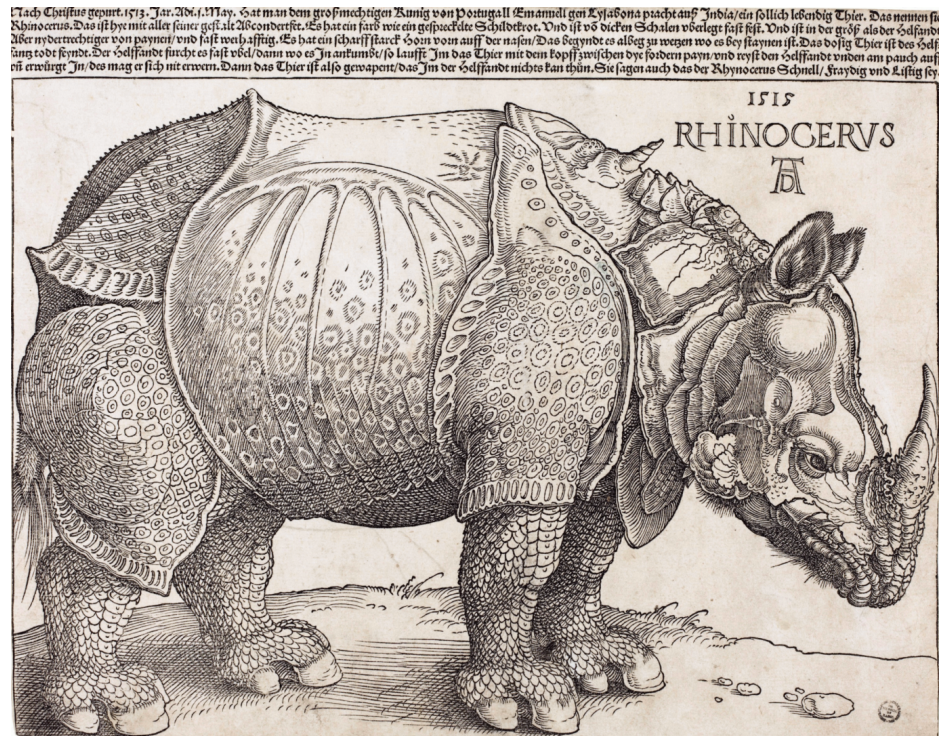




Certains exercices sur les sommes nécessitent une très bonne technique.



Rhinocéros, Albrecht Dürer

4	Calculs algébriques	1
I	Un exercice de concours coriace	2
II	Un déficit binomial et sans filet	4

I. Un exercice de concours coriace

Polytechnique MP-2025

Pour toute partie finie non vide X de $\mathbb{R}$ dont on note $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ les éléments, on pose

$$a^+(X) := \prod_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i + 1) \quad \text{et} \quad a^-(X) := \prod_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i - 1)$$

L'objectif est d'établir que

$$\sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset}} a^-(B) = a^+(A) \quad \text{pour toute partie finie non vide } A \text{ de } \mathbb{R}$$

On se donne $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}$ avec $a_1 < \dots < a_n$. Rappel de la convention des produits vides : $\prod_{i \in \emptyset} a_i = 1$.

1. On suppose le résultat acquis. Trouver une expression de $\alpha(A) := \sum_{\substack{B \subset A \\ a_n \in B}} a^-(B)$.

2. Établir le résultat cherché.

3. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on pose $A = \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $\sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset, B \cap (B+1) = \emptyset}} a^-(B)$ (où $B+1 := \{b+1; b \in B\}$).

Conseil

Avant de les manipuler dans le cas général, il peut être profitable d'explicitier les différentes expressions en jeu pour des petites valeurs de n , afin de les rendre moins abstraites.

✖ Cas $n = 1$. Tous les produits sont vides, on a donc $\sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset}} a^-(B) = a^+(A) = 1$ (un seul terme dans la somme).

✖ Cas $n = 2$. On a $a^+(A) = x_2 - x_1 + 1$ et

$$\sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset}} a^-(B) = a^-(\{x_1\}) + a^-(\{x_2\}) + a^-(\{x_1, x_2\}) = 1 + 1 + x_2 - x_1 - 1 = x_2 - x_1 + 1$$

✖ Cas $n = 3$. On a $a^+(A) = (x_3 - x_2 + 1)(x_2 - x_1 + 1)$ et

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset}} a^-(B) &= a^-(\{x_1\}) + a^-(\{x_2\}) + a^-(\{x_3\}) + a^-(\{x_1, x_2\}) + a^-(\{x_2, x_3\}) + a^-(\{x_3, x_1\}) + a^-(A) \\ &= 3 + (x_2 - x_1 - 1 + x_3 - x_2 - 1 + x_3 - x_1 - 1) + (x_3 - x_2 - 1)(x_2 - x_1 - 1) = a^+(A) \end{aligned}$$

✖ Supposons le résultat vrai jusqu'au rang n et reprenons les notations de l'énoncé. En partitionnant l'ensemble de tous les sous-ensembles non vides $B \subset A$ en deux catégories disjointes :

✓ Ceux qui ne contiennent pas a_n (ce sont les sous-ensembles non vides de $A \setminus \{a_n\}$).

✓ Ceux qui contiennent a_n (ce qui correspond par définition à la somme $\alpha(A)$).

✗ On obtient les relations suivantes :

$$a^+(A) = \sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset}} a^-(B) = \sum_{\substack{B \subset A \setminus \{a_n\} \\ B \neq \emptyset}} a^-(B) + \sum_{\substack{B \subset A \\ a_n \in B}} a^-(B) = a^+(A \setminus \{a_n\}) + \alpha(A)$$

d'où $\alpha(A) = a^+(A) - a^+(A \setminus \{a_n\})$. Si $n = 1$, alors $\alpha(A) = 1$.

✓ Supposons $n \geq 2$. On a $a^+(A) = a^+(A \setminus \{a_n\})(a_n - a_{n-1} + 1)$. En injectant cette formule, on obtient :

$$\alpha(A) = a^+(A \setminus \{a_n\})(a_n - a_{n-1} + 1) - a^+(A \setminus \{a_n\}) = (a_n - a_{n-1}) a^+(A \setminus \{a_n\})$$

La première question est une indication

Ce résultat suggère un raisonnement par récurrence sur le cardinal n de la partie A . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous noterons $\mathcal{P}(n)$ la propriété suivante : pour toute partie finie A de $\mathbb{R}$ de cardinal inférieur ou égal à n , on a :

$$\sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset}} a^-(B) = a^+(A)$$

✗ L'initialisation a déjà été faite dans l'encadré « conseil ». Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$ et supposons $\mathcal{P}(n)$.

✗ Soit $A_{n+1} := \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ un ensemble à $n+1$ éléments tel que $a_1 < \dots < a_{n+1}$. Pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on pose $A_k := \{a_1, \dots, a_k\}$. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à A_n , on a

$$\sum_{\substack{B \subset A_{n+1} \\ B \neq \emptyset}} a^-(B) = \sum_{\substack{B \subset A_n \\ B \neq \emptyset}} a^-(B) + \sum_{\substack{B \subset A_{n+1} \\ a_{n+1} \in B}} a^-(B) = a^+(A_n) + \alpha(A_{n+1})$$

✗ Pour calculer $\alpha(A_{n+1})$, on distingue les parties B de A_{n+1} selon que $a_n \in B$ ou non :

✓ **Cas 1** : $a_n \in B$. Alors $B = B' \cup \{a_{n+1}\}$ où B' est une partie quelconque de A_n contenant a_n . Comme a_n et a_{n+1} sont consécutifs dans B , on a $a^-(B) = a^-(B')(a_{n+1} - a_n - 1)$. La somme de ces termes donne :

$$(a_{n+1} - a_n - 1) \alpha(A_n)$$

✓ **Cas 2** : $a_n \notin B$. Alors B est un sous-ensemble de $A_{n+1} \setminus \{a_n\}$ contenant a_{n+1} . D'après le 1. appliqué à $A_{n+1} \setminus \{a_n\}$ dont les deux plus grands éléments sont a_{n+1} et a_{n-1} , cette somme vaut :

$$(a_{n+1} - a_{n-1}) a^+(A_{n-1})$$

✗ En regroupant ces deux types de termes, on obtient finalement

$$\alpha(A) = (a_{n+1} - a_n - 1) \alpha(A_n) + (a_{n+1} - a_{n-1}) a^+(A_{n-1})$$

✗ En utilisant l'expression de $\alpha(A_n) = (a_n - a_{n-1}) a^+(A_{n-1})$ trouvée au 1., on peut factoriser :

$$\alpha(A) = \underbrace{\left((a_{n+1} - a_n - 1)(a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_{n-1}) \right)}_{\delta :=} a^+(A_{n-1})$$

De plus, on a $\delta = (a_{n+1} - a_n)(a_n - a_{n-1}) + a_{n+1} - a_n = (a_{n+1} - a_n)(a_n - a_{n-1} + 1)$, d'où

$$\alpha(A) = (a_{n+1} - a_n)(a_n - a_{n-1} + 1) a^+(A_{n-1}) = (a_{n+1} - a_n) a^+(A_n)$$

Finalement, en réinjectant cette expression de $\alpha(A_{n+1})$, on démontre $\mathcal{P}(n+1)$:

$$\sum_{\substack{B \subset A_{n+1} \\ B \neq \emptyset}} a^-(B) = a^+(A_n) + (a_{n+1} - a_n) a^+(A_n) = a^+(A_n)(1 + a_{n+1} - a_n) = a^+(A_{n+1})$$

La dernière question est une application

La somme demandée est une « partie » de la somme calculée au 2. Il est naturel de se demander ce que signifie la condition $B \cap (B+1) = \emptyset$. Il est plus commode de s'intéresser à son contraire $B \cap (B+1) \neq \emptyset$.

✕ Posons $A := \llbracket 1, n \rrbracket$. Soit $B \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $B \cap (B+1) \neq \emptyset$. Il existe alors $(k, \ell) \in B^2$ tel que $k = \ell + 1$. Ainsi B contient $k-1$ et k . Puisque B ne contient que des entiers, on en déduit que $a^{-1}(B) = 0$. Ainsi, par la question précédente,

$$\sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset, B \cap (B+1) = \emptyset}} a^-(B) = \sum_{\substack{B \subset A \\ B \neq \emptyset}} a^-(B) = a^+(A) = \prod_{i=1}^{n-1} (i+1 - i+1) = 2^{n-1}$$

II. Un déficit binomial et sans filet

Mines MP-2013

1. Établir la formule $\forall m \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}, \sum_{p=0}^q (-1)^p \binom{m}{p} = (-1)^q \binom{m-1}{q}$.
2. Démontrer la formule $\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}, \forall q \in \mathbb{N}, \sum_{p=0}^q (-1)^p p \binom{m}{p} = (-1)^q m \binom{m-2}{q}$.
3. Pour $m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ et $q \in \mathbb{N}$, donner une expression simplifiée de $\sum_{p=0}^q (-1)^p p(p-1) \binom{m}{p}$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ et $q \in \mathbb{N}$, simplifier $\sum_{p=0}^q (-1)^p (x-p)^2 \binom{m}{p}$.
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la formule $\sum_{p=0}^n (-1)^p (n-p)^2 \binom{2n}{p} = 0$.