X-1)^3$ et $Y-1$) en remarquant que $\mathbf{E}(X-1) = \mathbf{E}(X)-1 = 0 = \mathbf{E}(Y-1)$. Ainsi $\mathbf{E}(S(T-1)) = \mathbf{E}(ST)-\mathbf{E}(S) = 0$.
4. On a $\mathrm{cov}(S,T) = \mathbf{E}(ST)-\mathbf{E}(S)\,\mathbf{E}(T) = 1-1\times 1 = 0$ car $\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}(X-1)\,\mathbf{E}(Y-1)+1 = 1$. Les variables S et T ne sont pas indépendantes car

$$\mathbf{P}(T=2,S=0) = 0 \neq \mathbf{P}(T=2)\,\mathbf{P}(S=0) = \frac{1}{8}\times\frac{1}{4}$$

4

Notons $Z = \min(X,Y)$: Z est une variable de Bernoulli car à valeurs dans $\{0,1\}$. Son paramètre vaut

$$\mathbf{P}(Z=1) = \mathbf{P}(X=1,Y=1) = \mathbf{P}(X=1)\,\mathbf{P}(Y=1) = p^2$$

par indépendance de X et Y. Ainsi $\mathbf{E}(Z) = p^2$.

5

1. ⇛ ➣ U_1 est à valeurs dans $\{0,1,2\}$ et, par indépendance de X et Y :

$$\mathbf{P}(U_1=0) = \mathbf{P}(X=0,Y=0) = (1-p_1)(1-p_2)\,,\ \mathbf{P}(U_1=2) = \mathbf{P}(X=1,Y=1) = p_1p_2$$

   d'où $\mathbf{P}(U_1=1) = 1-(1-p_1)(1-p_2)-p_1p_2 = p_1+p_2-2p_1p_2$.

   ➣ De plus, par linéarité de l'espérance, $\mathbf{E}(U_1) = \mathbf{E}(X)+\mathbf{E}(Y) = p_1+p_2$ et par indépendance de X et Y, on a $\mathbf{V}(U_1) = \mathbf{V}(X)+\mathbf{V}(Y) = p_1(1-p_1)+p_2(1-p_2)$.

   ⇛ ➣ U_2 est à valeurs dans $\{0,1\}$ et, par indépendance de X et Y :

$$\mathbf{P}(U_2=1) = \mathbf{P}(X=1,Y=1) = p_1p_2 \quad\text{et}\quad \mathbf{P}(U_2=0) = 1-p_1p_2$$

   ➣ En tant que variable de Bernoulli, on a $\mathbf{E}(U_2) = p_1p_2$ et $\mathbf{V}(U_2) = p_1p_2(1-p_1p_2)$.
2. La variable (U_1,U_2) est à valeurs dans $\{(0,0),(1,0),(2,1)\}$. Par indépendance de X et Y, on a :
   - ⇛ $\mathbf{P}(U_1=0,U_2=0) = \mathbf{P}(X=0,Y=0) = (1-p_1)(1-p_2)$;
   - ⇛ $\mathbf{P}(U_1=2,U_2=1) = \mathbf{P}(X=1,Y=1) = p_1p_2$;
   - ⇛ $\mathbf{P}(U_1=1,U_2=0) = p_1+p_2-2p_1p_2$.

3. On a

$$\mathbf{P}(U_1 = 2, U_2 = 1) - \mathbf{P}(U_1 = 2)\,\mathbf{P}(U_2 = 1) \;=\; p_1 p_2 - (p_1 p_2)^2 = p_1 p_2(1 - p_1 p_2) > 0$$

donc les variables aléatoires U_1 et U_2 ne sont pas indépendantes.

6

L'ensemble des valeurs du couple (X, Y) est $\{0,1\}^2$. La loi conjointe et les lois marginales sont données par le tableau suivant :

X / Y	0	1	Loi de X
0	2/7	2/7	4/7
1	2/7	1/7	3/7
loi de Y	4/7	3/7	1

En effet, on a

$$\mathbf{P}(X = 0, Y = 0) = \mathbf{P}(X = 0) \times \mathbf{P}(Y = 0 \mid X = 0) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$$

Les autres probabilités se calculant de la même manière. Les valeurs prises par Z sont $\{0, 1, 2\}$ et on a

$$(Z = 0) = (X = 0, Y = 0)\,,\ (Z = 1) = (X = 0, Y = 1) \cup (X = 1, Y = 0) \quad \text{et} \quad (Z = 2) = (X = 1, Y = 1)$$

d'où $\mathbf{P}(Z = 0) = 2/7$, $\mathbf{P}(Z = 1) = 4/7$ et $\mathbf{P}(Z = 2) = 1/7$. On en déduit l'espérance de Z :

$$\mathbf{E}(Z) = 0 \times \mathbf{P}(Z = 0) + 1 \times \mathbf{P}(Z = 1) + 2 \times \mathbf{P}(Z = 2) = \frac{6}{7}$$

7

1. On a $X(\Omega) = [\![1, 6]\!]$. De plus, pour tout $i \in [\![1, 6]\!]$, on a

$$\mathbf{P}(U \geqslant i) = \mathbf{P}(U_1 \geqslant i, U_2 \geqslant i) = \mathbf{P}(U_1 \geqslant i)^2 = \left(\frac{7 - i}{6}\right)^2 \ \text{(encore valable si } i = 7)$$

ainsi $\mathbf{P}(U = i) = \mathbf{P}(U \geqslant i) - \mathbf{P}(U \geqslant i + 1) = \frac{(7-i)^2 - (6-i)^2}{6^2}$.

2. On a

$$\mathbf{E}(U) = \sum_{i=1}^{6} \mathbf{P}(U \geqslant i) = \sum_{i=1}^{6} \frac{(7 - i)^2}{6^2} = \sum_{i=1}^{6} \frac{i^2}{6^2} = \frac{6 \times 7 \times 13}{6^3} = \frac{7 \times 13}{6^2}$$

3. Comme $X + Y = U_1 + U_2$, on a $\mathbf{E}(Y) = 2\mathbf{E}(U_1) - \mathbf{E}(X) = \dfrac{7 \times 6}{6} - \dfrac{7 \times 13}{6^2} = \dfrac{7 \times 23}{6^2}$.

4. Comme $XY = U_1 U_2$, on a $\mathbf{E}(XY) = \mathbf{E}(U_1)\,\mathbf{E}(U_2) = (7/2)^2$ par indépendance de U_1 et U_2. Ainsi

$$\mathbf{Cov}(X, Y) = \mathbf{E}(XY) - \mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}(Y) = \frac{7^2}{2^2} - \frac{7^2 \times 13 \times 23}{6^4} = \frac{5^2 7^2}{6^4}$$

8

On a $\mathbf{E}(Z) = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(Y) = 0$ par linéarité de l'espérance et équi-distribution de X et Y. Par indépendance et équi-distribution de X et Y, on a $\mathbf{V}(Z) = \mathbf{V}(X) + \mathbf{V}(Y) = 2\mathbf{V}(X) = \frac{n}{2}$.

9

Notons $p_i = \mathbf{P}(X = i)$ pour $i \in [\![0,2]\!]$. On a

$$p_0 + p_1 + p_2 = 1\,,\ 1 = \mathbf{E}(X) = p_1 + 2p_2 \ \text{ et }\ \frac{1}{2} = \mathbf{V}(X) = \mathbf{E}\big(X^2\big) - \mathbf{E}(X)^2 = p_1 + 4p_2 - 1$$

d'où $(p_0, p_1, p_2) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

10

1. Comme X, Y, Z et T sont iid de loi $\mathscr{B}(p)$, la variable tr A sui la loi $\mathscr{B}(4, p)$.
2. On a

$$\det A = \begin{vmatrix} X & X & X & X \\ X & Y & Y & Y \\ X & Y & Z & Z \\ X & Y & Z & T \end{vmatrix} = = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ X & Y-X & Y-X & Y-X \\ X & Y-X & Z-X & Z-X \\ X & Y-X & Z-X & T-X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ X & Y-X & 0 & 0 \\ X & Y-X & Z-Y & Z-Y \\ X & Y-X & Z-Y & T-Y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ X & Y-X & 0 & 0 \\ X & Y-X & Z-Y & 0 \\ X & Y-X & Z-Y & T-Z \end{vmatrix} = X(Y-X)(Z-Y)(T-Z)$$

Ainsi (A est inversible) $= (X = 1) \cap (Y = 0) \cap (Z = 1) \cap (T = 0)$. La probabilité que A soit inversible vaut donc $p^2(1-p)^2$ par indépendance des va X, Y, Z et T.

11

On remarque que $\mathbf{E}(S_n) = n\mathbf{E}(X_1)$ par linéarité de l'espérance et équidistribution des X_k. Par indépendance de ces derniers, on a aussi $\mathbf{V}(S_n) = n\mathbf{V}(X_1) = n$. Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. Comme $(S_n \geqslant \theta\sqrt{n}) \subset (|S_n| \geqslant \theta\sqrt{n})$, on déduit de l'inégalité de Tchebychev que

$$\mathbf{P}\big(S_n \geqslant \theta\sqrt{n}\big) \leqslant \frac{\mathbf{V}(S_n)}{n\theta^2} = \frac{1}{\theta^2}$$

12

On note X_i la variable égale à 1 si l'ampoule i est allumée, et 0 sinon. Par hypothèse, les va $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et X_i suit la loi $\mathscr{B}(p_i)$.

1. Comme $Y = X_1 + \cdots + X_n$, on a $\mathbf{E}(Y) = p_1 + \cdots + p_n$ par linéarité de l'espérance et $\mathbf{V}(Y) = p_1(1-p_1) + \cdots + p_n(1-p_n)$ par indépendance des X_i.
2. Sous l'hypothèse $\mathbf{E}(Y) = m$, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que :

$$\mathbf{V}(Y) = m - \sum_{k=1}^n p_k^2 \leqslant m - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^n p_k\right)^2 = m - \frac{m^2}{n}$$

Le majorant est atteint pour $p_k := \frac{m}{n}$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. C'est la seule valeur possible car l'inégalité de Cauchy-Schwarz précédente est une égalité *si et seulement si* les vecteurs $(p_1, \ldots, p_n)$ et $(1, \ldots, 1)$ sont colinéaires.

13

1. Par linéarité de l'espérance et indépendance de A, B, C et D, on a

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(AD) - \mathbf{E}(BC) = \mathbf{E}(A)\,\mathbf{E}(D) - \mathbf{E}(B)\,\mathbf{E}(C) = 0$$

2. Les variables AD et BC sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $\{-1, 1 : big\}$ (vérification facile). Ainsi $\mathbf{V}(X) = 2\mathbf{V}(AD) = 2$.

14

1. Pour $t \in [a,b]$, on a $t(a+b-t) - ab = -(t-a)(t-b) \geqslant 0$ d'où $\frac{1}{X} \leqslant \frac{a+b-X}{ab}$.
2. Par croissance et linéarité de l'espérance, on a $\mathbf{E}\big(\frac{1}{X}\big) \leqslant \frac{a+b-\mathbf{E}(X)}{ab}$ d'où $\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}\big(\frac{1}{X}\big) \leqslant \mathbf{E}(X)\,\frac{a+b-\mathbf{E}(X)}{ab}$ car $\mathbf{E}(X) \geqslant a > 0$. Comme $t \longmapsto t(a+b-t) = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(t - \frac{a+b}{2}\right)^2$ est majorée par $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$, on en déduit que $\mathbf{E}(X)\,\mathbf{E}\big(\frac{1}{X}\big) \leqslant \frac{(a+b)^2}{4ab}$.

15

1. D'après le cours $\mathbf{V}(X_n) = 4n\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = n$.
2. Comme $\mathbf{E}(X_n) = 2n$, on déduit de l'inégalité de Tchebychev :

$$0 \leqslant \mathbf{P}(|X_n - 2n| \geqslant n) \leqslant \frac{\mathbf{V}(X_n)}{n^2} = \frac{1}{n}$$

d'où $\mathbf{P}(|X_n - 2n| \geqslant n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, par le théorème d'encadrement.

3. On a

$$\mathbf{P}(|X_n - 2n| \leqslant n) = \mathbf{P}(|X_n - 2n| = n) + \mathbf{P}(|X_n - 2n| < n) = \mathbf{P}(|X_n - 2n| = n) + 1 - \mathbf{P}(|X_n - 2n| \geqslant n)$$

On a $\mathbf{P}(|X_n - 2n| = n) = \mathbf{P}(X_n = 3n) + \mathbf{P}(X_n = n)$. De plus,

$$\mathbf{P}(X_n = 3n) = \mathbf{P}(X_n = n) = \frac{\binom{4n}{n}}{2^{4n}} = \frac{(4n)!}{n!(3n)!2^{4n}} \sim \frac{\sqrt{8\pi n}\left(\frac{4n}{e}\right)^{4n}}{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{6\pi n}\left(\frac{3n}{e}\right)^{3n} 2^{4n}} = \frac{4}{\sqrt{6\pi n}} \times \left(\frac{16}{27}\right)^n$$

Ainsi $\mathbf{P}(|X_n - 2n| \leqslant n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

4. Comme

$$\mathbf{P}(|X_n - 2n| \leqslant n) = \frac{1}{2^{4n}} \sum_{k=n}^{3n} \binom{4n}{k}$$

On en déduit que $x_n \sim 2^{4n}$.