ALG 8 | Introduction aux structures algébriques

On se concentre essentiellement sur les définitions de base des groupes, anneaux et corps.

Les raboteurs de parquet, Gustave Caillebotte

8 Introduction aux structures algébriques 1
1 Quizz 2
2 Exercices élémentaires 2
3 Exercices classiques plus techniques 3
4 Indications 4
5 Solutions 5

1. Quizz

1 — *Vrai ou faux ? f*

1. L'ensemble $\{-1,1\}$ est un groupe pour l'addition usuelle.
2. L'ensemble $\{-1,1\}$ est un groupe pour la multiplication usuelle.
3. Pour a et b dans un groupe G, l'équation $ax=b$ d'inconnue $x \in \mathrm{G}$ admet une unique solution.
4. Si G est un groupe, alors $\forall (x,a,b) \in \mathrm{G}^3,\ ax=bx \implies a=b$.
5. Soit G un groupe et $a \in \mathrm{G}$. L'ensemble $\mathscr{C}_a := \{x \in \mathrm{G}\,;\, ax=xa\}$ est un sous-groupe de G.
6. Soit G un groupe. L'ensemble $\mathscr{C} := \{x \in \mathrm{G}\,;\, \forall y \in \mathrm{G},\ yx=xy\}$ est un sous-groupe de G.

2 — *Vrai ou Faux ? f*

On note $\mathbb{A}$ un anneau quelconque.

1. $(\mathbb{N},+,\times)$ est un anneau.
2. Pour a et b non nuls dans $\mathbb{A}$, on a $ab \neq 0$.
3. L'ensemble $\mathscr{T}_2^+(\mathbb{R})$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
4. L'ensemble $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ est un sous-anneau de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
5. Pour a et b non nuls dans $\mathbb{A}$, l'équation $ax=b$ d'inconnue $x \in \mathbb{A}$ admet au moins une solution.
6. Pour a et b non nuls dans $\mathbb{A}$, l'équation $ax=b$ d'inconnue $x \in \mathbb{A}$ admet au plus une solution.
7. $(\mathbb{R}_+^*,+,\times)$ est un corps.

2. Exercices élémentaires

3 — *Un exemple de groupe*

On note $\mathrm{G} := \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et, pour tous éléments (x,y) et (u,v) de G, on note

$$(x,y) \star (u,v) := (xu, xv+y)$$

1. Montrer que $(\mathrm{G},\star)$ est un monoïde.
2. Établir que $(\mathrm{G},\star)$ est un groupe. Est-il abélien ?

4 — *Conjugués d'un élément f*

Soit G un groupe et $a \in \mathrm{G}$. L'ensemble $\mathrm{H} := \{aga^{-1}\,;\, g \in \mathrm{G}\}$ est-il un sous-groupe de G ?

5 — *Calculs dans un groupe f*

Soit G un groupe dont l'élément neutre est noté e et $(a, b, c) \in G^3$.

1. On pose $x = aba^{-1}$. Calculer x^n pour tout $n \in \mathbb{Z}$ en fonction de b^n, a et a^{-1}.
2. On suppose *dans cette question* que $b^6 = e$ et $ab = b^4 a$. Montrer les égalités $b^3 = e$ et $ab = ba$.
3. On suppose *ici* que $a^5 = e$ et $aba^{-1} = b^2$. Montrer que $b^{31} = e$.
4. Établir que $a^3 = b^2, b^3 = c^2$ et $c^3 = a^2$ équivaut aux égalités $a^{19} = e$, $b = a^{-8}$ et $c = a^7$.

3. Exercices classiques plus techniques

6 — *Théorème de Jacobson pour l'exposant deux f*

Soit $(\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau tel que $\forall x \in \mathbb{A},\ x^2 = x$.

1. Vérifier que, pour tout x dans $\mathbb{A}$, $2x = 0$.
2. En déduire que $\mathbb{A}$ est commutatif.

7 — *Éléments nilpotents d'un anneau ff*

On dit qu'un élément a d'un anneau $\mathbb{A}$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.

1. Monter que, si a est un élément nilpotent non nul de $\mathbb{A}$, alors a est un diviseur de zéro, i.e. il existe $b \neq 0$ tel que $ab = 0$.
2. Montrer que, si a est un élément nilpotent, alors $1 - a$ est inversible pour le produit.
3. Soit a et b deux éléments de $\mathbb{A}$ qui commutent.
   - **a.** On suppose a et b nilpotents. Montrer que $a + b$ est nilpotent.
   - **b.** On suppose a nilpotent. Montrer que ab est nilpotent.
4. Soit a et b deux éléments de $\mathbb{A}$. Montrer que, si ab est nilpotent, alors ba l'est aussi.

4. Indications

1

Tout est vrai sauf le 1.

2

Tout est faux sauf 3.

3

On peut trouver l'inverse d'un élément par analyse-synthèse.

4

La réponse est positive.

5

Vérifier au 3. que $a^n ba^{-n} = b^{2^n}$.

6

Considérer $x+1$ au 1.

7

Au 1., choisir le n minimal vérifiant $a^n = 0$. Utiliser la formule de factorisation $b^n - a^n$ au 2. (valable lorsque $ab = ba$).

5. Solutions

1

1. Faux, il n'y a pas d'élément neutre.
2. Vrai. Le produit est associatif. L'ensemble est stable par le produit, chacun de ses éléments est son propre inverse, et 1 est neutre.
3. Vrai : on a $ax = b \iff x = a^{-1}b$.
4. Vrai : si $ax = bx$, alors $axx^{-1} = bxx^{-1}$, ie $a = b$.
5. Vrai. On a $e \in \mathscr{C}_a$. De plus, pour x et y dans $\mathscr{C}_a$, on a
$$a(xy) = (ax)y = (xa)y = x(ay) = x(ya) = (xy)a$$
d'où $xy \in \mathscr{C}_a$. De plus, $x^{-1}(ax)x^{-1} = x^{-1}(xa)x^{-1}$ donc $x^{-1}a = ax^{-1}$ donc $x^{-1} \in \mathscr{C}_a$.
6. Vrai. On a $\mathscr{C} = \bigcap_{y\in \mathrm{G}} \mathscr{C}_y$ est un sous-groupe de G en tant qu'intersection de sous-groupes de G.

2

1. Faux car $(\mathbb{N},+)$ n'est pas un groupe (1 n'admet pas d'opposé).
2. Faux. Cex : $\mathbb{A} := \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{E}_{1,2}^2 = 0$.
3. Vrai. On a vu dans le cours que $\mathscr{T}_2^+(\mathbb{R})$ est stable par somme, passage à l'opposé et produit. De plus, $\mathscr{T}_2^+(\mathbb{R})$ contient I_2.
4. Faux. L'ensemble $\mathscr{S}_2(\mathbb{R})$ n'est pas stable par le produit :
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
5. Faux. Cex dans $\mathbb{A} = \mathbb{Z}$ et $2x = 1$.
6. Faux. Cex dans $\mathbb{A} = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{E}_{1,1}\mathrm{X} = \mathrm{E}_{1,1}$. Toutes les matrices $\mathrm{E}_{1,1} + \lambda \mathrm{E}_{2,2}$ sont des solutions.
7. Faux car $\left(\mathbb{R}_+^*,+\right)$ n'est pas un groupe (1 n'admet pas d'opposé).

3

1. ⇛ La loi $\star$ est bien interne sur G car le produit de réels non nuls est non nul.

   ⇛ Le couple $(1,0)$ est clairement neutre pour $\star$.

   ⇛ Soit (a,b), (u,v) et (x,y) dans G. On a
$$\begin{aligned}\big((a,b)\star(u,v)\big)\star(x,y) &= (au, av+b)\star(x,y) = \big(aux, auy+av+b\big)\\ (a,b)\star\big((u,v)\star(x,y)\big) &= (a,b)\star(ux, uy+v) = \big(aux, auy+av+b\big)\end{aligned}$$
   Ainsi $\star$ est associative.

2. ⇛ Pour $(x, y) \in G$, on a clairement

$$(1,0) = (x,y) \star \left(x^{-1}, -x^{-1}y\right) = \left(x^{-1}, -x^{-1}y\right) \star (x,y) \quad \text{et} \quad \left(x^{-1}, -x^{-1}y\right) \in G$$

Ainsi (x, y) est inversible.

⇛ Comme $(1,2) \times (2,1) = (2,3)$ et $(2,1) \times (1,2) = (2,5)$, $\star$ n'est pas commutative.

4

Notons e le neutre de G.

⇛ On a $e = aea^{-1} \in H$.

⇛ Soit x et y dans G. On a

$$axa^{-1}\left(aya^{-1}\right)^{-1} = axa^{-1}ay^{-1}a^{-1} = axy^{-1}a^{-1} \in H$$

⇛ On en déduit que H est un sous-groupe de G.

5

1. Soit, pour tout n positif, la propriété $\mathrm{HR}(n)$: $x^n = ab^na^{-1}$. Prouvons par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie.

   ⇛ $\mathrm{HR}(0)$ est banalement vraie, car $x^0 = aa^{-1} = e$.

   ⇛ Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vérifiée. On a alors

$$x^{n+1} = x^nx = (ab^na^{-1})(aba^{-1}) = a(b^na^{-1}ab)a^{-1} = ab^{n+1}a^{-1}$$

   ⇛ La propriété $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   On a alors, $\forall n \geqslant 0$

$$x^{-n} = (x^n)^{-1} = (ab^na^{-1})^{-1} = a(b^n)^{-1}a^{-1} = ab^{-n}a^{-1}$$

   La relation de l'énoncé est donc bien vérifiée pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

2. On a $b = a^{-1}b^4a$, d'où, en appliquant le calcul de la question 1.,

$$b^3 = a^{-1}b^{12}a = a^{-1}(b^6)^2a = a^{-1}a = e$$

   Ainsi, $ab = b^4a = b^3ba = eba = ba$.

3. On a $aba^{-1} = b^2$. Soit, pour tout n positif, la propriété $\mathrm{HR}(n)$: $a^nba^{-n} = b^{2^n}$. Prouvons par récurrence que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie.

   ⇛ $\mathrm{HR}(0)$ est banalement vraie, car $ebe = b^{2^0} = b$.

   ⇛ Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vérifiée. On a alors

$$a^{n+1}ba^{-n-1} = a(a^nba^{-n})a^{-1} = a(b^{2^n})a^{-1} = (aba^{-1})^{2^n} = (b^2)^{2^n} = b^{2^{n+1}}$$

   d'où $\mathrm{HR}(n+1)$.

   ⇛ La propriété $\mathrm{HR}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

   On a en particulier, pour $n = 5$, $a^5ba^{-5} = b^{32}$. Puisque $a^5 = e$ on trouve $b = b^{32}$, i.e. $b^{31} = e$.

4. Raisonnons en deux temps.

⇛ Supposons que $a^3 = b^2, b^3 = c^2$ et $c^3 = a^2$. On a alors successivement

$$a^{27} = (a^3)^9 = (b^2)^9 = (b^3)^6 = (c^2)^6 = (c^3)^4 = (a^2)^4 = a^8,$$

d'où $a^{19} = e$, donc *a fortiori* $a^{38} = (a^{19})^2 = e$, puis

$$b^{38} = (b^2)^{19} = (a^3)^{19} = (a^{19})^3 = e$$

Comme $c = c^3 c^{-2} = a^2 b^{-3}$, que $a^2 = c^3$ et $b^{-3} = c^{-2}$ commutent, on a aussi $c^{38} = 1$. D'où,

$$c = c^{39} = (c^3)^{13} = (a^2)^{13} = a^{26} = a^{19+7} = a^7$$

Ainsi, $b = b^3 b^{-2} = c^2 a^{-3} = a^{14-3} = a^{11} = a^{-8}$.

⇛ Réciproquement, supposons que $a^{19} = e, b = a^{-8}$ et $c = a^7$. Alors,

$$b^2 = a^{-16} = a^3\ ,\ c^2 = a^{14} = a^{14-2\times 19} = a^{-24} = b^3$$

et $c^3 = a^{21} = a^2$.

6 ↺

1. Soit $x \in \mathbb{A}$. On a $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1 = x + 1$ d'où $2x = 0$.

2. Soit x et y dans $\mathbb{A}$. On a $(x+y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + y$. Ainsi $xy = -yx = yx$ par la question 1.

7 ↺

1. Soit $a \in \mathbb{A}$ nilpotent. Notons n le plus petit entier naturel non nul k tel que $a^k = 0$. On a $aa^{n-1} = 0$ et $a^{n-1} \neq 0$ ainsi a est un diviseur de zéro.

2. Soit $a \in \mathbb{A}$ nilpotent et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 1$. On a

$$1 = 1 - a^n = (1-a)\sum_{i=0}^{n-1} a^i = \left(\sum_{i=0}^{n-1} a^i\right)(1-a)$$

Ainsi $1 - a$ est inversible d'inverse $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} a^i$.

3. **a.** Notons n et m des indices tels que $a^n = b^m = 0$. Par la formule du binôme

$$(a+b)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} \binom{n+m}{k} a^k b^{n+m-k} = 0$$

En effet, pour $k \in [\![n, n+m]\!]$, on a $a^k = 0$ et pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on a $n + m - k \geqslant m$ donc $b^{n+m-k} = 0$. Ainsi $a + b$ est nilpotent.

b. On a $(ab)^n = a^n b^n = 0$ car a et b commutent. Ainsi ab est nilpotent.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(ab)^n = 0$. On a

$$(ba)^{n+1} = b(ab)^n a = 0$$

Ainsi ba est nilpotent.