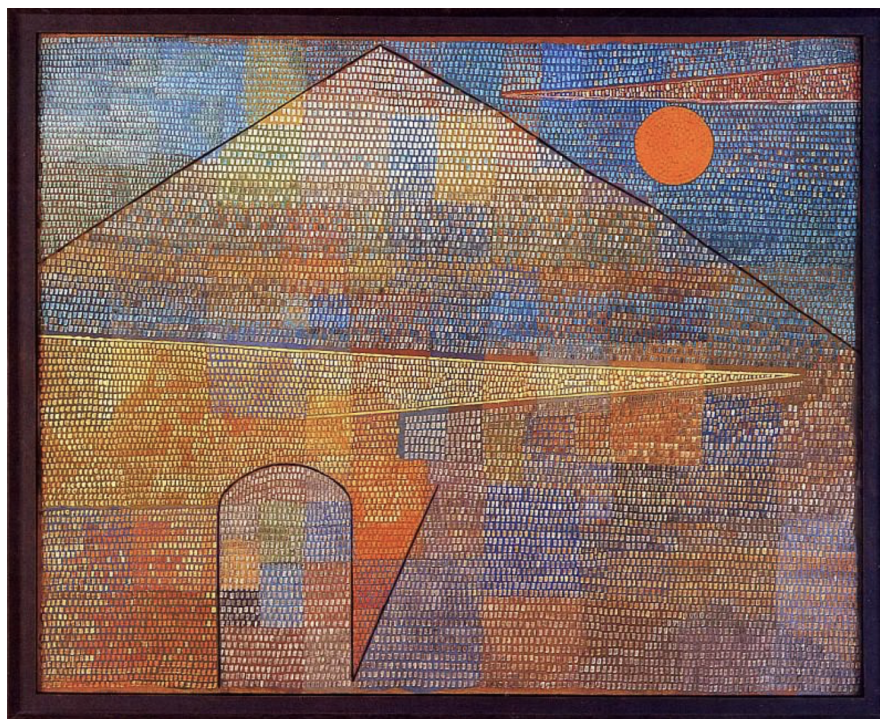




Voici deux suites numériques issues des concours : la première est récurrente, la seconde implicite.



Ad Parnassum , Paul Klee

2 Suites numériques	1
I Étude d'une suite numérique atypique	2
II Une rédaction optimisée	3
III Une suite définie implicitement	4

I. Étude d'une suite numérique atypique

Polytechnique PC-2026

On définit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $u_0 > 0$, $u_1 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}$$

Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Conseils pour l'étude d'une suite

- ⇒ D'une façon générale, il peut être intéressant d'étudier la monotonie, les caractères majoré-minoré-borné, de calculer les potentielles limites dans $\overline{\mathbb{R}}$, quitte à considérer des conditions initiales particulières.
- ⇒ Une fois conjecturé que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$, on peut essayer d'appliquer les « grands » théorèmes (limite monotone, encadrement) pour conclure ou sinon s'orienter vers un contrôle précis de $|u_n - \ell|$.

- ✗ On remarque que $u_n > 0$ par une récurrence double facile.
- ✗ Supposons la suite convergente et notons ℓ sa limite. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient $\ell = 2\sqrt{\ell}$, c'est-à-dire $\ell = 0$ ou $\ell = 4$.
- ✗ On voit facilement que la suite est majorée. Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. Supposons que $u_n \leq M$ et $u_{n+1} \leq M$ pour $n \in \mathbb{N}$. On a alors $u_{n+2} \leq 2\sqrt{M}$. L'hérédité est donc assurée pour M vérifiant $2\sqrt{M} \leq M$, i.e. $M \geq 4$. Il suffit alors de choisir M égal à $\max(4, u_0, u_1)$ pour en conclure que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
- ✗ La relation de récurrence nous pousse à conjecturer que la seule limite possible est 4. En effet, supposons l'existence de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < u_n \leq 1$. On a alors $\sqrt{u_n} \geq u_n$ d'où

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} \geq \sqrt{u_n} \geq u_n \quad \star$$

On en déduit 0 semble une valeur répulsive de la suite : si la suite entre dans $]0, 1[$, alors elle se met à croître au moins une fois. On a en fait un résultat un peu plus précis en exploitant cette idée. On va démontrer qu'à partir d'un certain rang non nul $u_n \geq 1$. Raisonnons par l'absurde. Comme la propriété $u_n \geq 1$ est héréditaire à partir du rang 1 (cf. la relation de récurrence), supposons que u_n appartient à $]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On déduit de $\star$ que la suite est croissante à partir du rang 1, comme elle est majorée par 1, elle converge. Sa limite est donc égale à 4 (0 est à exclure car elle est croissante). Ceci est absurde.

- ✗ Nous allons tenter de contrôler $\delta_n := u_n - 4$. Comme la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est récurrente d'ordre deux, on recherche une relation de récurrence vérifiée par $(\delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_{n+1} = u_{n+2} - 4 = \sqrt{u_{n+1}} - 2 + \sqrt{u_n} - 2 = \frac{\delta_{n+1}}{\sqrt{u_{n+1}} + 2} + \frac{\delta_n}{\sqrt{u_n} + 2}$$

On a par l'inégalité triangulaire et positivité de la suite que pour $n \geq n_0$:

$$|\delta_{n+2}| \leq \frac{|\delta_{n+1}|}{\sqrt{u_{n+1}} + 2} + \frac{|\delta_n|}{\sqrt{u_n} + 2} \leq \frac{|\delta_{n+1}| + |\delta_n|}{3}$$

À propos du contrôle obtenu

- ⇒ Cette inégalité de contrôle va nous permettre de démontrer que $\delta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.
- ⇒ On peut contrôler $|\delta_n|$ au moyen de $|\delta_{n+1}|$ et $|\delta_{n+2}|$. Pour se ramener à deux indices, il est préférable d'essayer de contrôler deux termes consécutifs en une seule fois, c'est-à-dire contrôler $\max(\delta_n, \delta_{n+1})$. Posons $\varepsilon_n := |\delta_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \geq n_0$, on a

$$\varepsilon_{n+2} \leq \frac{\varepsilon_n + \varepsilon_{n+1}}{3} \leq \frac{2 \max(\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1})}{3} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{n+3} \leq \frac{\varepsilon_{n+1} + \varepsilon_{n+2}}{3} \leq \frac{2}{3} \max(\varepsilon_{n+1}, \varepsilon_{n+2})$$

À chaque itération, le plus grand des deux termes ε_n et ε_{n+1} diminue au moins d'un facteur $\frac{1}{3}$.

- ✕ En notant $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $G_n := \max(|\delta_{n+1}|, |\delta_n|)$, on en déduit que, pour $n \geq n_0$,

$$|\delta_{n+2}| \leq \frac{2G_n}{3}$$

Puisque $0 \leq |\delta_{n+1}| \leq G_n$, on a donc $G_{n+1} \leq G_n$. La suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante positive à partir du rang n_0 donc converge vers un réel ℓ positif. D'autre part, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$,

$$|\delta_{n+2}| \leq \frac{2G_n}{3} \quad \text{et} \quad |\delta_{n+3}| \leq \frac{2G_{n+1}}{3} \leq \frac{2G_n}{3}$$

Ainsi $G_{n+2} \leq \frac{2G_n}{3}$. Comme ceci est vrai pour tout indice $n \geq n_0$, on en déduit que $\ell \leq \frac{2}{3}\ell$ d'où $\ell = 0$. Comme $|\delta_n| \leq G_n$ pour tout n , on déduit du théorème d'encadrement que $\delta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

II. Une rédaction optimisée

Voici une version épurée de la solution que nous avons trouvée précédemment.

- ✕ On remarque que $u_n > 0$ par une récurrence double facile.
- ✕ Supposons la suite convergente et notons ℓ sa limite. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on obtient $\ell = 2\sqrt{\ell}$, c'est-à-dire $\ell = 0$ ou $\ell = 4$.
- ✕ Supposons que u_n appartient à $]0, 1[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}} \geq \sqrt{u_n} \geq u_n$$

Ainsi la suite est croissante à partir du rang 1, comme elle est majorée par 1, elle converge. Sa limite est donc égale à 4 (0 est à exclure car elle est croissante). Ceci est absurde. On en déduit l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_{n_0} \geq 1$. On démontre alors par une récurrence facile que $u_n \geq 1$ à partir du rang n_0 .

- ✕ Posons $\delta_n := u_n - 4$ pour tout entier naturel n . On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\delta_{n+1} = u_{n+2} - 4 = \sqrt{u_{n+1}} - 2 + \sqrt{u_n} - 2 = \frac{\delta_{n+1}}{\sqrt{u_{n+1}} + 2} + \frac{\delta_n}{\sqrt{u_n} + 2}$$

On a par l'inégalité triangulaire et positivité de la suite que pour $n \geq n_0$:

$$|\delta_{n+2}| \leq \frac{|\delta_{n+1}|}{\sqrt{u_{n+1}}+2} + \frac{|\delta_n|}{\sqrt{u_n}+2} \leq \frac{|\delta_{n+1}|+|\delta_n|}{3}$$

En notant $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $G_n := \max(|\delta_{n+1}|, |\delta_n|)$, on en déduit que, pour $n \geq n_0$,

$$|\delta_{n+2}| \leq \frac{2G_n}{3}$$

Puisque $0 \leq |\delta_{n+1}| \leq G_n$, on a donc $G_{n+1} \leq G_n$. La suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante positive à partir du rang n_0 donc converge vers un réel ℓ positif. D'autre part, pour $n \geq n_0$,

$$|\delta_{n+2}| \leq \frac{2G_n}{3} \quad \text{et} \quad |\delta_{n+3}| \leq \frac{2G_{n+1}}{3} \leq \frac{2G_n}{3}$$

Ainsi $G_{n+2} \leq \frac{2G_n}{3}$. Comme ceci est vrai pour tout indice $n \geq n_0$, on en déduit que $\ell \leq \frac{2}{3}\ell$ d'où $\ell = 0$. Comme $|\delta_n| \leq G_n$ pour tout n , on déduit du théorème d'encadrement que $\delta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Une petite optimisation de la phase de contrôle de la démonstration

En notant $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\lambda_0 := |\delta_{n_0}|$, $\lambda_1 := |\delta_{n_0+1}|$ et

$$\forall n \geq n_0, \lambda_{n+2} = \frac{\lambda_{n+1} + \lambda_n}{3}$$

on démontre facilement par récurrence que $\forall n \geq n_0, |\delta_n| \leq \lambda_n$. Nous verrons un peu plus tard dans l'année que l'on peut expliciter λ_n au moyen de suites géométriques puis en déduire directement que $\lambda_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ sans passer par la suite G_n .

III. Une suite définie implicitement

Polytechnique PC-2025

Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) := x^n + x^{\frac{1}{n}}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique x_n tel que $f_n(x_n) = a$.
2. Étudier la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ en fonction de a .