AN 12 | Séries numériques

L'étude des séries numériques nécessite un parfait maniement de l'analyse asymptotique et des techniques sommatoires (changements d'indice, sommation par paquets, transformation d'abel, etc.).

Vues de la gare Saint-Lazare, Claude Monet

12 Séries numériques 1

1 Quizz 2

2 Exercices élémentaires 3

3 Exercices classiques plus techniques 5

4 Indications 7

5 Solutions 9

1. Quizz

1 — Vrai ou faux ? *f*

1. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge.
2. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors la série $\sum u_n$ converge.
3. Pour $\rho \in \mathbb{R}$, la série de terme général $n!\rho^n$ converge si, et seulement si, $|\rho| < 1$.
4. La somme de deux séries divergentes est divergente.
5. La somme de deux séries divergentes à termes positifs est divergente.
6. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.
7. Si la série à termes > 0 $\sum u_n$ diverge, alors la série $\sum u_n^{-1}$ converge.
8. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum u_n^2$ converge.
9. Si la série à termes > 0 $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum u_n^2$ converge.
10. Si les séries $\sum u_{2n}$ et $\sum u_{2n+1}$ divergent, alors la série $\sum u_n$ diverge.
11. Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum u_{2n}$ converge.
12. Si les séries à termes > 0 $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum \max(u_n, v_n)$ converge.
13. Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.
14. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln n}$ converge *si et seulement si* $\alpha \geqslant 1$.
15. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge *si et seulement si* $\alpha > 0$.
16. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n(n+1)}$ converge et sa somme vaut 1.
17. Pour $q \in \mathbb{R}$, la série $\sum q^{n^2}$ converge *si et seulement si* $|q| < 1$.
18. Pour $q \in \mathbb{R}_+$, la série $\sum q^{\sqrt{n}}$ converge *si et seulement si* $q < 1$.

2 — QCM sur les séries numériques *ff*

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \cosh^\alpha(n) - \sinh^\alpha(n)$.
   - **a.** $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;
   - **b.** La série $\sum u_n$ converge *si et seulement si* $\alpha < 2$.
2. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt[4]{n^4+n^2} - \sqrt[3]{P(n)}$.
   - **a.** Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors P est unitaire et de degré 3 ;
   - **b.** Si $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\dfrac{a}{3}$;
   - **c.** La série $\sum u_n$ converge *si et seulement si* $\exists c \in \mathbb{R},\ P(X) = X^3 + \dfrac{3}{4}X + c$.

3. Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ tel que $\varphi(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_0 + \dfrac{a_1}{x} + \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

- **a.** $a_0 \geqslant 0$;
- **b.** La série $\sum \varphi(n)$ converge *si et seulement si* $(a_0, a_1) = (0, 0)$;
- **c.** $\prod_{k=1}^n \varphi(k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *si et seulement si* $a_0 = 0$;
- **d.** La suite de terme général $\prod_{k=1}^n \varphi(k)$ converge *si et seulement si* $(a_0, a_1) = (1, 0)$;
- **e.** Si $a_0 < 1$, alors a série de terme général $\prod_{k=1}^n \varphi(k)$ converge.

4. Soit $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ et $u_n = 2^{-n} \ln x_n$.

- **a.** $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$;
- **b.** $u_{n+1} - u_n \sim \dfrac{1}{2^{n+1} x_n}$;
- **c.** La suite (u_n) diverge vers $+\infty$;
- **d.** Il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $x_n \sim \alpha^{2^n}$.

5. Soit $\rho \in]-1, 1[$.

- **a.** La série $\sum n\rho^n$ converge ;
- **b.** On a $\displaystyle\sum_{k=0}^n k\rho^k = \sum_{0\leqslant \ell < k \leqslant n} \rho^k$;
- **c.** On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\rho^n = \frac{1}{(1-\rho)^2}$.

6. Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^n u_k$.

- **a.** $\displaystyle\int_{\mathrm{S}_{n-1}}^{\mathrm{S}_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{u_n}{\mathrm{S}_{n-1}}$;
- **b.** Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \frac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ diverge ;
- **c.** Si $\sum \frac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ converge, alors $\sum u_n$ converge ;
- **d.** Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum \frac{u_n}{\mathrm{S}_n^2}$ diverge ;
- **e.** Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum \frac{u_n}{\mathrm{S}_n^2}$ converge.

2. Exercices élémentaires

3 — *Vitesse de convergence de la tangente hyperbolique*

Étudier la nature de la série $\sum u_n$ où $u_n := 1 - \tanh n$.

4 — *Une nature*

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On pose $u_n := e^{\frac{1}{n}} - a - \dfrac{b}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Discuter la nature de $\sum u_n$.

5 — *Une série entière*

Discuter la convergence la série de terme général $u_n := \binom{2n}{n} x^n$ où $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Dans le cas où le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure, on utilisera la formule de Stirling.

6 — *Une suite récurrente*

Soit $\alpha > 0$. On définit la suite $u := (u_n)_{n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} := \dfrac{\cos u_n}{n^\alpha}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que u converge et déterminer sa limite.
2. Discuter la nature de la série $\sum u_n$.

7 — *Exemples élémentaires* f

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{\sin(1/n)}{\sqrt{n+1}}$.
2. $u_n = e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$;
3. $u_n = \dfrac{a^n - b^n}{a^n + b^n}$ pour a et b dans $\mathbb{R}_+^*$;
4. $u_n = \dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$;
5. $u_n = \dfrac{n}{n^2 + 3^n}$;
6. $u_n = e^{-\sqrt{n}}$;
7. $u_n = \dfrac{(-1)^n \ln(n) + n}{n^s}$ avec $s > 0$;
8. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n n}$.

8 — *Étude d'une série* f

Soit $u_n := \left(\cosh\left(\dfrac{1}{n}\right) - 1\right)^{\sinh\left(\frac{1}{n}\right)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que $\ln u_n \sim -2\dfrac{\ln n}{n}$.
2. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n - 1$.

9 — *Variations riemanniennes* f

Soit $\alpha > 1$. On pose, pour $n \geqslant 2$, $u_n := \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} + \dfrac{1}{(n-1)^\alpha} - \dfrac{2}{n^\alpha}$.

1. Déterminer un équivalent simple de u_n et en déduire que $\sum u_n$ converge.
2. On pose, pour $n \geqslant 2$, $S_n := \displaystyle\sum_{k=2}^{n} u_k$. Montrer que $S_n = 1 + \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{(n+1)^\alpha} - \dfrac{1}{n^\alpha}$.

   En déduire une nouvelle démonstration de la convergence de la série $\sum u_n$ puis calculer la somme S de cette série.

3. Trouver un équivalent de $R_n = S - S_n$.

3. Exercices classiques plus techniques

10 — *La série des produits partiels* f

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs convergente. Étudier la nature de $\sum u_0 \times u_1 \times \cdots \times u_n$.

11 — *Une suite implicite* f

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $E_n : x^4 + x^3 = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, E_n admet une unique solution. On la note x_n.

2. Déterminer la nature de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{x_n}$.

3. Déterminer la nature de $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{x_n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

12 — *Une suite récurrente* f

Soit $a_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

1. Démontrer que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

2. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} (-1)^n a_n$.

3. Déterminer un équivalent de $a_{n+1} - a_n$ en fonction de a_n et en déduire la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n^2$.

4. Déterminer un équivalent de $\ln \frac{a_{n+1}}{a_n}$ et en déduire la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 0} a_n$.

13 — *Une série semi-convergente* f

On pose $u_n = \ln\left(2n + (-1)^n\right) - \ln(2n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Démontrer que $\sum |u_n|$ diverge.

2. Établir que $\sum u_n$ converge.

14 — *Autour du CSSA* f

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n := \sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$.

1. Justifier que u_n existe bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Déterminer le signe de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Démontrer que $\forall \alpha \in [0,2[\,,\ n^{\alpha} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

15 — *Un lieu géométrique ff*

Tracer l'ensemble $\mathscr{L} := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ \sum_{n\geqslant 0} \frac{x^{2n}}{1+y^{2n}} \text{ converge} \right\}$.

4. Indications

1

Au 9., on pourra remarquer que la convergence de $\sum u_n$ implique $0 \leqslant u_n \leqslant u_n^2$ APCR.

2

On pourra trouver un équivalent de u_n au 1.

3

Chercher un équivalent de u_n.

4

Développer l'exponentielle puis discuter selon a et b.

5

Il faut étudier à part le cas où $x = \frac{1}{4}$.

6

Il n'est pas difficile de trouver un équivalent de u_n.

7

1. On a $u_n \sim \dfrac{1}{n^{3/2}}$ donc la série converge.
2. On a $u_n \sim \dfrac{e}{2n}$ donc la série diverge.
3. Il y a divergence groissière sauf si $a = b$.
4. Appliquer le critère de D'Alembert. Comme
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4} < 1$$
la série converge.
5. Comme
$$u_n \sim \frac{n}{3^n}$$
$u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées et $\sum u_n$ converge.
6. Par croissances comparées,
$$n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
ainsi $u_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\sum u_n$ converge.
7. Comme
$$u_n \sim \frac{1}{n^{s-1}}$$
la série converge *si et seulement si* $s > 2$.
8. On a
$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^{3/2}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$
En conclure que la série converge.

8

Utiliser les DL usuels.

9

Mettre n^{α} en facteur afin de trouver un équivalent au 1.

10

Appliquer le critère de D'Alembert.

11

On peut écrire u_n sous la forme $f^{-1}(n)$.

12

La suite (a_n) décroît vers 0.

13

Trouver un équivalent au 1. Développer à la précision $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ au 2.

14

Utiliser tous les renseignements donnés par le critère spécial des séries alternées.

15

Commencer à trouver un équivalent de $\frac{x^{2n}}{1+y^{2n}}$ en effectuant une disjonction sur y.

5. Solutions

1

1. Vrai : si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Faux. Cex : $u_n = \frac{1}{n}$·
3. Faux. Pour $\rho \neq 0$, on a $\frac{(n+1)!\rho^{n+1}}{n!\rho^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ La série converge *si et seulement si* $\rho = 0$.
4. Faux. Cex : $\frac{1}{n}$ et $-\frac{1}{n}$.
5. Vrai. En notant $\sum u_n$ et $\sum v_n$ les deux séries, on conclut par $u_n + v_n \geqslant u_n \geqslant 0$.
6. Faux. Cex : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$·
7. Faux. Cex : $u_n = \frac{1}{n}$·
8. Faux. Cex : $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$·
9. Vrai. Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $u_n^2 \leqslant u_n$ APCR.
10. Faux. Cex : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$·.
11. Faux. Cex : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$·.
12. Vrai. On a $0 \leqslant \max(u_n, v_n) \leqslant u_n + v_n$.
13. Faux. Cex : $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$ et $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$·
14. Faux. La bonne condition est $\alpha > 1$.
    - Si $\alpha < 0$, alors la série diverge grossièrement.
    - Si $0 \leqslant \alpha < 1$, alors $\frac{1}{n^\alpha \ln n} \geqslant \frac{1}{n^{(1+\alpha)/2}} \geqslant 0$ et la série diverge.
    - Si $\alpha > 1$, alors $\frac{1}{n^\alpha \ln n} = o\left(\frac{1}{n^{(1+\alpha)/1}}\right)$ et la série converge.
    - Si $\alpha = 1$, alors on peut appliquer le théorème de comparaison série-intégrale : puisque $\int_1^X \frac{dt}{t\ln t} = \ln\ln X \xrightarrow[X\to+\infty]{} +\infty$ la série diverge.
15. Vrai. Si $\alpha \leqslant 0$, alors il y a divergence grossière. Sinon, il y a convergence par le CSSA.
16. Vrai. Il suffit de décomposer en éléments simples la fraction et d'effectuer un télescopage.
17. Vrai. Si $|q| \geqslant 1$, alors il y a divergence grossière. Sinon, $|q^{n^2}| \leqslant |q|^n$.
18. Vrai. Si $|q| \geqslant 1$, alors il y a divergence grossière. Sinon, $q^{n^2} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Enseignements à tirer de cet exercice

- Il est recommandé de savoir retrouver rapidement ces contre-exemples.
- Attention au signe quand on applique les théorèmes de comparaison sur les séries.

2

1. Seul b. est vrai. On a en effet

$$u_n = 2^{-\alpha}e^{\alpha n}\left(\left(1+e^{-n}\right)^{\alpha} - \left(1-e^{-n}\right)^{\alpha}\right) = \alpha 2^{1-\alpha}e^{(\alpha-2)n} + o\left(e^{(\alpha-2)n}\right)$$

On en déduit que :

⇛ Si $\alpha > 2$, alors il y a divergence grossière.

⇛ Sinon, $u_n \ll \frac{1}{n^2}$.

2. Les trois propositions sont vraies. Notons $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \lambda \mathrm{X}^p + \mathrm{Q}(\mathrm{X})$ avec $p \in \mathbb{N}$ et Q de degré $< p$. On a

$$u_n = n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/4} - \lambda^{1/3}n^{p/3}\left(1+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{1/3} \sim \begin{cases} n & \text{si } p<3 \text{ ou } \lambda = 0 \\ -\lambda^{1/3}n^{p/3} & \text{si } p>3 \text{ et } \lambda \neq 0 \\ (1-\lambda^{1/3})n & \text{si } p=3 \text{ et } \lambda \neq 1 \end{cases}$$

⇛ Si $p \neq 3$ ou ($p = 3$ et $\lambda \neq 1$), alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.

⇛ Supposons $\lambda = 1$ et $p = 3$. Écrivons $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 + a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$. On a alors

$$u_n = n\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{1/4} - n\left(1+\frac{a}{n}+\frac{b}{n^2}+\frac{c}{n^3}\right)^{1/3} = -\frac{a}{3} + \frac{4a^2-12b+9}{36n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

- Si $a \neq 0$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Si $a = 0$ et $12b \neq 9$, alors $u_n \sim \frac{9-12b}{36n}$ (termes positifs) et donc $\sum u_n$ diverge.
- Si $a = 0$ et $b = 3/4$, alors $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum u_n$ converge.

3. Seuls a., b. et e. sont vrais.

⇛ Du développement asymptotique, on déduit que $\varphi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} a_0$. Comme $\varphi > 0$, on en déduit que $a_0 \geqslant 0$.

⇛ Si $a_0 \neq 0$, alors $\sum \varphi(n)$ diverge grossièrement. Si $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$, alors $\varphi(n) \sim \frac{a_1}{n}$ (signe constant) donc $\sum \varphi(n)$ diverge. Si $(a_0, a_1) = (0,0)$, alors $\varphi(n) = \mathrm{O}(\frac{1}{n^2})$ donc $\sum \varphi(n)$ converge.

⇛ Notons $p_n = \prod_{k=1}^{n} \varphi(k)$.

- La suite (p_n) converge vers 0 *si et seulement si* la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \ln\varphi(k)$ diverge vers $-\infty$. Si $a_0 = 0$, alors $\ln\varphi(k) \xrightarrow[k\to+\infty]{} -\infty$. Sinon

$$\ln\varphi(n) = \ln a_0 + \frac{a_1}{a_0 n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad (\star)$$

  Ainsi (p_n) converge *si et seulement si* $0 \leqslant a_0 < 1$ ou ($a_0 = 1$ et $a_1 < 0$).

- La suite (p_n) converge *si et seulement si* la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n} \ln\varphi(k)$ converge ou diverge vers $-\infty$. Par $(\star)$, on a donc que la suite (p_n) converge *si et seulement si* $0 \leqslant a_0 < 1$ ou ($a_0 = 1$ et $a_1 \leqslant 0$).

⇛ Supposons $0 \leqslant a_0 < 1$. Alors $\phi(n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} a_0 \in [0,1[$ et $\sum \prod_{k=1}^{n} \varphi(k)$ converge (par le critère de D'Alembert).

4. Seuls a., b. et d. sont vrais.

⇛ L'intervalle $\mathbb{R}_+^*$ est stable par $f : x \mapsto x^2 + x$ donc (x_n) est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n > 0$ donc (x_n) diverge vers $+\infty$ ou converge (TLM). Par l'absurde : si (x_n) converge, alors sa limite est un point fixe de f donc vaut 0, ce qui contredit la stricte croissance de (x_n).

⇛ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2^{n+1}x_n}\right) \sim \dfrac{1}{2^{n+1}x_n}$ car $2^{n+1}x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

⇛ Comme (x_n) est croissante, on a $u_{n+1} - u_n = \mathrm{O}(2^{-n})$ donc la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge : ainsi la suite (u_n) converge. Notons ℓ sa limite. On a

$$0 \leqslant \ell - u_n = \sum_{k=n}^{+\infty}(u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=n}^{+\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{2^{k+1}x_k}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{2^{k+1}x_k} \leqslant \frac{1}{x_n}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{1}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^n x_n}$$

Ainsi $u_n = \ell + o(2^{-n})$ et $\ln x_n = \ell 2^n + o(1)$ d'où $x_n \sim \alpha^{2^n}$ avec $\alpha := e^{\ell}$.

5. Seuls a. et b. sont vrais.

⇛ La convergence de la série s'obtient sans peine en appliquant le critère de D'Alembert.

⇛ On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\rho^k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=0}^{k-1}\rho^k = \sum_{0\leqslant \ell < k \leqslant n}\rho^k$.

⇛ On poursuit les calculs :

$$\sum_{k=0}^{n} k\rho^k = \sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{k=\ell+1}^{n}\rho^k = \sum_{\ell=0}^{n-1}\rho^{\ell+1}\frac{1-\rho^{n-\ell}}{1-\rho} = \rho\frac{1-\rho^n}{(1-\rho)^2} - \frac{n\rho^{n+1}}{1-\rho}$$

Comme $\rho^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $n\rho^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$.

6. Seuls a., b., c. et d. sont vrais.

⇛ Comme $\mathrm{S}_n > \mathrm{S}_{n-1} > 0$, on a $\displaystyle\int_{\mathrm{S}_{n-1}}^{\mathrm{S}_n}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \int_{\mathrm{S}_{n-1}}^{\mathrm{S}_n}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{S}_{n-1}} = \frac{\mathrm{S}_n - \mathrm{S}_{n-1}}{\mathrm{S}_{n-1}} = \frac{u_n}{\mathrm{S}_{n-1}}$ (croissance de l'intégrale).

⇛ Supposons $\sum u_n$ convergente. Alors $\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 0$ donc $\frac{u_n}{\mathrm{S}_n} \sim \frac{u_n}{\ell}$ et $\sum \frac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ converge.

⇛ On a $0 \leqslant \ln \mathrm{S}_n - \ln \mathrm{S}_{n-1} \leqslant \displaystyle\int_{\mathrm{S}_{n-1}}^{\mathrm{S}_n}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{u_n}{\mathrm{S}_{n-1}}$. Supposons $\sum \frac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ convergente. On a alors

$$\frac{u_n}{\mathrm{S}_{n-1}} = \frac{u_n}{\mathrm{S}_n - u_n} = \frac{u_n}{\mathrm{S}_n}\left(1 - \frac{u_n}{\mathrm{S}_n}\right)^{-1} \sim \frac{u_n}{\mathrm{S}_n} \quad \text{car } \frac{u_n}{\mathrm{S}_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Ainsi $\sum \frac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ converge donc $\sum(\ln \mathrm{S}_n - \ln \mathrm{S}_{n-1})$ converge, ie la suite (S_n) converge donc la série $\sum u_n$ converge.

⇛ On suit une même analogue : on a $\displaystyle\frac{u_n}{\mathrm{S}_{n-1}^2} \leqslant \int_{\mathrm{S}_{n-1}}^{\mathrm{S}_n}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ (croissance de l'intégrale).

➰ Supposons $\sum u_n$ convergente. Alors $\mathrm{S}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell > 0$ donc $\frac{u_n}{\mathrm{S}_n^2} \sim \frac{u_n}{\ell^2}$ et $\sum \frac{u_n}{\mathrm{S}_n^2}$ converge.

➰ Le Cex $u_n := n+1$ montrer que $\sum \frac{u_n}{\mathrm{S}_n^2}$ peut converger alors que $\sum u_n$ diverge.

Enseignements à tirer de cet exercice

- Au 3., on peut montrer que $\sum\prod_{k=1}^{n}\varphi(k)$ converge $\iff$ $0\leqslant a_0<1$ ou ($a_0=1$ et $a_1<-1$). Supposons que $a_0=1$. On a
$$\ln\frac{(n+1)^{-a_1}p_{n+1}}{n^{-a_1}p_n}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
Ainsi, $\exists\lambda>0$ tel que $p_n\sim\dfrac{\lambda}{n^{-a_1}}$. On aura reconnu un critère du type Gauss-Raabe-Duhamel.
- Attention au 4... On ne peut conclure que $x_n\sim(e^{\ell})^{2^n}$ à partir de $\ln x_n=2^n\ell+o(2^n)$. Cette dernière relation, permet de conclure que $x_n=(e^{\ell})^{2^n}e^{o(2^n)}$ mais le « petit o de 2^n ne converge pas nécessairement vers 0. D'où l'idée de s'intéresser plus finement à $\ell-u_n$.

3

On a $1-\tanh n=\frac{e^{-n}}{\cosh n}\sim 2e^{-2n}$ (termes positifs). Ainsi $\sum u_n$ converge par comparaison à une série géométrique.

4

On a $u_n=1-a+\dfrac{1-b}{n}+\mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.
- Cas 1 : $a\neq 1$. On a alors que $\sum u_n$ diverge grossièrement.
- Cas 2 : $a=1$ et $b\neq 1$. Comme $u_n\sim\frac{1-b}{n}$ (terme de signe constant), la série $\sum u_n$ diverge par comparaison à une série de Riemann.
- Cas 3 : $(a,b)=(1,1)$. Comme $u_n=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, la série $\sum u_n$ converge absolument donc converge.

5

On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(2n+2)!n!^2}{(2n)!(n+1)!^2}x=\dfrac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}x\sim 4x$. On déduit alors du critère de D'Alembert que :
- Si $x<\dfrac{1}{4}$, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $x>\dfrac{1}{4}$, alors $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Si $x=1/4$, alors par la formule de Stirling :
$$u_n\sim\frac{\sqrt{4\pi n}(2n/e)^{2n}}{4^n 2\pi n(n/e)^n}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$$
et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est positive donc la série $\sum u_n$ diverge par comparaison à une série de Riemann.

6

1. Comme α, on déduit de la relation de récurrence que $u_{n+1}=\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$ d'où $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.
2. Comme u_n tend vers 0, on déduit de la relation de récurrence que $u_{n+1}\sim\frac{1}{n^{\alpha}}$ (terme positif). Ainsi, par comparaison à une série de Riemann, $\sum u_n$ converge *si et seulement si* $\alpha>1$.

7

1. On a
$$n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\ \text{ d'où }\ \exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=e\left(1-\frac{1}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$
et
$$u_n=e-\exp\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{e}{2n}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{e}{2n}.$$
Puisque $u_n\sim\frac{e}{2n}$, les séries $\sum u_n$ et $\sum\frac{e}{2n}$ sont à termes positifs à partir d'un certain rang et de même nature. On reconnaît dans la deuxième série une série de Riemann divergente (à un coefficient multiplicateur près) : $\sum u_n$ diverge.

2. Posons, pour tout entier naturel n, $u_n=\dfrac{a^n}{a^n+b^n}$.
   - Si $a>b$, on a $b^n=o(a^n)$ donc $u_n\sim\frac{a^n}{a^n}=1$ et $\sum u_n$ diverge grossièrement.
   - Si $a=b$, on a $\forall n\geqslant 0,\ \ u_n=\frac{1}{2}$ donc $\sum u_n$ diverge grossièrement.
   - Si $a<b$, on a $a^n=o(b^n)$ donc $u_n\sim\left(\frac{a}{b}\right)^n$ donc $\sum u_n$ converge par comparaison à une série géométrique.

3. On a
$$\forall n\geqslant 0,\ \ \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}}=\frac{(2n)!((n+1)!)^2}{(n!)^2(2n+2)!}=\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)}=\frac{n+1}{4n+2}\sim\frac{1}{4}$$
Le test de D'Alembert est donc concluant : $\sum\dfrac{1}{\binom{2n}{n}}$ converge.

4. Par croissances comparées $n^2\ll 3^n$, d'où
$$u_n\sim\frac{n}{3^n},\ \text{ d'où } u_{n+1}\sim\frac{n+1}{3^{n+1}}\sim\frac{n}{3^{n+1}}\ \text{puis}\ \ \frac{u_{n+1}}{u_n}\sim\frac{3^n}{3^{n+1}}=\frac{1}{3}<1$$
Comme la série $\sum u_n$ est à valeurs positives, on déduit du Test de D'Alembert que $\sum u_n$ converge.

5. Par croissances comparées, $e^{-\sqrt{n}}\ll\frac{1}{n^2}$ et $\sum\frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente : $\sum e^{-\sqrt{n}}$ converge.

6. Notons $f: t>0\mapsto f(t)=\frac{\ln^r(t)}{t^s}$. Comme f est dérivable avec
$$\forall t>0,\ \ f'(t)=\frac{r\ln^{r-1}(t)-\ln^r(t)}{t^{s+1}}\sim-\frac{\ln^r(t)}{t^s},$$
$f'<0$ au voisinage de $+\infty$ (i.e. il existe $a>0$ tel que $f'<0$ sur $[a,+\infty[$) : f est décroissante au voisinage de l'infini. La série $\sum u_n$ est donc alternée à partir d'un certain rang. Comme $(-1)^n u_n\geqslant 0$ pour tout $n\geqslant 1$ et $\lim u_n=0$ (par croissances comparées), on déduit du critère spécial des séries alternées que la série $\sum u_n$ converge.

7. $\forall n\in\mathbb{N}^*$, on a
$$\begin{aligned}u_n&=\frac{(-1)^n}{n}\times\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}}=\frac{(-1)^n}{n}\cdot\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1}=\frac{(-1)^n}{n}\cdot\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)\\&=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{1}{n^{3/2}}+\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)\end{aligned}$$

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées, la série $\sum -\frac{1}{n^{3/2}}$ est une série de Riemann convergente (car $3/2 > 1$) et la série de terme général $O(\frac{1}{n^{3/2}})$ est absolument convergente (donc convergente) par comparaison aux séries de Riemann. On en déduit que $\sum u_n$ converge en tant que somme de trois séries convergentes.

8. On a clairement

$$u_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}$$

donc Σu_n converge par comparaison à la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$.

8

1. On a

$$\ln u_n = \sinh\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(\cosh\left(\frac{1}{n}\right)-1\right) = \sinh\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \frac{1}{n}\left(-2\ln n + \underbrace{\ln\left(\frac{1}{2}+o(1)\right)}_{=o(\ln n)}\right) \sim -2\frac{\ln n}{n}$$

2. Par ce qui précède, on a $\ln u_n = -2\frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ d'où

$$u_n = \exp\left(-2\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right) = 1-2\frac{\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right)$$

donc $u_n - 1 \sim -2\frac{\ln n}{n}$. Comme $\frac{\ln n}{n} \geqslant \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 3$, la série $\sum \frac{\ln n}{n}$ diverge donc $\sum(u_n-1)$ diverge (par comparaison à une série de signe constant divergence).

9

1. On a

$$u_n = n^{-\alpha}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}-2\right) = n^{-\alpha}\left(2\times\frac{(-\alpha)(-\alpha-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \sim \frac{\alpha(\alpha+1)}{n^{2+\alpha}}$$

terme positif qui est positf. Comme $2+\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ converge.

2. Par télescopage, on a :

$$S_n = \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(k+1)^\alpha}-\frac{1}{k^\alpha}+\frac{1}{(n-1)^\alpha}-\frac{1}{k^\alpha}\right) = 1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{(n+1)^\alpha}-\frac{1}{n^\alpha}$$

Ainsi (S_n) converge vers $S := 1+\frac{1}{2^\alpha}$.

3. On a $R_n = -\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{n^\alpha} = n^{-\alpha}\left(1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}\right) \sim \frac{\alpha}{n^{1+\alpha}}$.

10

Comme $\frac{u_0\times u_1\times\cdots\times u_{n+1}}{u_0\times u_1\times\cdots\times u_n} = u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puisque $\sum u_n$ converge. On déduit du critère de D'Alembert que $\sum u_0\times u_1\times\cdots\times u_n$ converge.

11

1. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^4 + x^3$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ avec $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. On déduit du corollaire du TVI qu'elle réalise ue bijection strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution x_n sur $\mathbb{R}_+$. Comme $f(0) \neq 0$, $x_n \in \mathbb{R}_+^*$.
2. On a $x_n = f^{-1}(n)$ donc $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ en croissant. Comme $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement positive, $\frac{1}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ en décroissant. On déduit du CSSA que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{x_n}$ converge.
3. Comme $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on a $n = x_n^4 + x_n^3 \sim x_n^4$ d'où $x_n \sim n^{\frac{1}{4}}$ car $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est strictement positive. Ainsi $x_n^{-\alpha} \sim \frac{1}{n^{\frac{\alpha}{4}}}\cdot$ On en déduit que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{x_n^{\alpha}}$ converge *si et seulement si* $\alpha > 4$ (équivalent de signe constant et comparaison à une série de Riemann).

12

Notons $f : x \mapsto 1 - e^{-x}$.

1. ⇛ La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Puisque $f(0) = 0$ et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, $\mathbb{R}_+^*$ est stable par f. On en déduit que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

   ⇛ Comme $e^{-x} > 1 - x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f(x) < x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $a_{n+1} < a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   ⇛ La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 0 et décroisante donc converge par le TLM. Comme f est continue, sa limite est un point fixe de f. Le seul point fixe de f étant 0, on a $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
2. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers 0, on déduit du CSSA que la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge.
3. On a $a_{n+1} - a_n \sim -\frac{a_n^2}{2}\cdot$ Comme la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge, la série $\sum(a_{n+1} - a_n)$ converge donc $\sum a_n^2$ (à termes positifs) converge également.
4. Comme $\ln a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, la série de terme général $\ln\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ diverge. Comme

$$\ln\frac{a_{n+1}}{a_n} = \ln\frac{1-e^{-a_n}}{a_n} = \ln\left(\frac{a_n - \frac{a_n^2}{2} + o\left(a_n^2\right)}{a_n}\right) = \ln\left(1 - \frac{a_n}{2} + o(a_n)\right) = -\frac{a_n}{2} + o(a_n) \sim -\frac{a_n}{2}$$

   On en déduit que $\sum -\frac{a_n}{2}$ diverge (série à termes négatifs) donc $\sum a_n$ diverge.

13

1. On a $|u_n| = \left|\ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right)\right| \sim \frac{1}{2n}$ ainsi $\sum |u_n|$ diverge.
2. On a $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{2n}\right) = \frac{(-1)^n}{2n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Puisque $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ décroît vers 0, la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ converge par le critère spécial des séries alternées. Toute série dont le terme général est en $\mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est absolument convergente donc convergente. Ainsi $\sum u_n$ converge (somme de deux séries onvergentes).

14

1. **Comme** $\left(\frac{1}{k^2}\right)_{k\geqslant 1}$ décroît vers 0, la série $\sum_{k\geqslant 1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ par le critère spécial des séries alternées. Ainsi u_n existe bien pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. On déduit du critère spécial des séries alternées que u_n est du signe de $(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Par le critère spécial des séries alternées, on a $u_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Ainsi $\forall \alpha \in [0,2[\,,\ \ n^\alpha u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

15

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

⇛ Cas 1 : $|y| > 1$. On a $\frac{x^{2n}}{1+y^{2n}} \sim \left(\frac{x}{y}\right)^{2n}$ (terme positif). La série converge donc *si et seulement si* $|x| < |y|$

⇛ Cas 2 : $|y| < 1$. On a $\frac{x^{2n}}{1+y^{2n}} \sim x^{2n}$ (terme positif). La série converge donc *si et seulement si* $|x| < 1$

⇛ Cas 3 : $|y| = 1$. On a $\frac{x^{2n}}{1+y^{2n}} = \frac{x^{2n}}{2}$ (terme positif). La série converge donc *si et seulement si* $|x| < 1$

On en déduit le tracé de l'ensemble $\mathscr{L}$: