ALG # 2 | Théorie des ensembles

Une bonne pratique des notations et règles de calcul sur les ensembles est nécessaire à l'apprenti-e mathématicien-ne. Il convient de maîtriser les symboles usuels de la théorie $\in$, $\cup$, etc. Le piège est de sombrer dans un pur formalisme. Afin de cultiver son intuition géométrique, on se forgera des représentations mentales au moyen, par exemple, de sous-ensembles du plan.

Dieu créant les plantes, Basilique Saint-Marc de Venise

1. Quizz

1 — *Vrai ou faux ? f*

Pour deux parties A et B de $\mathbb{N}$, on note

$$\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} := (\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})\cup(\overline{\mathrm{A}}\cap\mathrm{B}) \quad \text{(ensemble appelé différence symétrique de A et B)}$$

1. L'application $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ n\mapsto 2n$ est injective.
2. L'application $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ n\mapsto 2n$ est surjective.
3. Une application $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est bijective *si et seulement si* elle est injective.
4. Une application $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est bijective *si et seulement si* elle est surjective.
5. Pour tout $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathscr{P}(\mathbb{N})^2$, $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$ est l'ensemble des entiers naturels appartenant à un seul des deux ensembles A et B.
6. Pour tout $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathscr{P}(\mathbb{N})^2$, $\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}=\varnothing \iff \mathrm{A}=\mathrm{B}$.
7. Pour tout $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathscr{P}(\mathbb{N})^2$, $\overline{\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}}=\overline{\mathrm{A}}\Delta\overline{\mathrm{B}}$.
8. Pour tout $(\mathrm{A},\mathrm{B})\in\mathscr{P}(\mathbb{N})^2$, $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}=\varnothing \iff \mathrm{A}=\mathrm{B}$.
9. Soit des fonctions $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ et $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. Si $f\circ g=\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$, alors f est bijective et $f^{-1}=g$.
10. Soit E un ensemble et $\mathrm{A}\subset\mathrm{E}$. L'application $\phi:\mathscr{P}(\mathrm{E})\to\mathscr{P}(\mathrm{E}),\ \mathrm{X}\mapsto\mathrm{X}\cup\mathrm{A}$ est bijective $\iff \mathrm{A}=\varnothing$.
11. L'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\mapsto\big(x+|y|,y\big)$ n'est pas bijective.
12. Si un ensemble E admet au moins deux éléments, alors l'intersection de toutes ses parties non vides est vide.

2. Exercices élémentaires

2 — *Une propriété des applications idempotentes*

Soit $p:\mathrm{E}\to\mathrm{E}$ tel que $p\circ p=p$. Montrer que si p est injective ou surjective, alors $p=\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

3 — *Dénombrabilité de $\mathbb{N}^2$ f*

Montrer l'existence d'une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$.

On admettra que tout $n\in\mathbb{N}^*$ s'écrit de manière unique $n=2^p(2q+1)$ où $(p,q)\in\mathbb{N}^2$.

4 — *Simplification membre à membre f*

Soit X et Y deux parties d'un ensemble E. Montrer que $\mathrm{X}\subset\mathrm{Y}$ *si et seulement si* s'il existe Z dans $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{Z}\cap\mathrm{X}\subset\mathrm{Z}\cap\mathrm{Y}$ et $\mathrm{Z}\cup\mathrm{X}\subset\mathrm{Z}\cup\mathrm{Y}$.

5 — *Intersection et réunion*

Soit A, B et C trois parties d'un même ensemble E.

1. On suppose que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$. Comparer B et C.
2. Comparer $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ et $A \setminus (B \cap C)$.

6 — *Une équation*

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Déterminer les parties X de E telles que $A \cup X = E$.

7 — *Une bijection*

Montrer la bijectivité de l'application $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}^*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}^*} \\ f & \longmapsto & \theta_f \end{array}$ où $\theta_f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(1/x) \end{array}$.

8 — *Relation d'équivalence associée à une application*

Soit E et F deux ensembles non vides ainsi qu'une application $u : E \to F$.

1. Montrer que la relation $\mathscr{R}_u$ définie sur E par $\forall (x, y) \in E^2,\ x \mathscr{R}_u y \iff u(x) = u(y)$ est une relation d'équivalence.
2. Caractériser les applications u telles que $\mathscr{R}_u$ admet une seule classe d'équivalence.

9 — *Relations binaires symétriques et antisymétriques*

Déterminer les relations binaires à la fois symétriques et antisymétriques sur un ensemble E non vide.

10 — *Une relation d'ordre*

Soit E un ensemble, $(F, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et $f : E \to F$ une application injective. On définit dans E la relation $\mathscr{R}$ par $x \mathscr{R} y \iff f(x) \preccurlyeq f(y)$. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre sur E.

3. Exercices classiques plus techniques

11 — *Une étude d'injectivité et de surjectivité*

On considère l'application définie par $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ (p, q) & \longmapsto & p + \dfrac{1}{q} \end{array}$.

1. L'application est-elle injective ?

2. Même question avec surjective. On pourra s'intéresser à l'équation $\phi(p,q)=\dfrac{2}{3}\cdot$

12 — *Opérations sur les ensembles* f

Soit E un ensemble, $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de parties de E telles que $\forall i\in I,\ E=A_i\cup B_i$. Démontrer que

$$E=\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)\cup\left(\bigcap_{i\in I}B_i\right)$$

13 — *« Intersection » de deux relations d'équivalence* f

Soit E un ensemble, $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ deux relations d'équivalence sur E. On définit une relation $\mathscr{R}$ sur E en posant :

$$\forall (x,y)\in E^2,\ x\mathscr{R}y \iff x\mathscr{R}_1 y \text{ et } x\mathscr{R}_2 y$$

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{R}$.

2. Exprimer la classe d'équivalence de $x\in E$ pour $\mathscr{R}$ en fonction de ses classes d'équivalence pour les relations $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$.

14 — *La seule surjection sous diagonale* ff

Soit $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ une surjection vérifiant $\forall n\in\mathbb{N},\ f(n)\geqslant n$. Démontrer que $f=\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

15 — *Une caractérisation de la surjectivité* ff

Soit $f:E\to F$. Montrer que f est surjective $\iff \big(\forall B\subset F,\ f^{-1}\langle B\rangle=\varnothing \iff B=\varnothing\big)$.

16 — *Parties d'une réunion et d'une intersection* ff

Soit E et F des ensembles.

1. Démontrer que $\mathscr{P}(E)\cup\mathscr{P}(F)\subset\mathscr{P}(E\cup F)$.

2. Déterminer une *cns* sur E et F pour que l'inclusion précédente soit une égalité.

3. Comparer $\mathscr{P}(E)\cap\mathscr{P}(F)$ et $\mathscr{P}(E\cap F)$.

4. Indications

1

Le 3. est faux et il ne faut pas chercher un contre-exemple bien loin. Le 4. est faux : trouver une fonction surjective qui prend deux fois la valeur zéro. Le 5. est vrai. Les 6. et 7. sont faux (on peut trouver des contre-exemples très simples). Le 8. est vrai. Le 9. est faux : afin de construire un contre-exemple, choisir $g : n \mapsto n+1$ puis définir correctement f. Le 11. est faux : un point de départ est de résoudre l'équation $(u,v) = f(x,y)$ d'inconnue (x,y) pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Le 12. est vrai : on pourra s'aide de deux éléments distincts a et b de E.

2

On rappelle que $(p \circ p)(x) = p\big(p(x)\big)$ pour $x \in \mathrm{E}$.

3

Ceci revient à trouver une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.

4

Pour le sens non trivial, on pourra fixer x dans X et effectuer une disjonction de cas : $x \in \mathrm{Z}$ et $x \notin \mathrm{Z}$.

5

On trouve $\mathrm{B} = \mathrm{C}$ et $(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \setminus \mathrm{C}) = \mathrm{A} \setminus (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$.

6

Traduire l'égalité $\mathrm{X} \cup \mathrm{A} = \mathrm{E}$ au moyen de $\overline{\mathrm{A}}$.

7

il n'est pas difficile de deviner la réciproque de ϕ.

8

S'il n'y a qu'une seule classe d'équivalence, alors deux éléments quelconques de E sont en relation.

9

Il s'agit de caractériser $x \mathscr{R} y$ simplement en fonction de x et y.

10

Il n'y a aucune difficulté : il faut vérifier une à une les trois propriétés (réflexivité, antisymétrie et transitivité), le moment où l'injectivité sera utile apparaîtra naturellement.

11

L'application est injective mais non surjective.

12

Pour l'inclusion non triviale, effectuer une disjonction de cas : $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ et $x \in \bigcap_{i\in I} B_i$.

13

Pour $x \in E$, on pourra noter $\overline{x}$, $\overline{x}^1$ et $\overline{x}^2$ les classes d'équivalence de x pour les relations $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$.

14

Démontrer que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence. Pour l'initialisation, on pourra considérer un entier m tel que $f(m) = 0$.

15

Pour établir la surjectivité de f, on pourra fixer y dans F et considérer $B := \{y\}$.

16

Éviter une approche trop formelle. Par exemple, un élément X de $\mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)$ est une partie de E et de F, donc aussi de $\cap$F. Ceci démontre l'inclusion $\mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F) \subset \mathscr{P}(E \cap F)$.

5. Solutions

1 ↺

1. Vrai. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(p) = f(q)$. On a $2p = 2q$ d'où $p = q$.
2. Faux. On a $3 \notin f\langle\mathbb{N}\rangle$ donc $f\langle\mathbb{N}\rangle \neq \mathbb{N}$.
3. Faux. Seule $\Longrightarrow$ est vraie par définition d'une bijection. L'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto 2n$ est un contre-exemple à la réciproque d'après les 1. et 2.
4. Faux. Seule $\Longrightarrow$ est vraie par définition d'une bijection. L'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) = n-1$ si $n \in \mathbb{N}^*$ et $f(0) = 0$ est un contre-exemple à la réciproque.
5. Vrai : $\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}$ (resp. $\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{A}}$) est l'ensemble des entiers appartenant à A mais pas à B (resp. appartenant à B mais pas à A).
6. Faux.
   - Seule $\mathrm{A} = \mathrm{B} \Longrightarrow \mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \varnothing$ est vraie pour toutes parties A et B de $\mathbb{N}$.
   - On a $\varnothing \setminus \mathbb{N} = \varnothing$ mais $\varnothing \neq \mathbb{N}$.

Méthodologie

- En fait, l'égalité $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \varnothing$ équivaut à $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. C'est une conséquence directe de la définition de la différence : $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B} = \varnothing$ équivaut à la proposition « tous les éléments de A sont dans B.
- Le 4. rend très intuive l'équivalence $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = \varnothing \iff \mathrm{A} = \mathrm{B}$: l'énoncé « il n'y a aucun entier appartenant à un seul des deux ensembles A et B » équivaut clairement à $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

7. Faux. On a $\overline{\mathrm{A}}\Delta\overline{\mathrm{B}} = (\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}}) \cup (\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{A}}) = \mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$. En particulier pour $(\mathrm{A},\mathrm{B}) := (\mathbb{N},\varnothing)$, on a $\overline{\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}} = \varnothing$ et $\overline{\mathrm{A}}\Delta\overline{\mathrm{B}} = \mathbb{N}$.
8. Vrai. Soit A et B deux parties de $\mathbb{N}$.
   - Si $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, alors $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = \varnothing$ par définition de Δ.
   - Supposons que $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = \varnothing$. On déduit de $(\mathrm{A}\setminus\mathrm{B}) \cup (\mathrm{B}\setminus\mathrm{A}) = \varnothing$ que $\mathrm{A}\setminus\mathrm{B} = \mathrm{B}\setminus\mathrm{A} = \varnothing$. D'après la remarque du 5., on en déduit que $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ et $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ d'où $\mathrm{A} = \mathrm{B}$.

Variante

Si l'on sait que Δ est associative, alors on peut aussi raisonner ainsi : supposons $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B} = \varnothing$; on a alors $\mathrm{B} = \mathrm{A}\Delta(\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}) = \mathrm{A}\Delta\varnothing = \mathrm{A}$ par associativité de Δ. L'associativité est définie par

$$\forall (\mathrm{X},\mathrm{Y},\mathrm{Z}) \in \mathbb{N}^3,\ \mathrm{X}\Delta(\mathrm{Y}\Delta\mathrm{Z}) = (\mathrm{X}\Delta\mathrm{Y})\Delta\mathrm{Z}$$

9. Faux. Contre-exemple : $f(n) = n-1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f(0) = 0$ et $g(n) = n+1$ pour $n \in \mathbb{N}$.
10. Vrai. Supposons f est bijective. Comme $f(\varnothing) = \mathrm{A} = f(\mathrm{A})$, on a $\mathrm{A} = \varnothing$ par injectivité de f. La réciproque est claire car si $\mathrm{A} = \varnothing$, alors $f = \mathrm{id}$.
11. Faux. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. L'équation $(x+|y|, y) = (u,v)$ (d'inconnue $(x,y) \in \mathbb{R}^2$) équivaut clairement à $y = v$ et $x = u - |v|$. L'existence et l'unicité de cette solution *quelque soit* $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ assurent la bijectivité de f.

Bonus

Cette démonstration permet de conclure que $f^{-1} : (x, y) \mapsto (x - |y|, y)$.

12. Vrai. Il existe $(a, b) \in \mathrm{E}^2$ tel que $a \neq b$. On a donc $\displaystyle\bigcap_{\mathrm{X} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}) \setminus \{\varnothing\}} \mathrm{X} \subset \{a\} \cap \{b\} = \varnothing$.

2 ↺

- Supposons p injective. Soit $x \in \mathrm{E}$. Comme $p\big(p(x)\big) = p(x)$, on a $p(x) = x$ par injectivité de p.
- Supposons p surjective. Soit $x \in \mathrm{E}$. Il existe $a \in \mathrm{E}$ tel que $x = p(a)$ par surjectivité de p. Ainsi, $p(x) = p\big(p(a)\big) = p(a) = x$.

Dans les deux cas, on a $p = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

Méthodologie

Une façon adaptée d'exploiter une hypothèse d'injectivité est de faire apparaître des égalités du type $f(x) = f(\cdots)$.

3 ↺

Soit $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $g(p, q) = 2^p(2q+1) - 1$. On déduit de l'indication de l'énoncé que g est bijective. L'application $\phi = g^{-1}$ est bien une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$.

4 ↺

- Supposons $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$. On a clairement $\mathrm{E} \cap \mathrm{X} \subset \mathrm{E} \cap \mathrm{Y}$ et $\mathrm{E} \cup \mathrm{X} \subset \mathrm{E} \cup \mathrm{Y}$.
- Supposons l'existence d'une partie de E notée Z vérifiant $\mathrm{Z} \cap \mathrm{X} \subset \mathrm{Z} \cap \mathrm{Y}$ et $\mathrm{Z} \cup \mathrm{X} \subset \mathrm{Z} \cup \mathrm{Y}$. Fixons x dans X.
  - Cas 1 : $x \in \mathrm{Z}$. Alors $x \in \mathrm{Z} \cap \mathrm{X}$ donc $x \in \mathrm{Z} \cap \mathrm{Y}$ d'où $x \in \mathrm{Y}$.
  - Cas 2 : $x \notin \mathrm{Z}$. Alors $x \in \mathrm{X} \cup \mathrm{Z}$ donc $x \in \mathrm{Z} \cup \mathrm{Y}$ d'où $x \in \mathrm{Y}$.

  On en déduit que $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$.

5 ↺

1. Soit $x \in \mathrm{B}$. Comme $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{C}$, $x \in \mathrm{A}$ ou $x \in \mathrm{C}$. Si $x \in \mathrm{A}$, alors $x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C}$ donc $x \in \mathrm{C}$. Ainsi, dans tous les cas de figure, $x \in \mathrm{C}$. Ceci prouve que $\mathrm{B} \subset \mathrm{C}$ et puisque les hypothèses sont symétriques en B et C, on a aussi $\mathrm{C} \subset \mathrm{B}$ et donc $\mathrm{B} = \mathrm{C}$.
2. On a

$$\mathrm{A} \setminus (\mathrm{B} \cap \mathrm{C}) = \mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B} \cap \mathrm{C}} = \mathrm{A} \cap (\overline{\mathrm{B}} \cup \overline{\mathrm{C}}) = (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{B}}) \cup (\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{C}}) = (\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \setminus \mathrm{C})$$

6

Soit X une partie de E. L'égalité $\mathrm{X} \cup \mathrm{A} = \mathrm{E}$ équivaut à $\overline{\mathrm{A}} \subset \mathrm{X}$.

- ⇛ En effet, supposons que $\mathrm{X} \cup \mathrm{A} = \mathrm{E}$. Soit $b \in \overline{\mathrm{A}}$. Comme $b \in \mathrm{E}$, on a $b \in \mathrm{X} \cup \mathrm{A}$ d'où $b \in \mathrm{X}$ puisque $b \notin \mathrm{A}$
- ⇛ Réciproquement, supposons que $\overline{\mathrm{A}} \subset \mathrm{X}$. On a alors $\overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{A} \subset \mathrm{X} \cup \mathrm{A}$, ie $\mathrm{A} \subset \mathrm{X} \cup \mathrm{A}$. Comme $\mathrm{X} \cup \mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, on en déduit que $\mathrm{A} \cup \mathrm{X} = \mathrm{E}$

Variantes

Les solutions sont les parties X de E contenant au moins toutes les éléments de $\overline{\mathrm{A}}$. On peut aussi les décrire sous la forme suivante :

$$\mathrm{X} = \overline{\mathrm{A}} \cup \mathrm{Y} \quad \text{où} \quad \mathrm{Y} \subset \mathrm{A}$$

Cette expression serait très utile pour dénombrer les solutions.

7

Comme $\theta \circ \theta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}^*}}$, θ est bijective et $\theta^{-1} = \theta$.

8

1. La relation $\mathscr{R}_u$ est clairement réflexive, symétrique et transitive : c'est bien une relation d'équivalence.
2. Démontrons que la relation d'équivalence $\mathscr{R}_u$ possède une seule classe d'équivalence *si et seulement si* u est constante.
   - ⇛ Supposons que $\mathscr{R}_u$ possède une seule classe. Soit x et y dans E. Les classes d'équivalences de x et y étant égales, $x \mathscr{R}_u y$ d'où $u(x) = u(y)$. Ainsi u est constante.
   - ⇛ Réciproquement, supposons u constante. Pour x et y dans E, on a $u(x) = u(y)$ d'où $x \mathscr{R}_u y$.

9

- ⇛ Soit E un ensemble non vide et $\mathscr{R}$ une relation binaire symétrique et antisymétrique sur E.
  - ♉ Soit x et y tels que $x \mathscr{R} y$. Par symétrie de la relation, on a aussi $y \mathscr{R} x$ et, par antisymétrie, on en conclut que $x = y$.
  - ♉ Ainsi, $\mathscr{R}$ est la relation d'égalité sur E
- ⇛ Réciproquement, la relation d'égalité sur E est clairement symétrique et antisymétrique.

10

- ⇛ La réflexivité est évidente.
- ⇛ Si $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} x$, alors $f(x) \preccurlyeq f(y)$ et $f(y) \preccurlyeq f(x)$. Par antisymétrie de $\preccurlyeq$ sur F, on a donc $f(x) = f(y)$, ce qui implique que $x = y$ puisque f est injective. La relation $\mathscr{R}$ est donc antisymétrique.
- ⇛ Soit $(x, y, z) \in \mathrm{E}^3$ tels que $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z$. On a alors $f(x) \preccurlyeq f(y)$ et $f(y) \preccurlyeq f(z)$, d'où $f(x) \preccurlyeq f(z)$ par transitivité de $\preccurlyeq$ sur F, et donc $x \mathscr{R} z$. La relation $\mathscr{R}$ est donc transitive.

11

1. Soit (p_1, q_1) et (p_2, q_2) dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ ayant la même image par ϕ. On a $p_2 - p_1 = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \in]-1,1[\cap\mathbb{Z}$ donc $p_1 = p_2$ et $q_2 = q_2$. Ainsi ϕ est injective.
2. L'application ϕ n'est pas surjective. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{2}{3}$ admet un antécédent par ϕ : soit $(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*$ tel que $\frac{pq+1}{q} = \frac{2}{3}\cdot$ On a alors $3pq+3 = 2q\,(\star)$. On en déduit que q divise 3 et donc que $q\in\{1,2,3\}$. Dans les trois cas de figure, on vérifie sans peine que $(\star)$ aboutit à une absurdité.

Méthodologie

- Le point de départ de l'injectivité est naturel : on considère deux couples ayant la même image par ϕ.
- L'idée de $\frac{2}{3}$ vient de la disjonction suivante :
  - Pour $p\geqslant 1$ et $q\in\mathbb{N}^*$, on a $\phi(p,q) > 1$.
  - Pour $p < 0$ et $q\in\mathbb{N}^*$, on a $\phi(p,q)\leqslant 0$.
  - Pour $p = 0$ et $q\in\mathbb{N}^*$, on a $\phi(p,q) = \frac{1}{q}\in]0,1]$.

  On voit donc que les seules valeurs rationnelles de $]0,1]$ qui seront prises par ϕ sont les inverses d'entiers. Cette disjonction constitue une autre démonstration de la non surjectivité de ϕ.

12

L'inclusion $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cup\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)\subset E$ est évidente. Soit x dans E.

- Cas 1 : x appartient à $\bigcup_{i\in I} A_i$.
- Cas 2 : x n'appartient à aucun des A_i. Comme $\forall i\in I,\ x$ appartient à $A_i\cup B_i$, x appartient à B_i pour tout i dans I.

On en déduit que $E\subset\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)\cup\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$.

13

1. - Soit $x\in E$. Par réflexivité de $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$, $x\,\mathscr{R}\,x$. Ainsi $\mathscr{R}$ est réflexive.
   - Soit x et y dans E tels que $x\,\mathscr{R}\,y$. On a donc $x\,\mathscr{R}_1\,y$ et $x\,\mathscr{R}_2\,y$ donc $y\,\mathscr{R}_1\,x$ et $y\,\mathscr{R}_2\,x$ par symétrie de $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$. On en déduit que $y\,\mathscr{R}\,x$. Ainsi $\mathscr{R}$ est symétrique.
   - Soient x, y et z dans E tels que $x\,\mathscr{R}\,y$ et $y\,\mathscr{R}\,z$. On a donc $x\,\mathscr{R}_1\,y$, $x\,\mathscr{R}_2\,y$, $y\,\mathscr{R}_1\,z$ et $y\,\mathscr{R}_2\,z$. On a donc $x\,\mathscr{R}_1\,z$ et $x\,\mathscr{R}_2\,z$ par transitivité de $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$, d'où $x\,\mathscr{R}\,z$. Ainsi $\mathscr{R}$ est transitive.

   La relation $\mathscr{R}$ est donc une relation d'équivalence.
2. Pour tout $x\in E$, nous noterons $\overline{x}$, $\overline{x}^1$ et $\overline{x}^2$ les classes d'équivalence de x pour les relations $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$. Pour $y\in E$, on a

$$\begin{aligned} y \in \overline{x} &\iff x \mathscr{R} y \\ &\iff x \mathscr{R}_1 y \wedge x \mathscr{R}_2 y \\ &\iff y \in \overline{x}^1 \wedge y \in \overline{x}^2 \\ &\iff y \in \overline{x}^1 \cap \overline{x}^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\overline{x} = \overline{x}^1 \cap \overline{x}^2$.

14

Raisonnons par récurrence forte. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons HR(n) la propriété $f(n) = n$.

⇛ Par surjectivité de f, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(m) = 0$. Comme $f(m) \geqslant m$, on en déduit que $m = 0$. Ainsi HR(0) est vraie.

⇛ Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons les propositions HR(0), ..., HR(n) vraies. Par surjectivité de f, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(m) = n+1$. Comme $f(m) \geqslant m$, on en déduit que $m \leqslant n+1$. Comme $f(k) = k$ pour tout k dans $[\![0, n]\!]$, on en déduit que $m = n+1$. Ainsi HR($n+1$) est vraie.

Méthodologie

Encore une fois, c'est l'examen des premiers termes qui mène à une récurrence. On a nécessairement $f(0) = 0$ car sinon f ne pourrai prendre la valeur 0 puisque $f(n) \geqslant n \geqslant 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. De même, on a nécessairement $f(1) = 1$ car sinon f ne pourrai prendre la valeur 1 puisque $f(n) \geqslant n \geqslant 2$ pour $n \geqslant 2$ et $f(0) = 0$, etc. La version de la récurrence donnée ci-dessus est un peut plus élégante.

15

⇛ Supposons f surjective. Soit $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$ tel que $\mathrm{B} \neq \varnothing$. Il existe alors $y \in \mathrm{B}$. Par surjectivité de f, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, $x \in f^{-1}(\mathrm{B})$ et donc $f^{-1}\langle \mathrm{B} \rangle \neq \varnothing$.

⇛ Réciproquement, supposons que $\left(\forall \mathrm{B} \subset \mathrm{F}, f^{-1}\langle \mathrm{B} \rangle = \varnothing \iff \mathrm{B} = \varnothing\right)$. Soit $y \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{B} := \left\{y\right\}$. Comme $\mathrm{B} \neq \varnothing$, on a $f^{-1}\langle \mathrm{B} \rangle \neq \varnothing$ et y admet donc au moins un antécédent par f. ainsi f est surjective.

Commentaires

Nous avons vu en TD quelques exercices du même style. Dans la preuve de f surjective $\implies \cdots$, nous n'avons démontré qu'une seule implication car la seconde est triviale : $f^{-1}\langle \varnothing \rangle = \varnothing$ par définition de l'image réciproque.

16

1. Toute partie X de E (resp. de F) est une partie de $\mathrm{E} \cup \mathrm{F}$. Ainsi $\mathscr{P}(\mathrm{E}) \cup \mathscr{P}(\mathrm{F}) \subset \mathscr{P}(\mathrm{E} \cup \mathrm{F})$.
2. La *cns* recherchée est $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \vee \mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. En effet :
   ⇛ Si $\mathrm{E} \subset \mathrm{F}$ ou $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$, alors il y a clairement égalité.
   ⇛ Sinon, il existe $e \in \mathrm{E} \setminus \mathrm{F}$ et $f \in \mathrm{F} \setminus \mathrm{E}$ d'où $\{e, f\} \in \mathscr{P}(\mathrm{E} \times \mathrm{F})$ mais $\{e, f\} \notin \mathscr{P}(\mathrm{E}) \cup \mathscr{P}(\mathrm{F})$.
3. Comme $(\mathrm{X} \subset \mathrm{E} \wedge \mathrm{X} \subset \mathrm{F}) \iff \mathrm{X} \subset \mathrm{E} \cap \mathrm{F}$, on a $\mathscr{P}(\mathrm{E}) \cap \mathscr{P}(\mathrm{F}) = \mathscr{P}(\mathrm{E} \cap \mathrm{F})$.

Commentaire

L'exercice n'est pas si difficile que cela. Ce qui est délicat est le degré d'abstraction des objets manipulés. Il ne faut pas hésiter, dans ce type d'exercice, à choisir des exemples afin de se forger une intuition : par exemple $E = [0,2[$ et $F =]-1,1]$. Entendons-nous bien : les démonstrations sont à faire dans le cas général mais en cas de blocage, on pourra commencer au brouillon par des démonstrations dans ces cas particuliers moins abstraits.