



On étudie les polynômes formels, indépendamment de l'idée de fonction.



La vague de Kanawaga, Hokusai

11	Polynômes	1
1	Quizz	2
2	Exercices élémentaires	3
3	Exercices classiques plus techniques	4
4	Indications	6
5	Solutions	8

1. Quizz

1 ?

Quizz *f*

1. Pour P et Q non nuls, on a $\deg(P \circ Q) = \deg P \deg Q$.
2. Le polynôme $X^4 + 1$ est irréductible sur $\mathbb{R}$.
3. Si P n'est pas constant, alors $P(X+1) - P(X)$ est de degré $\deg P - 1$.
4. Pour $a \in \mathbb{K}$, le reste dans la division de P par $X - a$ est $P(a) + P'(a)(X - a)$.
5. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, le polynôme $(X^2 + 1)^n - 2X^{2n} + (X^2 - 1)^n$ est de degré $2n - 2$.
6. Pour $(\theta, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$, le reste de $(\cos \theta + X \sin \theta)^n$ par $X^2 + 1$ vaut $\cos(n\theta) + \sin(n\theta)X$.
7. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $X^2 - aX + 1$ divise $X^4 - X + b \iff (a, b) = (-1, 0)$.
8. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\phi : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$, $P \mapsto P(X) + P(X+1)$ est un isomorphisme.
9. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre j est racine de multiplicité n de $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k (1-X)^{3n-2k} X^k$.
10. Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ vérifie $P(\mathbb{N}) \subset \mathbb{Z}$, alors $P \in \mathbb{Z}[X]$.
11. Le polynôme $2X^3 - (7+2i)X^2 + (11+i)X - 4$ admet une racine réelle.
12. Il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \int_n^{n+1} P(t) dt = 1$.
13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme $(X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ est divisible par $X^2 - X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
14. Pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, il existe un unique $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P + P' = Q$.

2 ?

QCM sur les polynômes *f*

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$ et $P_n = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$.
 - a. Si n est impair, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) > 0$;
 - b. P_n est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
2. Soit $P = X^5 - X^2 + 1$.
 - a. P admet une racine dans $\mathbb{Z}$;
 - b. P admet une racine rationnelle;
 - c. P admet une unique racine réelle;
 - d. P est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X]; P(0) = P(1) = 0\}$.
 - a. La famille $(X^k(1-X))_{k \in [1, n-1]}$ est une base de F ;
 - b. La famille $(X(1-X)^k)_{k \in [1, n-1]}$ est une base de F ;
 - c. $\text{Vect}(X, X^2) \oplus F = \mathbb{R}_n[X]$;
 - d. $\mathbb{R}_1[X]$ est un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_n[X]$.
4. Soit $A \in \mathbb{K}[X]$ tel que $\deg(A) \geq 1$. On pose $d = \deg(A)$. On note D l'application qui à un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ associe le reste de la division euclidienne de P par A .
 - a. D est un projecteur de $\mathbb{K}[X]$;
 - b. $\text{Im } D = \mathbb{K}_d[X]$;
 - c. $\text{Ker } D$ est l'ensemble des multiples de A dans $\mathbb{K}[X]$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$, $P \mapsto \phi(P) = P(X+1) - P(X)$.
 - a. $\forall P \in \mathbb{R}[X] \setminus \mathbb{R}_0[X]$, $\deg \phi(P) = \deg P$;
 - b. ϕ induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$;
 - c. ϕ est injective;
 - d. ϕ est surjective;
 - e. $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\exists n \in \mathbb{N}$, $\phi^n(P) = 0$;
 - f. ϕ est nilpotent.
6. Pour $A \in \mathbb{K}[X]$, on pose $\phi_A : \mathbb{K}[X] \rightarrow \mathbb{K}[X]$, $P \mapsto P \circ A$.
 - a. ϕ_A injective $\iff \deg A \in \mathbb{N}^*$;
 - b. ϕ_A surjective $\iff \deg A \in \mathbb{N}^*$;
 - c. ϕ_A bijective $\implies \exists B \in \mathbb{K}[X]$, $\phi_A^{-1} = \phi_B$.

2. Exercices élémentaires

3 ? 

Par la racine

Vérifier que 2 est une racine multiple de $P := X^4 - 9X^3 + 30X^2 - 44X + 24$ puis décomposer P sur $\mathbb{R}$.

4 ? 

Dérivée d'une somme géométrique

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit ω une racine n -ième de l'unité. Le but de cet exercice est de calculer la somme $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n k\omega^{k-1}$.

1. Que vaut $S_n(1)$?
2. On suppose désormais dans toute la suite de l'exercice que $\omega \neq 1$.
 - a. Rappeler quel est le quotient Q de la division euclidienne de $X^n - 1$ par $X - 1$. Justifier que $Q(\omega) = 0$.
 - b. Montrer que $(X - 1)Q'(X) = nX^{n-1} - Q(X)$.
 - c. Exprimer $Q'(\omega)$ en fonction de $S_n(\omega)$, de n et de ω .
 - d. Dédire de tout ce qui précède que $S_n(\omega) = \frac{n}{\omega - 1}$.

5 ? 

Divisibilité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer tous les couples $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $(X - 1)^2$ divise $aX^{n+1} + bX^n + 1$.

6 ? 

Une équation

Déterminer les couples $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ tels que $P^2 = XQ^2$.

7 ? 

Une suite de polynômes

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite de polynômes définie par

$$A_1 := X^2 + X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, A_{n+1} := (X^2 + 1)A_n + XA'_n$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner le degré et le terme dominant de A_n .
2. Démontrer qu'il existe une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de polynômes telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = XB_n$.
3. Calculer B_1 et obtenir une relation de récurrence vérifiée par $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $B_n(0)$ et en déduire $A'_n(0)$.

8 ? 

Autour de l'interpolation

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1. Déterminer trois polynômes A, B, C à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2 tels que :

$$\begin{cases} A(-1) = 1 \\ A(0) = 0 \\ A(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B(-1) = 0 \\ B(0) = 1 \\ B(1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C(-1) = 0 \\ C(0) = 0 \\ C(1) = 1 \end{cases}$$

2. La famille (A, B, C) obtenue est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?
3. On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], u(P) = P(-1)A + P(0)B + P(1)C$. Montrer que u est un projecteur de $\mathbb{R}_n[X]$ dont on déterminera le noyau et l'image.

9 ?

Étude d'un endomorphisme f

Pour $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on pose $\phi(P) := P(2X) - 2P(X)$.

1. Justifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le noyau, l'image et le rang de ϕ .

10 ?

Une décomposition f

Factoriser $X^5 + X$ en produit d'irréductibles dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$.

11 ?

Reste dans la division euclidienne f

Soit $E := \mathbb{R}_3[X]$, $A := X^4 - 1$ et $B := X^4 - X$.

Pour $P \in E$, on note $f(P)$ le reste de la division euclidienne de AP par B .

1. Montrer que f est un endomorphisme de E .
2. Démontrer que $\text{Ker } f = \text{Vect}(X^3 + X^2 + X)$ et calculer le rang de f .

12 ?

Une formule pour une primitive f

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Établir que $Q := \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{P^{(k)}(X)}{(k+1)!} X^{k+1}$ vérifie $Q' = P$.

3. Exercices classiques plus techniques

13 ?

Une équation f

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) = n^2 + (-1)^n$.

14 ?

Relations coefficients-racines ff

Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on pose $P_n := (X+i)^n - (X-i)^n$.

1. Déterminer les racines complexes de P_n .
2. En déduire les valeurs de $A_n = \sum_{k=1}^{n-1} \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ et $B_n = \prod_{k=1}^{n-1} \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

15 ?

Un problème d'interpolation ff

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et $a_0, \dots, a_4$ des réels deux à deux distincts tels que $\forall i \in \llbracket 0, 4 \rrbracket, P(a_i) = \pm 1$. Montrer que $P = -1$ ou $P = 1$.

16Une équation *ff*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n tel que $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

1. Démontrer que, si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P , alors α^2 et $(\alpha+1)^2$ sont des racines de P .
2. En déduire que, si $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P , alors $|\alpha| = 1$ et $|\alpha+1| = 1$.
3. Montrer que $P(X) = (X^2 + X + 1)^n$. Résoudre $Q(X^2) = Q(X)Q(X-1)$, équation d'inconnue $Q \in \mathbb{R}[X]$.

17*ff*

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer qu'il existe Q et R dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $P(X) = XQ(X^2) + R(X^2)$.
2. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Si $\sqrt{2}$ est racine de P de multiplicité m , montrer que $-\sqrt{2}$ est racine de P de même multiplicité.

4. Indications

1 ↻ _____

Au 12., on pourra considérer un polynôme primitif de P .

2 ↻ _____

Utiliser la formule des sommes géométrique au 1.

3 ↻ _____

Les seules racines de sont 2 et 3.

4 ↻ _____

On a $Q = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$ par le cours.

5 ↻ _____

On peut caractériser une racine multiple d'un polynôme au moyen de P et P' .

6 ↻ _____

Intéressez-vous au degré après avoir écarté le cas du polynôme nul.

7 ↻ _____

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n est unitaire de degré $2n$.

8 ↻ _____

La famille (A, B, C) est la famille des polynômes interpolateurs de Lagrange aux points $-1, 0, 1$.

9 ↻ _____

On trouve que ϕ est de rang deux. Calculer l'image par ϕ de la base canonique.

10 ↻ _____

On pourra (par exemple) remarquer que $X^4 + 1 = (X^2)^2 - i^2$.

11 ↻ _____

Le théorème de la division euclidienne permet de justifier la linéarité de f .

12 ↻ _____

Un télescopage apparaît dans l'expression de Q' .

13 ↻ _____

L'équation n'a aucune solution.

14

Poser $z = \frac{x+i}{x-i}$ pour calculer les racines de P_n puis exploiter les relations coefficients-racines.

15

On pourra s'intéresser à P^2 .

16

Les seules racines possibles de P sont j et j^2 .

17

Séparer les monômes de P selon la parité de leur degré.

5. Solutions

1

1. Vrai. On écrit $P = a_0 + \dots + a_n X^n$ avec $a_n \neq 0$. On conclut en remarquant que, pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $m \in \mathbb{N}$, $\deg \lambda Q^m = m \deg Q$.
2. Faux. Tout polynôme de degré strictement supérieur à deux est réductible sur $\mathbb{R}$.
3. Vrai. On écrit $P = a_0 + \dots + a_n X^n$ avec $a_n \neq 0$. On conclut en remarquant que, pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, $\deg \lambda ((X+1)^m - X^m) = m-1$.
4. Vrai par la formule de Taylor.
5. Faux. Par la formule du binôme, le polynôme est de degré $2n-4$ et de coefficient dominant $n(n-1)$.
6. Vrai. Il existe $(a, b, Q) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}[X]$ tel que $(\cos \theta + X \sin \theta)^n = (X^2 + 1)Q + a + bX$. En évaluant en i , on trouve $e^{in\theta} = a + ib$, d'où le résultat.
7. Faux. Le reste dans la division de $X^4 - X + b$ par $X^2 - aX + 1$ vaut $(a+1)(a^2 - a - 1)X + b + 1 - a^2$. Il est nul *si et seulement si* (a, b) est égal à $(-1, 0)$, (ϕ, ϕ) , ou $(-1/\phi, -1/\phi)$, avec $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$.
8. Vrai. Comme $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1 < +\infty$, il suffit de calculer son noyau. L'équation $P(X+1) = -P(X)$ impose $P = 0$ (par l'absurde en examinant le coefficient dominant).
9. Vrai. On remarque par la formule du binôme que le polynôme vaut $(1 - X^3)^n$.
10. Faux. Cex : $\frac{X(X+1)}{2}$.
11. Vrai. Par analyse-synthèse. Si x est une racine réelle de P , alors $-2x^2 + x = 0$, donc $x = 0$ ou $x = 1/2$. On vérifie que $1/2$ est bien racine.
12. Faux. Par l'absurde. En notant Q un polynôme primitif de P et $R = X(Q(X+1) - Q(X)) - 1$, on a $R(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où $R = 0$. C'est absurde car $R(0) = -1$.
13. Vrai. Les racines du trinôme sont $-j$ et $-j^2$. On a $(-j-1)^{n+2} + (-j)^{2n+1} = j^{2n+4} - j^{2n+1} = 0$ car $1 + j + j^2 = 0$ et $j^3 = j$. On prouve de même que $-j^2$ est racine. On en déduit que $x^2 - X + 1$ divise $(X-1)^{n+1} + X^{2n+1}$ dans $\mathbb{C}$ donc aussi dans $\mathbb{R}[X]$ par unicité dans la division euclidienne.
14. Vrai. L'unicité vient de l'injectivité de $\phi : P \mapsto P + P'$ (calculer le noyau). Comme, pour $Q \in \mathbb{K}[X]$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $Q \in \mathbb{K}_n[X]$. On conclut en remarquant que ϕ induit un isomorphisme sur $\mathbb{K}_n[X]$ (sev de dimension finie clairement stable par ϕ , qui est injective).

2

1. Les deux propriétés sont vraies. On a, pour $x \neq 1$, $P_n(x) = \frac{x^n - 1}{x - 1}$.
 - ⇒ Si n est impair, alors $x^n - 1$ est du signe de $x - 1$ par croissance de $x \mapsto x^n$: d'où le a.
 - ⇒ Le b. est clair car les racines de P_n sont les racines n -èmes de l'unité sauf 1.
2. Seules c. et d. sont vraies.
 - ⇒ On remarque que 1 et -1 ne sont pas racines de P . Pour $n \in \mathbb{Z} \setminus \{\pm 1\}$, on a $n \mid n^5 - n^2$ et $n \nmid -1$ donc $P(n) \neq 0$.
 - ⇒ Par l'absurde : soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge q = 1$ et $P(p/q) = 0$. On en déduit $p^5 - p^2 q^3 + q^3 = 0$. Ainsi $q \mid p^5$. Comme $p \wedge q = 1$, on en déduit que $q = 1$. D'où l'absurdité par le cas précédent.
 - ⇒ On étudie les variations de P sur $\mathbb{R}$. Comme $P' = 5X^4 - 2X$, P croît sur $] -\infty, 0]$ de $-\infty$ à 1, décroît sur $[0, \alpha]$ où $\alpha = \sqrt[3]{2/5}$ puis croît sur $[\alpha, +\infty[$. Comme $P(\alpha) > 0$, on déduit du corollaire du TVI que P s'annule une seule fois sur $\mathbb{R}$.
 - ⇒ On raisonne par l'absurde. Supposons que P et P' admettent une racine complexe commune z . On aurait alors $z^5 = z^2 - 1$ et $5z^4 = 2z$, d'où $5z^3 = 2$. Ainsi, $5z^5 = 2z^2 = 5z^2 - 5$, ie $3z^2 = 5$ ce qui contredit clairement $5z^3 = 1$.
3. Seules a., b. et d. sont vraies. D'après le cours, pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P \in F \iff X(X-1) \mid P$. En en déduit que

$$F = \{X(X-1)Q; Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]\}$$

⇒ Ainsi a. et b. sont vraies car $(X^k)_{k \in [0, n-2]}$ et $((1-X)^k)_{k \in [0, n-2]}$ sont des bases de $\mathbb{R}_{n-2}[X]$.

⇒ Le sev proposé n'est pas en somme directe avec F car contient un autre élément de F que 0, le polynôme $X^2 - X$.

⇒ On vérifie que $\mathbb{R}_1[X]$ et F sont deux sev de $\mathbb{R}_n[X]$ tels que $\mathbb{R}_1[X] \cap F = \{0\}$. Comme $\dim F + \dim \mathbb{R}_1[X] = \dim \mathbb{R}_n[X]$, F et $\mathbb{R}_1[X]$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}_n[X]$.

4. Seuls a. et c. sont vrais.

⇒ D est bien une application de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}[X]$. Soient $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Il existe des polynômes $Q_1, Q_2, R_1, R_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$P_1 = AQ_1 + R_1, \deg R_1 < d, P_2 = AQ_2 + R_2, \deg R_2 < d$$

Ceci signifie que $D(P_1) = R_1$ et $D(P_2) = R_2$. On a alors $\lambda P_1 + \mu P_2 = A(\lambda Q_1 + \mu Q_2) + \lambda R_1 + \mu R_2$ et $\deg(\lambda R_1 + \mu R_2) \leq \max(\deg(\lambda R_1), \deg(\mu R_2)) < d$. Ainsi $\lambda R_1 + \mu R_2$ est le reste de la division euclidienne de $\lambda P_1 + \mu P_2$ par A. Autrement dit, $D(\lambda P_1 + \mu P_2) = \lambda D(P_1) + \mu D(P_2)$.

⇒ Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $R = D(P)$. On a donc $\deg R < \deg A$. Puisque $R = 0 \times A + R$, on en déduit $D(R) = R$. Autrement dit $D^2(P) = D(P)$. Ceci étant valable pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, on a donc $D^2 = D$ et D est un projecteur de $\mathbb{K}[X]$.

⇒ Pour tout $P \in \mathbb{K}_d[X]$, $\deg D(P) < d$ i.e. $\deg D(P) \leq d-1$. Ainsi $\text{Im } D \subset \mathbb{K}_{d-1}[X]$. De plus, on a vu que si $R \in \mathbb{K}_{d-1}[X]$, alors $R = D(R) \in \text{Im } D$. Ainsi $\mathbb{K}_{d-1}[X] \subset \text{Im } D$. D'où $\text{Im } D = \mathbb{K}_{d-1}[X]$.

⇒ Un polynôme P appartient au noyau de D si et seulement si A divise P.

5. Seuls b., d. et e. sont vraies.

⇒ Pour $P = a_0 + \dots + a_k X^k$ tel que $a_k \neq 0$, $\phi(P) = a_1 + \dots + a_k ((X+1)^k - X^k)$ est de degré k car le polynôme $(X+1)^k - X^k$ est de degré k (cf. formule du binôme). Ainsi, pour P non constant, on a

$$\deg \phi(P) = \deg P - 1$$

De plus, $\phi(1) = 0$.

⇒ On en déduit de cette formule beaucoup de propriétés de ϕ : $\text{Ker } \phi = \mathbb{R}_0[X]$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par ϕ donc ϕ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, celui-ci est nilpotent mais ce n'est pas le cas de ϕ , $\text{Im } \phi_n = \mathbb{R}_{n-1}[X]$ car cet espace est engendré par la famille des $\phi(X^k)$ pour $k \in [0, n]$, qui est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ (cf. les degrés étagés).

⇒ On en déduit que ϕ est surjectif : tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ appartient à un sev de la forme $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ donc admet un antécédent par ϕ .

6. Seules a. et c. sont vraies. On remarque que ϕ_A est linéaire.

⇒ Si A est constant alors ϕ_A est à valeurs dans $\mathbb{R}_0[X]$ donc non surjective. De plus $\phi_A(X - A) = 0$ donc ϕ_A n'est pas injective.

⇒ Supposons que $\deg A \geq 1$. Soit $P \in \text{Ker } \phi_A$. On a $P \circ A = 0$. Comme $\deg P \circ A = \deg P \deg A$ pour $P \neq 0$, on en déduit que $P = 0$. Ainsi, ϕ_A est injective.

⇒ Supposons que $\deg A \geq 2$. Alors $\forall P$ non constant, $\deg \phi_A(P)$ est divisible par $\deg A$. Ainsi ϕ_A n'est pas surjective.

On en déduit que ϕ_A est surjective si et seulement si $\deg A = 1$. Si $A = aX + b$ avec $a \neq 0$ et $b \in \mathbb{K}$, ϕ_A est bijective et clairement $\phi_A^{-1} = \phi_B$ où $B = (X - b)/a$.

Enseignements à tirer de cet exercice

⇒ Les relations $X^n - 1 = (X - 1)(X^{n-1} + \dots + X + 1) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - \exp\left(\frac{2i\pi k}{n}\right) \right)$ sont à connaître sur le bout des doigts.

⇒ Repérer la linéarité de ϕ_A (au 6.) simplifie un peu les démonstrations.

⇒ On a $P(2) = 16 - 72 + 120 - 88 + 24 = 0$, $P'(2) = 32 - 27 \times 4 + 120 - 44$ et $P''(2) = 12 \times 4 - 54 \times 2 + 60 = 0$. Comme $P^{(3)}(2) = 24 \times 2 - 9 \times 6 = -8 \neq 0$, 2 est une racine de P de multiplicité 3.

⇒ On sait que P est divisible dans $\mathbb{R}[X]$ par $(X-2)^3$. Le quotient de P par $(X-2)^3$ est un polynôme de degré un et unitaire, il est donc de la forme $X - a$, avec $a \in \mathbb{R}$. Comme $P = (X-2)^3(X-a)$, on a $P(0) = 24 = 8a$ et donc $a = 3$. D'après ce qui précède, $P = (X-2)^3(X-3)$.

4



1. $S_n(1) = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

2. a. On sait d'après le cours que le quotient cherché est $Q = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$. Par définition $\omega^n = 1$, et $\omega^n - 1 = (\omega - 1)Q(\omega)$. Puisqu'on a supposé que $\omega \neq 1$, on en déduit que $Q(\omega) = 0$.

b. On dérive l'égalité entre polynômes : $X^n - 1 = (X-1)Q(x)$. Cela donne $nX^{n-1} = Q(X) + (X-1)Q'(X)$, d'où le résultat.

c. Puisque $Q = \sum_{k=0}^{n-1} X^k$, on a $Q' = \sum_{k=1}^{n-1} kX^{k-1}$. Ainsi $Q'(\omega) = \sum_{k=1}^{n-1} k\omega^{k-1} = \sum_{k=1}^n k\omega^{k-1} - n\omega^{n-1}$, c'est-à-dire :

$$Q'(\omega) = S_n(\omega) - n\omega^{n-1}.$$

d. En évaluant l'égalité du b. en ω , on obtient $(\omega - 1)Q'(\omega) = n\omega^{n-1} - Q(\omega) = n\omega^{n-1}$. Puisqu'on a vu que $S_n(\omega) = n\omega^{n-1} + Q'(\omega)$, on en conclut :

$$S_n(\omega) = n\omega^{n-1} \left(1 + \frac{1}{\omega - 1} \right) = n\omega^{n-1} \frac{\omega}{\omega - 1} = \frac{n}{\omega - 1}.$$

(en réutilisant à la dernière égalité que $\omega^n = 1$).

5



Il s'agit de déterminer (a, b) tel que $P_n := aX^{n+1} + bX^n + 1$ admette 1 pour racine multiple. Ceci est équivalent à $P_n(1) = P'_n(1) = 0$, i.e. $a + b + 1 = 0$ et $(n+1)a + nb = 0$, i.e.

$$a = n \text{ et } b = -n - 1$$

6



⇒ Soit $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ une solution telle que $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. On a alors $2 \deg P = 2 \deg Q + 1$ ce qui est absurde.

⇒ Réciproquement, il est clair que le couple $(0, 0)$ est solution.

7



1. On trouve par une récurrence facile que A_n est unitaire de degré $2n$.

2. Comme $A_{n+1}(0) = A_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1(0) = 0$, on a $A_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi X divise A_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. On a $B_1 = X + 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$XB_{n+1} = (X^2 + 1)XB_n + X(XB'_n + B_n)$$

$$\text{d'où } B_{n+1} = (X^2 + 2)B_n + XB'_n.$$

4. Comme $B_{n+1}(0) = 2B_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $B_1(0) = 1$, on a $B_n(0) = 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $A'_n = XB'_n + B_n$, on a $A'_n(0) = B_n(0) = 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

8



1. Les conditions $A(0) = A(1) = 0$ et $A \in \mathbb{R}_2[X]$ entraînent que $A(X) = \lambda X(X-1)$. La condition $A(-1) = 1$ donne $\lambda = 1/2$, et $A = \frac{1}{2}X(X-1)$. On trouve de même que $B = (1-X^2)$ et $C = \frac{1}{2}X(X+1)$.
2. Si $P = \alpha A + \beta B + \gamma C = 0$, alors $\alpha = P(-1) = 0$, $\beta = P(0) = 0$, $\gamma = P(1) = 0$. La famille (A, B, C) est formée d'éléments de $\mathbb{R}_2[X]$, libre de cardinal 3 égal à la dimension de $\mathbb{R}_2[X]$. C'est une base de cet espace.
3. Au vu de la définition de u , il vient : $u^2(A) = u(A)$, $u^2(B) = u(B)$, et $u^2(C) = u(C)$, donc par linéarité, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $u^2(P) = u(P)$ ce qui signifie que u est un projecteur de $\mathbb{R}_n[X]$. Le noyau $\text{Ker } u$ est formé des polynômes s'annulant en $\{-1, 0, 1\}$ donc de la forme $(X+1)X(X-1)Q(X)$. L'image $\text{Im}(u)$ est incluse dans $\mathbb{R}_2[X]$, et comme la restriction de u à $\mathbb{R}_2[X]$ est l'identité, on a $\text{Im}(u) = \mathbb{R}_2[X]$.

9



1. La linéarité de ϕ est claire par linéarité de la substitution. De plus, $\deg \phi(P) \leq \deg P$ pour tout polynôme P . Ainsi ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. On a $\phi(1) = -1$, $\phi(X) = 0$ et $\phi(X^2) = 2X^2$. Ainsi, $\text{Im } \phi = \text{Vect}(-1, X^2)$ est de dimension deux (par liberté de $(-1, X^2)$) donc $\text{rg } \phi = 2$ et $\dim \text{Ker } \phi = 1$ par le théorème du rang. Comme $X \in \text{Ker } \phi$, on en déduit que $\text{Ker } \phi = \text{Vect}(X)$.

10



⇒ On a

$$X^5 + X = X(X^4 + 1) = X(X^4 - i^2) = X(X^2 - i)(X^2 + i) = X(X - e^{\frac{i\pi}{4}})(X + e^{\frac{i\pi}{4}})(X - e^{\frac{3i\pi}{4}})(X + e^{\frac{3i\pi}{4}})$$

⇒ On a

$$X^5 + X = X(X^4 + 1) = X((X^2 + 1)^2 - 2X^2) = X(X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$$

Les deux trinômes du second degré sont irréductibles sur $\mathbb{R}$ car de discriminants strictement négatifs.

11



1. Comme $\deg B = 4$, on remarque que f est à valeurs dans E . Soit $(P_1, P_2, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}$. Notons Q_1 et Q_2 les quotients dans la division euclidienne de AP_1 et AP_2 par B . On a $AP_1 = BQ_1 + f(P_1)$ et $AP_2 = BQ_2 + f(P_2)$ d'où

$$A(P_1 + \lambda P_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + f(P_1) + \lambda f(P_2)$$

avec $\deg(f(P_1) + \lambda f(P_2)) < 4$. Ainsi $f(P_1 + \lambda P_2) = f(P_1) + \lambda f(P_2)$ par unicité dans la division euclidienne.

2. Soit $P \in \text{Ker } f$. On a $f(P) = 0$, i.e. B divise AP . Comme les racines complexes de B sont $0, 1, j, j^2$ et que $0, j, j^2$ ne sont pas racines de A , on en déduit que $X(X-j)(X-j^2) = X^3 + X^2 + X$ divise P . Puisque $P \in E$, on en déduit l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $P = \lambda(X^3 + X^2 + X)$. Réciproquement, $A(X^3 + X^2 + X) = (X-1)(X^3 + X^2 + X + 1)X(X^2 + X + 1) = (X^3 + X^2 + X + 1)B$ donc $f(X^3 + X^2 + X) = 0$. Ainsi $\text{Ker } f = \text{Vect}(X^3 + X^2 + X)$ et $\text{rg } f = \dim E - 1 = 4 - 1 = 3$ par le théorème du rang.

12



On a :

$$\begin{aligned} Q' &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \left(\frac{P^{(k+1)}(X)X^{k+1}}{(k+1)!} + \frac{P^{(k)}(X)X^k}{k!} \right) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{P^{(k+1)}(X)X^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{P^{(k)}(X)X^k}{k!} \\ &= - \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \frac{P^{(k)}(X)X^k}{k!} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{P^{(k)}(X)X^k}{k!} = - \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{P^{(k)}(X)X^k}{k!} + \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{P^{(k)}(X)X^k}{k!} \end{aligned}$$

car $P^{(n+1)} = 0$ pour $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, après télescopage, $Q' = P$.

13



L'équation n'a aucune solution. Supposons que P soit une solution. Les polynômes $P - X^2 - 1$ et $P - X^2 + 1$ sont nuls car admettent une infinité de racines (respectivement les entiers pairs et les entiers impairs), d'où $P = X^2 - 1 = X^2 + 1$, ce qui est absurde.

14



1. Soit $z \in \mathbb{C}$. Le nombre i n'étant pas racine de P_n :

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 &\iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \\ &\iff \exists k \in [0, n-1], \frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in [0, n-1], z\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) = -i\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) \\ &\iff \exists k \in [1, n-1], z = -i \frac{1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} \end{aligned}$$

où l'on a exclu la valeur $k = 0$ pour laquelle l'équation d'inconnue z n'a aucune solution. Les racines de P_n sont donc :

$$z_k = -i \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}}}{-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) e^{\frac{ik\pi}{n}}} = \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Par injectivité de la fonction cotangente sur $]0, \pi[$, on trouve $n-1$ racines distinctes.

2. En utilisant la formule du binôme, on aboutit à

$$P_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} i^{n-k} X^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-i)^{n-k} X^k = 2inX^{n-1} + 0 \cdot X^{n-2} + a_{n-3}X^{n-3} + \dots + a_1X + i^n - (-i)^n$$

Ainsi P_n est de degré $n-1$ et de coefficient dominant $2in$; on peut donc écrire (cf. la première question de l'exercice),

$$P_n = 2in \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) = 2in(X^{n-1} - A_nX^{n-2} + \dots + (-1)^{n-1}B_n)$$

On en déduit que $-2inA_n = 0$ et $i^n - (-i)^n = 2i \operatorname{Im}(i^n) = 2i \sin(n\pi/2) = 2in(-1)^{n-1}B_n$ ainsi $A_n = 0$ et $B_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin(n\pi/2)$.

Commentaire

Pour trouver les racines complexes d'un polynôme P , la résolution de $P(z) = 0$ ne suffit pas à conclure (car cela ne donne pas la multiplicité des racines).

15



On remarque que $P^2(a_i) = 1$ pour tout i dans $[0, 4]$. Comme $P^2 - 1$ est au plus de degré quatre et admet au moins cinq racines, ce polynôme est nul : ainsi $P^2 = 1$ donc P est constant égal à -1 ou 1 .

16



1. Soit α une racine complexe de P . On a $P(\alpha^2) = P(\alpha)P(\alpha-1) = 0$ et $P((\alpha+1)^2) = P(\alpha+1)P(\alpha) = 0$. Ainsi α^2 et $(\alpha+1)^2$ sont racines de P .

2. Soit α une racine complexe de P . Par une récurrence immédiate, α^{2^n} et $(\alpha + 1)^{2^n}$ sont des racines de P . Comme P n'est pas nul (il est de degré $n \in \mathbb{N}^*$), on en déduit que ces deux suites sont injectives. Ceci impose que $|\alpha| = 0$ ou 1 , et $|1 + \alpha| = 0$ ou 1 . Mais 0 ne peut être racine de P car sinon on aurait $(1 + 1)^2 = 4$ racine de P , puis $(1 + 4)^2 = 25$ racine de P et plus généralement tous les termes de la suite définie par $u_{n+1} = (u_n + 1)^2$ et $u_0 = 0$. Comme cette suite est strictement croissante (vérification immédiate), on aurait une infinité de racines de P alors que $P \neq 0$. On en déduit que $|\alpha| = |\alpha + 1| = 1$.
3. Les équations trouvées à la question précédente caractérisent le cercle trigonométrique et le cercle de centre $A(-1)$ et de rayon 1 dont l'intersection est la paire des points d'affixes j et j^2 . Comme P est réel, j et j^2 ont la même multiplicité m dans P et donc le polynôme P est de la forme $P = \lambda(X - j)^m(X - j^2)^m = \lambda(X^2 + X + 1)^m$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Ainsi, $m = n$ et, en ré-injectant dans l'équation, on obtient $\lambda = 1$. Il s'agit ensuite de faire la synthèse. Il reste le cas des constantes à étudier : les seuls polynômes constants solutions sont clairement 0 et 1 .

17



1. Si P est nul, le résultat est trivial. Supposons P non nul, notons n son degré et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ ses coefficients. On a

$$P(X) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} a_{2k} X^{2k} + \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} a_{2k+1} X^{2k+1} = R(X^2) + XQ(X^2)$$

$$\text{avec } Q(X) = \sum_{1 \leq 2k+1 \leq n} a_{2k+1} X^k \in \mathbb{Z}[X] \text{ et } R(X) = \sum_{0 \leq 2k \leq n} a_{2k} X^k \in \mathbb{Z}[X].$$

2. Supposons que $\sqrt{2}$ soit racine de P . En utilisant les polynômes Q et R trouvés à la question précédente, on en déduit après évaluation que $R(2) + \sqrt{2}Q(2) = 0$. Comme P et Q sont dans $\mathbb{Z}[X]$, $R(2)$ et $Q(2)$ sont des entiers. Comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, on en déduit que $R(2) = Q(2) = 0$. On a donc également $P(-\sqrt{2}) = R(2) - \sqrt{2}Q(2) = 0$. Comme les dérivées de P sont dans $\mathbb{Z}[X]$, on déduit de ce résultat que $-\sqrt{2}$ est racine de P , P' , ..., $P^{(m-1)}$ où m est la multiplicité de $\sqrt{2}$ dans P . Raisonnons par l'absurde en supposant que $P^{(m)}(-\sqrt{2}) = 0$. On aurait alors $P^{(m)}(\sqrt{2}) = 0$ par ce qui précède, ce qui est absurde (on applique le lemme précédente à $P^{(m)}(-X) \in \mathbb{Z}[X]$). Ainsi, $-\sqrt{2}$ est de multiplicité m dans P .