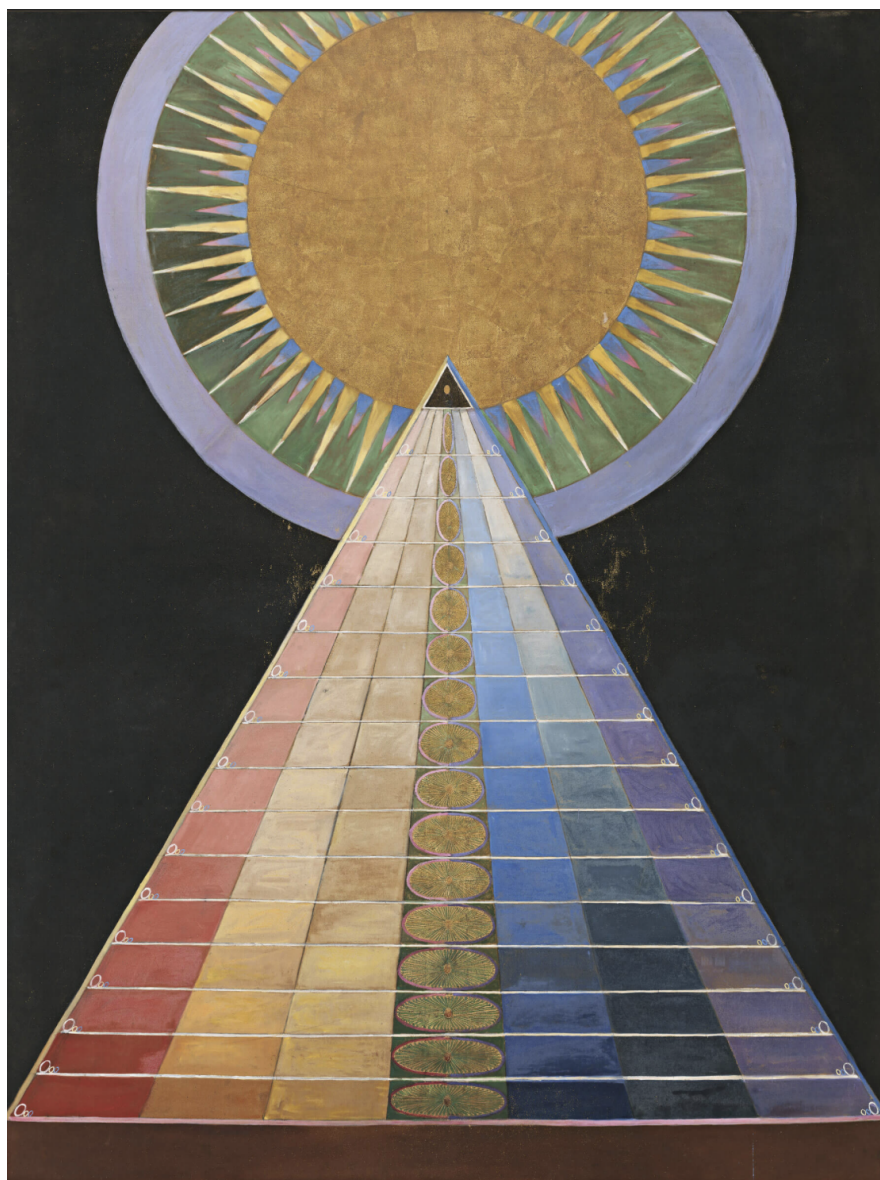




Voici venu le temps de s'exercer aux inégalités.



Group X, n° 1, Altarpiece , Hilma af Klint

1 Nombres réels	1
I L'inégalité du réarrangement	2
II Un déficit sans filet	3

I. L'inégalité du réarrangement

Polytechnique PC-1998

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ tels que $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$ et $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_n$.

Démontrer que, pour toute permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n (x_i - y_{\sigma(i)})^2$$

On appelle permutation d'un ensemble E toute bijection de E dans E .

Soit une permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On remarque que

$$\sum_{i=1}^n y_{\sigma(i)}^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

Ainsi, en développant les carrés, il s'agit de démontrer que

$$\sum_{i=1}^n x_i y_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

Cette inégalité est connue sous l'appellation « inégalité du réarrangement ».

Conseil

Commencer par les cas $n = 2$ et $n = 3$ est très inspirant.

✕ Dans le cas $n = 2$, il n'y a que deux permutations possibles : l'identité et celle qui échange les nombres 1 et 2. On conclut en remarquant que

$$x_2 y_2 + x_1 y_1 - (x_2 y_1 + x_1 y_2) = (y_2 - y_1)(x_2 - x_1) \geq 0$$

✕ Passons au cas $n = 3$. Considérons une bijection $\sigma : \llbracket 1, 3 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, 3 \rrbracket$.

✓ On remarque tout de suite que si $\sigma(3) = 3$, alors on se ramène au cas $n = 2$ puisque on peut simplifier par $x_3 y_3$ dans chacun de deux membres. De même si σ admet 1 ou 2 pour point fixe.

✓ Il reste donc à examiner le cas des deux permutations circulaires. Par exemple :

$$x_3 y_3 + x_2 y_2 + x_1 y_1 - (x_3 y_2 + x_2 y_1 + x_1 y_3)$$

Aucune factorisation ne saute aux yeux. En revanche

$$x_3 y_3 + x_2 y_1 + x_1 y_2 - (x_3 y_2 + x_2 y_1 + x_1 y_3) = x_3 y_3 + x_1 y_2 - (x_3 y_2 + x_1 y_3) = (y_3 - y_2)(x_3 - x_1) \geq 0$$

ce qui permet de se ramener au cas de deux termes (x_1 et x_2) :

$$x_3 y_2 + x_2 y_1 + x_1 y_3 \leq x_3 y_3 + x_2 y_1 + x_1 y_2 \leq x_3 y_3 + x_2 y_2 + x_1 y_1$$

Itération

On entrevoit ci-dessus une solution par récurrence : partant d'une permutation σ de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, on se ramène à une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en permutant $n+1$ et $\sigma(n+1)$.

✕ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai au rang n . Considérons des réels $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}, y_1, y_2, \dots, y_{n+1}$ tels que $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_{n+1}$ et $y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_{n+1}$. Fixons σ une permutation de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Notons τ la permutation de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ qui échange $n+1$ et $\sigma(n+1)$ tout en fixant les autres termes de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. En posant $k := \sigma^{-1}(n+1)$, on a

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i y_{(\tau \circ \sigma)(i)} - \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_{\sigma(i)} = x_{n+1} y_{n+1} + x_k y_{\sigma(n+1)} - x_{n+1} y_{\sigma(n+1)} - x_k y_{n+1} = (x_{n+1} - x_k)(y_{n+1} - y_{\sigma(n+1)}) \geq 0$$

Ainsi, par l'hypothèse au rang n :

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i y_{\sigma(i)} \leq \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_{(\tau \circ \sigma)(i)} \leq \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_{\sigma(i)}$$

Ce qui achève la démonstration de la propriété au rang $n+1$.

II. Un déficit sans filet

Inégalité de Tchebychev

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et des nombres réels $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$. Démontrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n b_i \right)$$