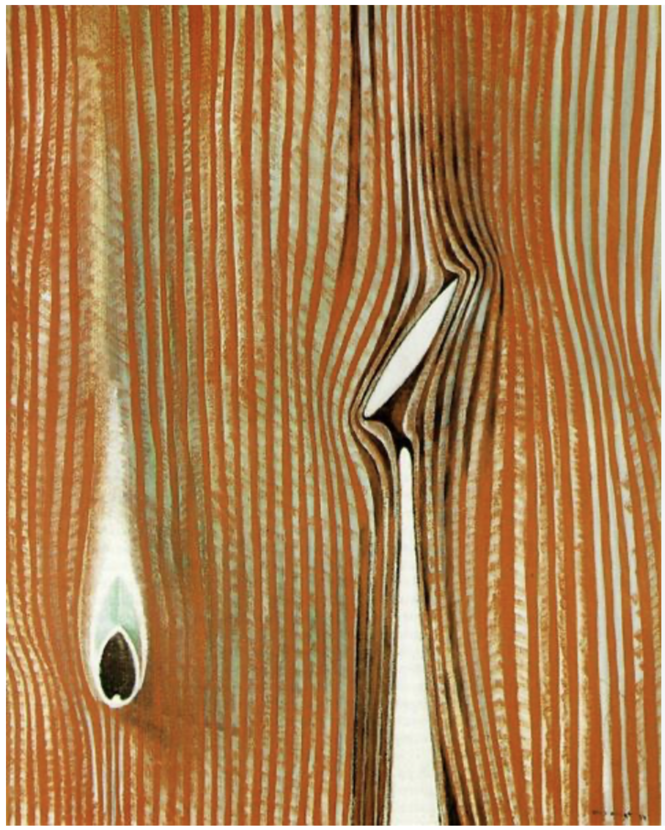
AN 3 | Introduction à la topologie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Toutes les suites rencontrées ci-dessous sont à valeurs réelles.



Blind swimmers, Max Ernst

3 Introduction à la topologie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ 1
- 1 Quizz 2
- 2 Exercices élémentaires 2
- 3 Exercices classiques plus techniques 3
- 4 Indications 4
- 5 Solutions 5

1. Quizz

1 — *Vrai ou Faux ?*

1. L'ensemble $[0,1]$ est un voisinage de 0.
2. L'ensemble $[0,1]$ est un voisinage de $\frac{1}{2}$.
3. L'ensemble $[-1,1] \cup [2025,+\infty[$ est un voisinage de $+\infty$.
4. Le nombre complexe 1 est adhérant à $\mathbb{U} \setminus \{1\}$?
5. La suite de terme général j^n converge vers 0.
6. La suite de terme général $\left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ converge vers 0.
7. Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\forall (\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2) \in \mathcal{V}_a \times \mathcal{V}_b, \mathrm{V}1 \cap \mathrm{V}_2 \neq \varnothing$. On peut en conclure que $a = b$.
8. L'ensemble $\left\{\frac{n}{2}\,;\, n \in \mathbb{Z}\right\}$ est-il dense dans $\mathbb{R}$?

2. Exercices élémentaires

2 — *Étude d'une suite de points* f

Soit $\mathrm{A}(i)$, $\mathrm{B}(-i)$ et $(\mathrm{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de points définie par $\mathrm{M}_0 \in \mathscr{P}$, M_1 milieu de $[\mathrm{AM}_0]$, M_2 milieu de $[\mathrm{BM}_1]$, M_3 milieu de $[\mathrm{AM}_2]$, M_4 milieu de $[\mathrm{BM}_3]$ et ainsi de suite. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, z_n l'affixe de M_n.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer z_n en fonction de n.
2. La suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?

3 — *Suites récurrentes réelles couplées* f

Soit a_0 et b_0 dans $\mathbb{R}_+^*$ et $(a_n)_{n\geqslant 0}$, $(b_n)_{n\geqslant 0}$ les suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{a_n}{a_n^2 + b_n^2} \quad , \quad b_{n+1} = \frac{b_n}{a_n^2 + b_n^2} \quad \text{et} \quad z_n := a_n + i b_n \in \mathbb{C}$$

1. Montrer que les suites $(z_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante de convergence de $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$.

3. Exercices classiques plus techniques

4 — *Autour de la densité ƒ*

L'ensemble $\left\{\frac{n}{n+1}\,;\, n\in\mathbb{N}\right\}$ est-il dense dans $[0,1]$?

5 — *Une suite de nombres complexes ƒƒ*

On définit une suite (z_n) par son premier terme z_0 et par la relation de récurrence

$$\forall n\in\mathbb{N},\ z_{n+1}=\frac{z_n}{2-z_n}$$

On suppose $z_0\in\mathbb{U}$.

1. Soit $u\in\mathbb{U}$ tel que $|u|\leqslant 1$. Montrer que $|u|\leqslant|2-u|$ et qu'il y a égalité *si et seulement si* $u=1$.
2. Que peut-on dire de la suite (z_n) lorsque $z_0=0$? Justifier.
3. Même question lorsque $z_0=1$.
4. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|z_n|\leqslant 1$.
5. En déduire que la suite $(|z_n|)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

Dans la suite, on suppose $z_0\neq 1$.

6. Montrer que $|z_1|<1$.
7. On pose $q=\frac{1}{2-|z_1|}$. Montrer que $|z_{n+1}|\leqslant q|z_n|$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.
8. En déduire le comportement asymptotique de la suite $(z_n)_{n\geqslant 0}$.

4. Indications

1

Au 4., on pourra montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $e^{\frac{i}{n}} \in \mathrm{B}(1,\varepsilon)$ APCR.

2

Calculer z_{2n} et z_{2n+1}. On trouve des suites arithmético-géométriques.

3

Se souvenir que $a^2 + b^2 = (a - ib)(a + ib)$

4

La réponse est négative. On pourra s'intéresser aux variations de la suite de terme général $\frac{n}{n+1}$.

5

Au 1., comparer $|2 - u|^2$ et $|u|^2$.

5. Solutions

1

1. Faux. Pour tout $\varepsilon > 0$, $B(0,\varepsilon) \not\subset [0,1]$.
2. Vrai car $B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right) \subset [0,1]$.
3. Vrai car $[2025,+\infty[\subset [-1,1] \cup [2025,+\infty[$.
4. Vrai. Soit $\varepsilon > 0$. Comme
$$\left|1 - e^{\frac{i}{n}}\right|^2 = 2 - 2\cos\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
on a $e^{\frac{i}{n}} \in B(1,\varepsilon)$ APCR.
5. Faux car pour tout $n \in \mathbb{N}$, le module de j^n vaut 1.
6. Vrai car $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$.
7. Vrai. Par contraposition, si $a \neq b$, alors il existe $\forall (V_1, V_2) \in \mathcal{V}_a \times \mathcal{V}_b$ tel que $V1 \cap V_2 = \varnothing$.
8. Faux. L'intersection de $\left]0,\frac{1}{2}\right[$ avec $\left\{\frac{n}{2}\,;\, n \in \mathbb{Z}\right\}$ est vide.

2

Pour tout entier naturel n non nul, M_{2n} est le milieu de $[BM_{2n-1}]$ et M_{2n+1} est le milieu de $[AM_{2n}]$.

1. ⇛ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{2n+2} = \frac{1}{2}(z_{2n+1} - i)$ et $z_{2n+1} = \frac{1}{2}(z_{2n} + i)$. On a donc
$$z_{2n+2} = \frac{1}{4}z_{2n} - \frac{i}{4} \quad \text{et} \quad z_{2n+3} = \frac{1}{4}z_{2n+1} + \frac{i}{4}$$
Les suites $(z_{2n})_{n\geqslant 0}$ et $(z_{2n+1})_{n\geqslant 0}$ sont arithméticogéométriques.
⇛ Les solutions de $z = \frac{z}{4} - \frac{i}{4}$ et $z = \frac{z}{4} + \frac{i}{4}$ étant $-\frac{i}{3}$ et $\frac{i}{3}$, on a
$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_{2n} = -\frac{i}{3} + \frac{1}{4^n}\left(z_0 + \frac{i}{3}\right) \quad \text{et} \quad z_{2n+1} = \frac{i}{3} + \frac{1}{4^n}\left(z_1 - \frac{i}{3}\right)$$
où $z_1 = \frac{z_0+i}{2}$
2. Comme $z_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\frac{i}{3}$ et $z_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{i}{3}$, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

3

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $z_{n+1} = \frac{\overline{z_n}}{|z_n|^2} = \frac{1}{z_n}$. Ainsi, $z_{2n+2} = z_{2n}$ et $z_{2n+3} = z_{2n+1}$.
2. Les deux suites convergent *si et seulement si* (z_n) converge, ce qui équivaut à $z_0 = z_1$, ie $a_0^2 + b_0^2 = 1$.

4

La réponse est négative. Comme $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ lpour tout entier naturel n, la suite de terme général $\frac{n}{n+1}$ est strictement croissante et donc

$$\left\{\frac{n}{n+1}\,;\, n\in\mathbb{N}\right\}\cap\left]0,\frac{1}{2}\right[=\varnothing$$

5

1. On les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} |u|\leqslant|2-u| &\iff |u|^2\leqslant|2-u|^2 \\ &\iff |u|^2\leqslant(2-u)\overline{2-u} \\ &\iff |u|^2\leqslant 4-4\operatorname{Re}(u)+|u|^2 \\ &\iff \operatorname{Re}(u)\leqslant 1 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité est vraie puisque $\operatorname{Re}(u)\leqslant|u|\leqslant 1$. On a donc bien $|u|\leqslant|2-u|$. On a égalité *si et seulement si* $\operatorname{Re}(u)=|u|=1$ autrement dit *si et seulement si* $u=1$.

Commentaire

On peut raisonner de manière plus élégante. Notons O l'origine, A le point d'affixe 1 et M le point d'affixe u. Le disque $\mathscr{D}$ de centre O et de rayon 1 est inclus dans le demi-plan d'équation $x\geqslant 1$. La droite d'équation $x=1$ étant la médiatrice du segment [OA], MO $\leqslant$ MA, ce qui se traduit par $|u|\leqslant|2-u|$. On a égalité *si et seulement si* M est sur la médiatrice de [OA] donc *si et seulement si* M est le point d'affixe 1 puisque $\mathrm{M}\in\mathscr{D}$.

2. On montre par récurrence que $z_n=0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
3. On montre par récurrence que $z_n=1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
4. On a bien $|z_0|\leqslant 1$.Supposons $|z_n|\leqslant 1$ pour un certain $n\in\mathbb{N}$. En appliquant le 1. à $u=z_n$, on a alors $|z_n|\leqslant|2-z_n|$ et donc $|z_{n+1}|\leqslant 1$. Par récurrence, $|z_n|\leqslant 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.
5. Soit $n\in\mathbb{N}$. Par l'inégalité triangulaire, $|2-z_n|\geqslant 2-|z_n|\geqslant 1$ car $|z_n|\leqslant 1$. Ainsi $|z_{n+1}|=\frac{|z_n|}{|2-z_n|}\leqslant|z_n|$. La suite $(|z_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien décroissante.
6. En appliquant la première question à $u=z_0$, on a alors $|z_0|\leqslant|2-z_0|$ ou encore $|z_1|\leqslant 1$ avec égalité *si et seulement si* $z_0=1$, ce qui est exclu par l'énoncé. Ainsi $|z_1|<1$.
7. Comme la suite $(|z_n|)$ est décroissante, $|z_n|\leqslant|z_1|$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ |2-z_n|\geqslant 2-|z_n|\geqslant 2-|z_1|$$

Ainsi, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$|z_{n+1}|=\frac{|z_n|}{|2-z_n|}\leqslant\frac{|z_n|}{2-|z_1|}=q|z_n|$$

8. On a bien $|z_1|\leqslant q^{1-1}|z_1|$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons $|z_n|\leqslant q^{n-1}|z_1|$. Alors, d'après la question précédente :

$$|z_{n+1}|\leqslant q|z_n|\leqslant q^n|z_1|$$

Par récurrence, $|z_n|\leqslant q^{n-1}|z_1|$.

9. Puisque $|z_1|<1$, $q<1$. Ainsi $|z_n|\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.