



Les équations fonctionnelles sont d'excellents exercices pour apprendre la rigueur et mettre en œuvre une gamme variée de raisonnements. En voici un exemple ne nécessitant que très peu de bagage mathématique.



Le miracle de Saint-Marc, Tintoret

1	Logique et raisonnements mathématiques	1
I	Une première approche des équations fonctionnelles	2
1.1	Un brouillon d'analyse	2
1.2	Deux rédactions peaufinées	3
II	Un petit déficit sans filet	4

I. Une première approche des équations fonctionnelles

On cherche à résoudre le problème suivant :

Une équation fonctionnelle E_1

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x^2 + f(y)) = (x - y)^2 f(x + y)$.

Comme nous l'avons vu dans ALG 1, ce type de question se prête bien à l'analyse-synthèse.

1.1. Un brouillon d'analyse

Ce qui suit est un brouillon (ou presque)

Dans la suite de ce paragraphe, j'ai retranscrit le plus fidèlement possible la succession des idées qui me sont venues au brouillon. J'ai bien-sûr omis toutes les branches mortes accumulées au cours de cette recherche.

Considérons une solution f de l'équation E_1 .

✕ Valeurs remarquables.

En donnant des valeurs particulières à x et y , on peut obtenir l'expression de la fonction f en certains points. Par exemple, pour x réel et $y := x$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2 + f(x)) = 0 \quad (\star)$$

et en particulier $f(f(0)) = 0$. Pour $x := 0$ et $y := 0$, on obtient $f(f(0)) = 0$. On en déduit que $f(0) = 0$. Ainsi, pour x dans $\mathbb{R}$, on a $f(x^2) = x^2 f(x)$.

✕ La pêche aux solutions particulières.

On remarque que la fonction nulle est clairement une solution de E_1 . Grâce à $(\star)$, on voit que la résolution peut se faire en déterminant l'ensemble des zéros de la fonction f , i.e. les points où f s'annule. Ceci peut nous aider à trouver d'autres solutions particulières. On peut par exemple rechercher les éventuelles solutions ne s'annulant qu'en 0. Une telle solution f vérifie alors $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + f(x) = 0$ par $(\star)$. On vérifie réciproquement que la fonction $f_0 : x \mapsto -x^2$ est bien solution. En effet, pour x et y dans $\mathbb{R}$, on a

$$f_0(x^2 + f_0(y)) = f_0(x^2 - y^2) = -(x^2 - y^2)^2 = -(x - y)^2(x + y)^2 = -(x - y)^2 f_0(x + y)$$

✕ Exploiter les symétries de l'équation.

On remarque que l'expression $f(x^2 + f(y))$ est invariante si l'on change x en $-x$. On en déduit que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - y)^2 f(x + y) = (x + y)^2 f(y - x) \quad (\star\star)$$

✕ Une première piste via $(\star\star)$.

Supposons que f s'annule en un point z autre que zéro. Pour un réel x arbitraire et $y := z + x$, on déduit que $(\star\star)$ que $z^2 f(z + 2x) = 0$, i.e. $f(z + 2x) = 0$. En faisant varier x , on en déduit¹ que f s'annule partout sur $\mathbb{R}$. Ainsi, nous venons de justifier que f_0 et la fonction nulle sont les seules solutions de l'équation E_1 .

1. Tout réel t s'écrit sous la forme $t = z + 2x$ avec x réel ($x = (t - z)/2$ convient clairement).

✂ Une seconde piste via (★★).

Une autre façon d'exploiter (★★) consiste à forcer la valeur de $y - x$ afin de calculer certaines valeurs de f . Choisissons par exemple un réel x quelconque puis posons $y := x + 1$. On obtient

$$f(2x + 1) = \lambda(2x + 1)^2 \quad \text{où} \quad \lambda := f(1)$$

En faisant varier x (argument analogue au point précédent), on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x^2$. Ainsi f ne s'annule qu'en zéro d'où $f = f_0$.

1.2. Deux rédactions peaufinées

Vers une démonstration minimale

La rédaction qui précède constitue une démonstration satisfaisante. Cependant, on peut optimiser ce premier jet. Pour cela, il faut choisir entre les deux solutions entrevues. Nous donnerons ensuite une troisième version.

✂ Première version.

✓ **Analyse.** Soit f une solution de E_1 .

✦ Pour x réel et $y := x$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2 + f(x)) = 0 \quad (\star)$$

et en particulier $f(f(0)) = 0$. Pour $x := 0$ et $y := 0$, on obtient $f(f(0)) = 0$. On en déduit que $f(0) = 0$.

✦ L'expression $f(x^2 + f(y))$ est invariante si l'on change x en $-x$. On en déduit que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - y)^2 f(x + y) = (x + y)^2 f(y - x) \quad (\star\star)$$

✦ Supposons que f s'annule en un point z autre que zéro. Pour un réel x arbitraire et $y := z + x$, on déduit que $(\star\star)$ que $z^2 f(z + 2x) = 0$, i.e. $f(z + 2x) = 0$. En faisant varier x , on en déduit que f s'annule partout sur $\mathbb{R}$. Ainsi $f : x \mapsto -x^2$ par $(\star)$.

✓ **Synthèse.** La fonction nulle est clairement solution de E_1 . Posons $f_0 : x \mapsto -x^2$. Pour x et y réels, on a

$$f_0(x^2 + f_0(y)) = f_0(x^2 - y^2) = -(x^2 - y^2)^2 = -(x - y)^2(x + y)^2 = -(x - y)^2 f_0(x + y)$$

✓ **Conclusion.** Les solutions de E_1 sont la fonction nulle et f_0 .

✂ Deuxième version.

✓ **Analyse.** Soit f une solution de E_1 .

✦ L'expression $f(x^2 + f(y))$ est invariante si l'on change x en $-x$. On en déduit que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - y)^2 f(x + y) = (x + y)^2 f(y - x) \quad (\star\star)$$

✦ Choisissons un réel x quelconque puis posons $y := x + 1$. On obtient

$$f(2x + 1) = \lambda(2x + 1)^2 \quad \text{où} \quad \lambda := f(1)$$

En faisant varier x (argument analogue au point précédent), on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x^2$.

- ✦ Pour x réel et $y := x$, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x^2 + f(x)) = 0 \quad (\star)$$

Supposons $\lambda \neq 0$. De par son expression, f ne s'annule qu'en 0 d'où $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x^2$ par $(\star)$.

✓ **Synthèse.** Analogue à la précédente.

✕ Troisième version.

✓ **Analyse.** Soit f une solution de E_1 .

- ✦ L'expression $f(x^2 + f(y))$ est invariante si l'on change x en $-x$. On en déduit que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - y)^2 f(x + y) = (x + y)^2 f(y - x) \quad (\star\star)$$

- ✦ Choisissons un réel x quelconque puis posons $y := x + 1$. On obtient

$$f(2x + 1) = \lambda(2x + 1)^2 \quad \text{où} \quad \lambda := f(1)$$

En faisant varier x (argument analogue au point précédent), on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x^2$.

✓ **Synthèse.** La fonction nulle est clairement solution. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $g : x \mapsto \lambda x^2$. Pour x et y réels, on a

$$f(x^2 + f(y)) = \lambda(x^2 + \lambda y^2)^2 \quad \text{et} \quad (y - x)^2 f(x + y) = \lambda(y - x)^2 (x + y)^2 = \lambda(x^2 - y^2)^2$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } E_1 &\iff \left(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x^2 + \lambda y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 \right) \quad (\text{car } \lambda \neq 0) \\ &\iff \lambda = -1 \end{aligned}$$

La dernière équivalence mérite une justification par double implication. Le sens $\implies$ est obtenu en choisissant $x = 1$ et $y = 1$. La réciproque est évidente.

Où finir une analyse ?

Cette troisième version est intéressante car elle montre qu'une analyse peut parfois être poussée plus loin.

II. Un petit défi sans filet

Entraînez-vous sur l'équation suivante :

Une équation fonctionnelle E_2

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$.

On rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x , i.e. le plus grand entier relatif n vérifiant $n \leq x$. Ainsi, $\lfloor 3,2 \rfloor = 3$ et $\lfloor -0,2 \rfloor = -1$.