



Le retour des équations fonctionnelles.



La vision de Saint-Eustache, Dürer

2	Théorie des ensembles	1
I	Un exercice de concours	2
1.1	Une analyse-synthèse	2
1.2	Une rédaction épurée	3
II	Un petit défit sans filet	3

I. Un exercice de concours

On cherche à résoudre le problème suivant :

Polytechnique PC-2011

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(f(n)) = n + 1$.

Il s'agit d'une équation fonctionnelle **E** que allons aborder par analyse-synthèse.

1.1. Une analyse-synthèse

Ce qui suit est un brouillon (ou presque)

Dans la suite de ce paragraphe, j'ai retranscrit le plus fidèlement possible la succession des idées qui me sont venues au brouillon. J'ai bien-sûr omis toutes les branches mortes accumulées au cours de cette recherche.

✕ **Analyse.** Considérons une solution f de l'équation **E**.

- ✓ Posons $a := f(0)$. On va « itérer » afin de calculer en fonction de a le plus valeurs possibles de f .
- ✓ On a $f(a) = f(f(0)) = 1$ d'où $f(1) = f(f(a)) = a + 1$. Continuons par $f(a + 1) = 2$ d'où $f(2) = a + 2$, puis $f(a + 2) = 3$ et $f(3) = a + 3$. On voit se dessiner la conjecture suivante : $f(n) = a + n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- ✓ Prouvons-la par récurrence.
 - ✦ On a $f(0) = a$ par définition de a .
 - ✦ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(n) = n + a$. On a alors $f(n + a) = f(f(n)) = n + 1$ puis $f(n + 1) = n + 1 + a$ d'où la formule au rang n .
- ✓ Il reste à itérer du côté des entiers négatifs. On a $f(f(-1)) = 0$ d'où $f(f(f(-1))) = f(0) = a$. Or $f(f(f(-1))) = f(-1) + 1$ d'où $f(-1) = a - 1$. On a donc $f(f(-2)) = -1$ d'où

$$f(f(f(-2))) = f(-1) = a - 1 = f(-2) + 1$$

puis $f(-2) = a - 2$. On démontre facilement par récurrence la relation générale $f(n) = a + n$ pour tout entier n négatif.

- ✓ Voici donc le résultat de la synthèse : les seules solutions potentielles sont les fonctions de la forme $f : n \mapsto n + a$ où a est une constante appartenant à $\mathbb{Z}$.

✕ **Synthèse.** Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = n + a$. On a $f(f(n)) = f(n + a) = n + a + a = n + 2a$. On en déduit que $2a = 1$ ce qui est absurde car $a \in \mathbb{Z}$.

✕ **Conclusion.** Il n'existe donc aucune solution.

1.2. Une rédaction épurée

On peut rédiger notre solution de façon plus élégante.

- ✕ Le principe est de remarquer que nous avons à chaque fois appliqué deux fois la fonction f . Faisons-le directement pour un entier relatif n quelconque :

$$f((f \circ f)(n)) = f(n+1) = (f \circ f)(f(n)) = f(n) + 1$$

La suite $(f(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est donc arithmétique de raison 1. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) = f(0) + n$.

- ✕ Posons $a := f(0)$. On a alors $f(f(n)) = f(n+a) = n+a+a = n+2a$. On en déduit que $2a = 1$ ce qui est absurde car $a \in \mathbb{Z}$.

II. Un petit défit sans filet

Entrenez-vous sur l'exercice suivant :

Polytechnique PC-2011

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telles que $\forall n \in \mathbb{Z}, f(f(n)) = n+2$.