



ALG 3

Nombres complexes

Les nombres complexes apparaissent souvent au concours dans des problèmes sur les sommes et polynômes. Voici des exercices abordables dès la terminale.



L'apparition, Gustave Moreau

3 Nombres complexes	1
I Un exercice de concours	2
II Un petit déficit sans filet	2

I. Un exercice de concours

Polytechnique PC-2000

Soit u et v des nombres complexes. Montrer que $u = \bar{v} \iff \forall z \in \mathbb{U}, \frac{(z-u)(1-vz)}{z} \in \mathbb{R}_+$.

Ce qui suit est un brouillon (ou presque)

Dans la suite de ce paragraphe, j'ai retranscrit le plus fidèlement possible la succession des idées qui me sont venues au brouillon. J'ai bien-sûr omis toutes les branches mortes accumulées au cours de cette recherche.

- ✕ L'implication $\implies$ semble plus simple que sa réciproque pour au moins deux raisons : d'une part la relation $u = \bar{v}$ permet de réduire à deux le nombre d'inconnues (v et z par exemple), d'autre part pour $z \in \mathbb{U}$, on a $z^{-1} = \bar{z}$ d'où

$$\frac{(z-u)(1-vz)}{z} = (z-u)(\bar{z}-v)$$

ce qui permet d'exploiter facilement l'hypothèse $u = \bar{v}$.

- ✕ Supposons que $u = \bar{v}$. On a alors $\bar{u} = v$. Soit $z \in \mathbb{U}$. Par le calcul précédent, on aboutit à

$$\frac{(z-u)(1-vz)}{z} = (z-u)(\bar{z}-v) = (z-u)(\bar{z}-\bar{u}) = |z-u|^2 \in \mathbb{R}_+$$

- ✕ Réciproquement, supposons que $\forall z \in \mathbb{U}, \frac{(z-u)(1-vz)}{z} \in \mathbb{R}_+$. Le premier réflexe est de simplifier le quotient en exploitant comme précédemment la relation $z^{-1} = \bar{z}$ pour z dans $\mathbb{U}$. Soit $z \in \mathbb{U}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{(z-u)(1-vz)}{z} &= \bar{z}(z-u)(1-vz) = (|z|^2 - u\bar{z})(1-vz) \\ &= (1 - u\bar{z})(1-vz) = 1 - vz - u\bar{z} + uv|z|^2 = 1 + uv - vz - u\bar{z} \end{aligned}$$

L'idée est maintenant de jouer sur $z \in \mathbb{U}$.

- ✓ Pour $z = \pm 1$, on trouve $1 - u - v + uv \in \mathbb{R}_+$ et $1 + u + v + uv \in \mathbb{R}_+$, et, en formant la différence, $2(u+v) \in \mathbb{R}$. Ainsi $u+v$ est réel et donc $\text{Im } u = -\text{Im } v$.
- ✓ Pour $z = \pm i$, $1 - iv + iu + uv \in \mathbb{R}_+$ et $1 + iv - iu + uv \in \mathbb{R}_+$, d'où, en formant la différence, $2i(v-u) \in \mathbb{R}$ donc $v-u \in i\mathbb{R}$ et ainsi $\text{Re } u = \text{Re } v$.
- ✓ On en déduit que $u = \bar{v}$.

II. Un petit défit sans filet

Polytechnique PC-2000

Soit u et v des nombres complexes. Montrer que $(u, v) = (0, 0) \iff \forall z \in \mathbb{U}, |(z-u)(z-v)| = 1$.