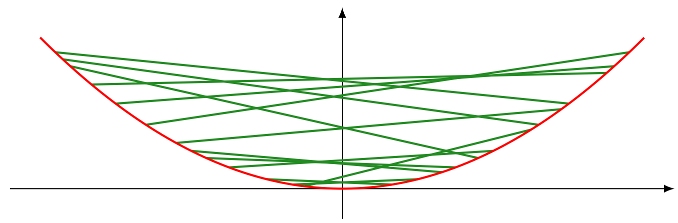
AN 6 | Fonctions convexes

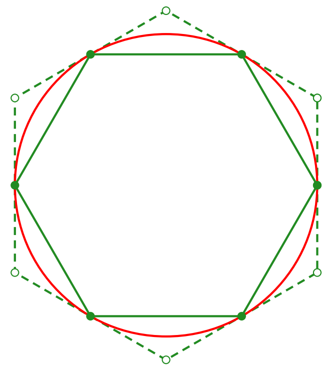
Nous poursuivons le cours d'analyse par la notion de convexité, qui a lentement émergé dans l'histoire, jusqu'à devenir un outil puissant et très largement étudié depuis le XX^e siècle.



La première occurence historique de l'idée de convexité semble remonter à **Archimède**, vers 250 avant Jésus-Christ. Le savant de Syracuse a introduit cette notion afin de justifier le calcul des ses approximations de π au moyen de polygones convexes.

Illustration du principe des approximations de π obtenues par Archimède (cf. la gravure ci-contre datant du XVI^e siècle) au moyen d'un argument de convexité.

Le savant affirma qu'une courbe convexe contenue à l'intérieur d'une autre courbe convexe $\mathscr{C}$ a une longueur inférieure à celle de $\mathscr{C}$.



Après avoir été utilisées par quelques précurseurs tels que **Hermite**, **Hölder** et **Stolz**, les fonctions convexes sont devenues l'objet d'une étude spécifique depuis les travaux de **Jensen**. Au cours du XX^e siècle, la notion de convexité a été progressivement généralisée à différents cadres : l'analyse fonctionnelle géométrique, l'optimisation non-linéaire, l'analyse convexe, etc.

Hermite

Hölder

Jensen

Elle compte de nombreuses applications tant théoriques (le théorème de projection sur un convexe fermé par exemple) que pratiques (citons les innombrables algorithmes d'optimisation très largement utilisés de nos jours).

Le thème des fonctions convexes a été popularisé par le célèbre ouvrage *Inequalities* publié en 1934 par **Hardy**, **Littlewood** et **Pólya**, maintes fois réédité et qui reste une référence inégalée jusqu'à nos jours.

Le succès de la notion de convexité tient à sa profonde interaction avec la géométrie et l'analyse, elle a fourni de nombreuses inégalités en analyse (dans des cadres variés) et en géométrie. Elle admet de nombreuses ramifications qui la rendent toujours d'actualité dans la recherche contemporaine.

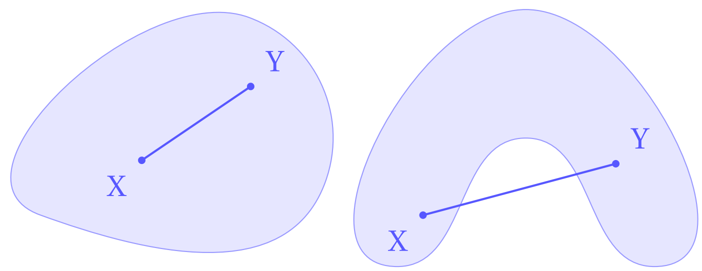
1. Introduction à la convexité

Dans ce qui suit on identifie $\mathbb{R}^2$ au plan et, pour tout couple de points (X, Y), on note $[X, Y]$ le segment joignant X et Y.

Définition 6.1. Parties convexes de $\mathbb{R}^2$

Soit $A \subset \mathbb{R}^2$. *On dit que* A *est convexe si*

$$\forall (X, Y) \in A^2,\ [X, Y] \subset A$$



La partie de gauche est convexe mais pas celle de droite.

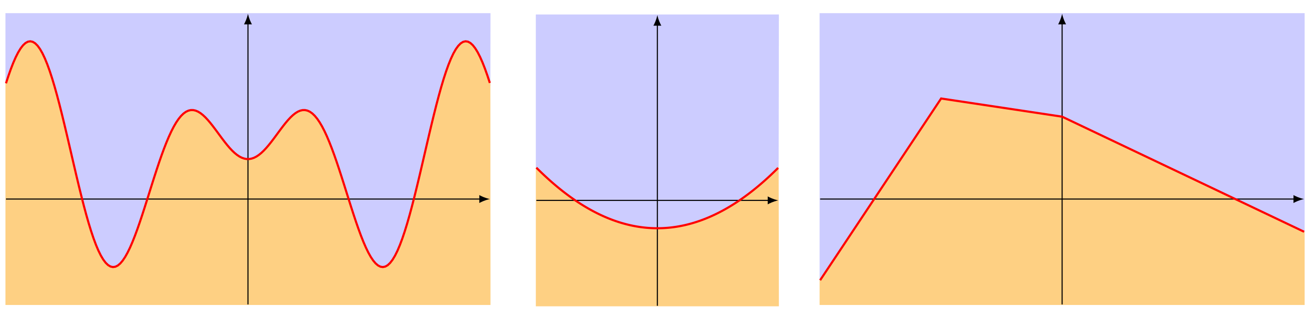
Définition 6.2. Fonction convexe

Soit I *un intervalle de* $\mathbb{R}$. *Une fonction* $f : I \to \mathbb{R}$ *est dite convexe si l'ensemble suivant est convexe*

$$epi\ f := \left\{(x, y) \in I \times \mathbb{R}\,;\ y \geqslant f(x)\right\} \quad \textit{(épigraphe de } f\textit{)}$$

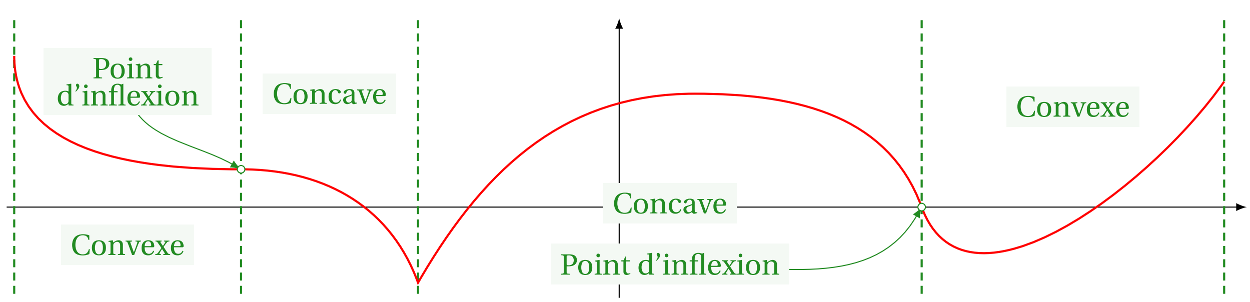
La fonction f *est dite concave si son hypographe* $hyp\ f := \left\{(x, y) \in I \times \mathbb{R}\,;\ y \leqslant f(x)\right\}$ *est convexe.*

Dans les figures ci-dessous, les graphes, épigraphes et hypographes sont respectivement représentés en rouge, bleu et vert.



Les fonctions représentées sont, de gauche à droite, ni convexe ni concave, convexe et concave.

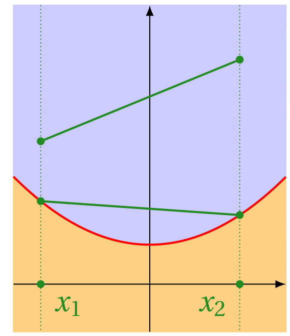
Une fonction peut admettre des convexités différentes selon l'intervalle auquel on la restreint. Un point où la fonction change de convexité est appelé point d'inflexion.



Il n'est pas difficile de caractériser les fonctions convexes au moyen de leurs cordes.

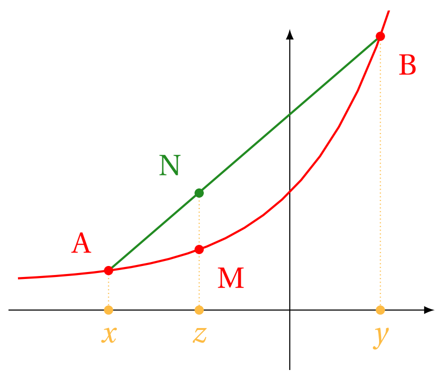
En effet, tout épigraphe E vérifie la propriété suivant

$$\forall (x,y)\in \mathrm{E},\ \forall y'\in\mathbb{R},\ y'\geqslant y \implies (x,y')\in \mathrm{E}$$



De façon plus imagée : tout point « *au-dessus* » d'un point de E appartient aussi à E. On en déduit qu'une fonction $f : \mathrm{I}\to\mathbb{R}$ est convexe *si et seulement si* toutes ses cordes sont situées au-dessus de son graphe (pour montrer que le segment « du haut » est inclus dans epi f, il suffit d'établir que celui « du bas » est inclus dans epi f).

Nous allons commencer par trouver une formulation analytique équivalente à cette définition.



Soit $f : \mathrm{I}\to\mathbb{R}$ (avec I vrai intervalle), $(x,y)\in\mathrm{I}^2$ tels que $x\leqslant y$. Fixons z dans $[x,y]$. Celui s'écrit $z=\lambda x+(1-\lambda)y$ où $\lambda\in[0,1]$.

Il s'agit de comparer les points $\mathrm{M}\big(z,f(z)\big)$ du graphe de f et $\mathrm{N}(z,w)$ de la corde [AB]. Celle-ci est d'équation $\mathrm{Y}=\alpha\mathrm{X}+\beta$, d'où

$$w = \alpha z+\beta = \lambda(\alpha x+\beta)+(1-\lambda)(\alpha y+\beta) = \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

Ainsi, la convexité de f sur I est caractérisée par :

$$\forall (x,y)\in\mathrm{I}^2,\ \forall\lambda\in[0,1],\ f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

En explicitant l'équation de la corde [AB] sous la forme

$$\mathrm{Y} = \underbrace{\frac{f(y)-f(x)}{y-x}}_{\text{=pente de (AB)}}\times\underbrace{\quad(\mathrm{X}-x)\quad}_{x\text{ =abscisse de A}}+\underbrace{\quad f(x)\quad}_{\text{f(x)=ordonnée de A}}\qquad\left(\begin{array}{l}\text{Droite passant par A}\big(x,f(x)\big)\\[2ex]\text{et de pente }\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}\end{array}\right)$$

on obtient une autre caractérisation de la convexité :

$$\forall (x,y)\in\mathrm{I}^2,\ \forall z\in[x,y],\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)+f(x)\geqslant f(z)$$

Définition 6.3. **Fonction convexe** (↯ **6.1. et 6.2.**)

Soit I *un vrai intervalle de* $\mathbb{R}$. *Une fonction* $f : \mathrm{I}\to: \mathrm{R}$ *est dite :*

▷ *convexe si* $\forall (x,y)\in\mathrm{I}^2,\ \forall\lambda\in[0,1],\ f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\leqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f\big(y\big)$, *ce qui équivaut à*

$$\forall (x,y)\in\mathrm{I}^2,\ \forall z\in[x,y],\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)+f(x)\geqslant f(z)$$

▷ *concave si* $\forall (x,y)\in\mathrm{I}^2,\ \forall\lambda\in[0,1],\ f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\geqslant\lambda f(x)+(1-\lambda)f\big(y\big)$, *ce qui équivaut à*

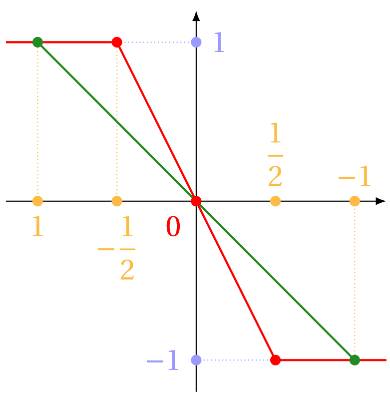
$$\forall (x,y)\in\mathrm{I}^2,\ \forall z\in[x,y],\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x)+f(x)\leqslant f(z)$$

Il est clair que f est concave si et seulement si $-f$ *convexe.*

On déduit directement de la définition géométrique qu'une fonction est concave et convexe *si et seulement si* elle est affine.

Continuons par quelques exemples et contre-exemples de fonctions convexes. Pour $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, la fonction $f : x\longmapsto |ax+b|$ est convexe. En effet, pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in[0,1]$

$$\begin{aligned} f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big) &= \big|a\lambda x+a(1-\lambda)y+b\big| = \big|\lambda(ax+b)+(1-\lambda)(ay+b)\big| \\ &\leqslant \big|\lambda(ax+b)\big|+\big|(1-\lambda)(ay+b)\big| = \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \quad \text{(par l'inégalité triangulaire)} \end{aligned}$$



Considérons la fonction $h : x\longmapsto \left|x-\dfrac{1}{2}\right|-\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$ définie sur $\mathbb{R}$. On a

$$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x\leqslant -\dfrac{1}{2} \\ -2x & \text{si } \dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2} \\ -1 & \text{si } x\geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Puisque la corde joignant les points d'abscisses -1 et 1 n'est ni au-dessus, ni au-dessous de la courbe, la fonction h n'est ni convexe, ni concave [1].

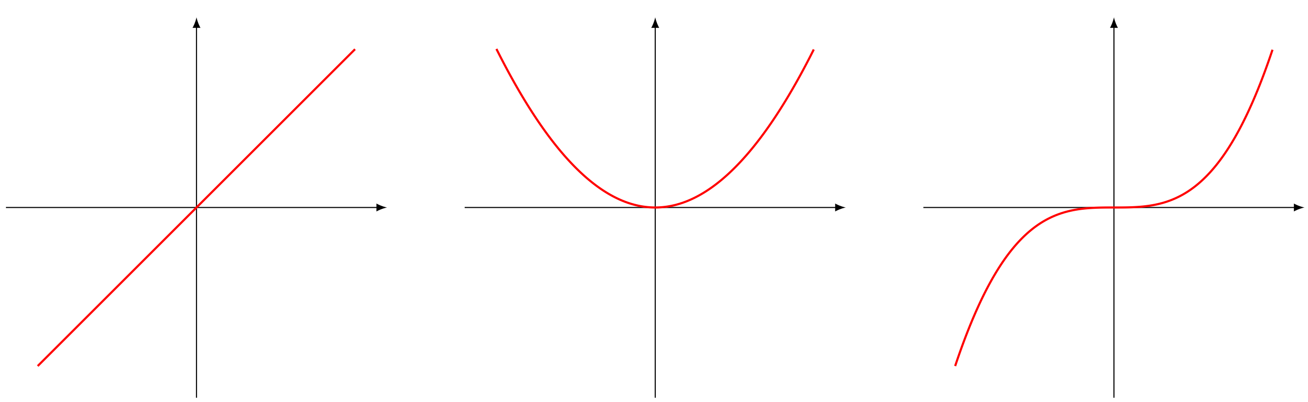
La fonction $g : x\longmapsto x^2$ est convexe car

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \forall \lambda\in[0,1],\ g\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)-\lambda g(x)-(1-\lambda)g(y) = \lambda(1-\lambda)(x-y)^2 \geqslant 0$$

La fonction $x\longmapsto \dfrac{1}{x}$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ car

$$\forall (x,y)\in\,]0,+\infty[^2,\ \forall z\in[x,y],\ \frac{\frac{1}{y}-\frac{1}{x}}{y-x}(z-x)+\frac{1}{x}-\frac{1}{z} = \frac{(z-x)(y-z)}{xyz} \geqslant 0$$

Quelques propriétés s'imposent comme des évidences : si f est convexe, alors λf est convexe si $\lambda\in\mathbb{R}_+$, concave si $\lambda\in\mathbb{R}_-$. La somme de deux fonctions convexes est convexe. Le produit de deux fonctions convexes ne l'est pas nécessairement : les fonctions $f : x\longmapsto x$ et $g : x\longmapsto x^2$ sont convexes sur $\mathbb{R}$ mais par leur produit.



Sous réserve d'existence, la composée $f\circ g$ deux fonctions convexes est convexe dans le cas où f est croissance. En reprenant les notations de la définition, ceci se démontre par l'implication suivante :

1. Elle est en fait concave sur $\left]-\infty,-\frac{1}{2}\right]$ et convexe sur $\left[-\frac{1}{2},+\infty\right[$.

$$g\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\leqslant \lambda g(x)+(1-\lambda)g(y) \implies$$
$$(f\circ g)\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big) \underset{\substack{\uparrow\\ f\text{ croissante}}}{\leqslant} f\big(\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)\big) \underset{\substack{\uparrow\\ f\text{ convexe}}}{\leqslant} \lambda(f\circ g)(x)+(1-\lambda)(f\circ g)(y)$$

Si $f:\mathrm{I}\to\mathrm{J}$ est convexe, bijective et strictement croissante (resp. décroissante), alors f^{-1} est concave (resp. convexe). En effet, avec les notations de la définition :

$$f\big(\lambda x+(1-\lambda)y\big)\leqslant \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \implies$$
$$\underbrace{\lambda x+(1-\lambda)y}_{\lambda f^{-1}\left(f(x)\right)+(1-\lambda)f^{-1}\left(f(y)\right)} \leqslant f^{-1}\big(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\big)$$

et on conclut en remarquant que tout élément de J s'écrit sous la forme $f(z)$ avec $z\in\mathrm{I}$ par surjectivité de f.

En général, la composée de deux fonctions convexes ne l'est pas : $x\mapsto x^2$ et $x\mapsto -x$ sont convexes sur $\mathbb{R}$ mais pas $x\mapsto -x^2$.

2. Caractérisation de la convexité par les pentes

En observant la figure ci-dessous, on conjecture facilement les deux caractérisations suivantes de la convexité :

Proposition 6.4. (Caractérisation de la convexité par les pentes) (↯ **6.3.**)
Soit I un vrai intervalle et $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

a) f est convexe ;

b) Pour tout $(a,b,c)\in\mathrm{I}^2$ tel que $a<b<c$, on a

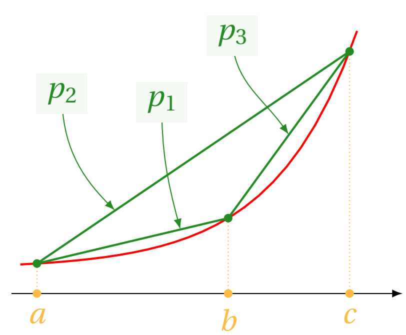
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\leqslant\frac{f(c)-f(a)}{c-a}\leqslant\frac{f(c)-f(b)}{c-b}$$

c) Pour tout a dans I, le taux d'accroissement $\tau_a:\mathrm{I}\setminus\{a\}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissant.

L'équivalence de a) et b) est connue sous l'appellation « lemme des trois pentes » et se retient facilement au moyen de la figure ci-contre :

$$p_1\leqslant p_2\leqslant p_3$$

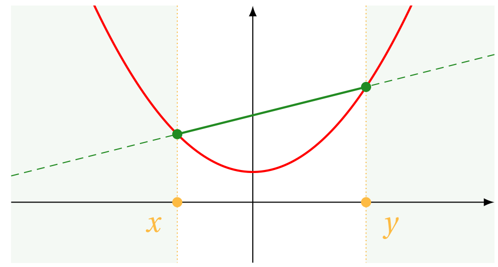
Ces propriétés des pentes nous permettrons de faire le lien entre la courbe et ses tangentes en cas de dérivabilité de la fonction.



On déduit de cette caractérisation la position relative du graphe d'une fonction convexe avec l'une de ses sécantes *en-dehors* de la corde portée par celle-ci.

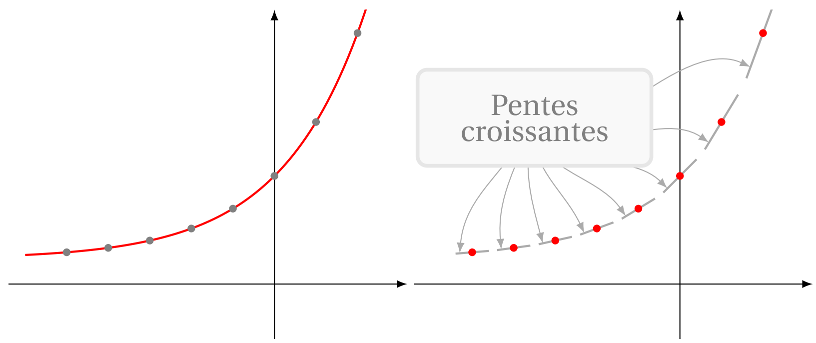
Supposons que f soit convexe sur un intervalle I et fixons $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ tel que $x < y$.

La droite passant par les points de la courbe de f d'abscisses x et y (on parle de sécante, à bien distinguer d'une corde qui est un segment) est en-dessous de la courbe sur les intervalles $]-\infty, x] \cap \mathrm{I}$ et $[x, +\infty[\cap \mathrm{I}$.



3. Caractérisation des fonctions convexes dérivables

En observant le graphe d'une fonction convexe et dérivable, on conjecture qu'une fonction dérivable sur un vrai intervalle I est convexe *si et seulement si* sa dérivée est croissante (cf. l'échantillon de tangentes représenté ci-contre).



Proposition 6.5. (Caractérisation des fonctions dérivables convexes) (↯ **6.4. et 6.5.**)
Soit I un vrai intervalle et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$.

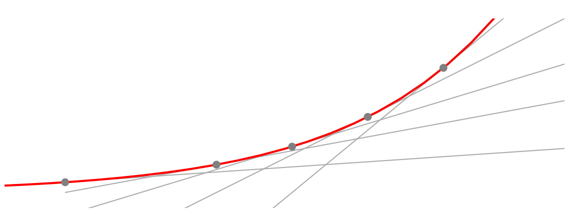
a) Si f est dérivable sur I, alors f est convexe *si et seulement si* f' est croissante.

b) Si f est deux fois dérivable sur I, alors f est convexe *si et seulement si* $f'' \geqslant 0$.

On adapte ces énoncés au cas concave : si f est dérivable, f est concave *si et seulement si* f' décroissante, et si f est deux fois dérivable, f est concave *si et seulement si* $f'' \leqslant 0$.

Cette proposition permet d'établir très efficacement la convexité d'une fonction deux fois dérivable. Par exemple, le logarithme est concave sur $\mathbb{R}_+^*$ et l'exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$ car

$$\forall x > 0,\ \ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \exp'(x) = \exp(x) > 0$$



La convexité d'une fonction dérivable peut être caractérisée au moyen des positions relatives de sa courbe et ses tangentes.

Proposition 6.6. (Convexité et tangentes)
Soit I un vrai intervalle et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable.
La courbe de f est située au-dessus de ses tangentes sur I *si et seulement si* f est convexe.

En reprenant les notations et les hypothèses de cette proposition, on a donc pour $x_0 \in \mathrm{I}$:

$$\forall x \in \mathrm{I},\ f(x) \geqslant f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

(la tangente en x_0 a pour équation $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$)

On retrouve ainsi les inégalités usuelles sur l'exponentielle ($x_0 = 0$) et le logarithme ($x_0 = 1$) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1+x \quad \text{et} \quad \forall x > 0,\ \ln x \leqslant x-1$$

4. Inégalités de convexité

La définition analytique de la convexité admet une généralisation très utile à n points réels. Avant de l'énoncer, il nous faut étendre la définition d'une combinaison linéaire convexe de deux à un nombre fini quelconque de termes. Pour un entier naturel n non nul et des réels $x_1, \ldots, x_n$, on appelle combinaison linéaire convexe de $x_1, \ldots, x_n$ tout réel de la forme

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \quad \text{où} \quad (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

Il n'est pas difficile de démontrer que l'ensemble des combinaisons linéaires convexes des nombres $x_1, \ldots, x_n$ est l'intervalle

$$\left[\min_{1\leqslant i\leqslant n} x_i,\ \max_{1\leqslant i\leqslant n} x_i,\right]$$

En particulier, si les x_i appartiennent à un même intervalle I, il en est de même de toutes leurs combinaison linéaires convexes. Afin de parfaire son intuition, le lecteur aura intérêt à interpréter une combinaison linéaire convexe comme une moyenne pondérée à coefficients positifs et dont la somme vaut 1.

Proposition 6.7. (Inégalité de Jensen) (↯ **6.6.**)

Soit I un vrai intervalle et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ convexe. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{I}^n$ et tout $(\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$, on a

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k)$$

En particulier $f\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$. En cas de concavité, l'inégalité est dans l'autre sens.

Le logarithme étant concave sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et n réels strictement positifs x_1, $\ldots$, x_n, on a

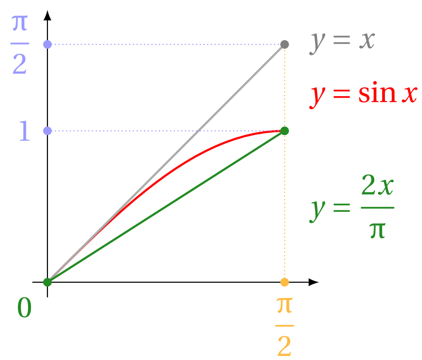
$$\ln \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln x_k}{n} \leqslant \ln\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{n}\right)$$

d'où par croissance de l'exponentielle $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$. (↯ **6.7.**)

On retrouve l'inégalité arithmético-géométrique, qui reste valable si l'un des x_k est nul.

La convexité est une puissante pourvoyeuse d'inégalités

On dispose de la définition et sa généralisation par Jensen, des inégalités sur les pentes, de la comparaison du graphe aux cordes et aux tangentes en cas de dérivabilité. Il est facile de comparer une fonction convexe et une fonction affine.



Comme $\sin'' = -\sin$, le sinus est concave sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

En considérant la tangente à l'origine et la corde joignant les extrémités de courbe du sinus aux bornes de cet intervalle, on en déduit que

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \ \frac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$$

L'inégalité AG $uv \leqslant \frac{u^2+v^2}{2}$ pour $(u,v) \in \mathbb{R}_+^2$ admet une généralisation à $(p,q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$:

$$\forall (u,v) \in \mathbb{R}_+^2, \ uv \leqslant \frac{u^p}{p} + \frac{u^q}{q} \quad \text{(Inégalité de Young)}$$

Elle est banale si $u = 0$ ou $v = 0$, et sinon elle découle de la concavité et la stricte croissance du logarithme :

$$\underbrace{\frac{\ln u^p}{p} + \frac{\ln v^q}{q}}_{= \ln uv} \leqslant \ln\left(\frac{u^p}{p} + \frac{u^q}{q}\right)$$

On en déduit une généralisation de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \forall (a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}_+^{2n}, \ \sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \quad \text{(Inégalité de Hölder)}$$

Cette inégalité est banale si tous les a_i ou tous les b_i sont nuls. Dans le cas contraire, on conclut en posant $u_i := \frac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ et $v_i := \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et en appliquant l'inégalité de Young :

$$\sum_{i=1}^n u_i v_i \leqslant \frac{1}{p} \frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{\sum_{i=1}^n a_i^p} + \frac{1}{q} \frac{\sum_{i=1}^n b_i^p}{\sum_{i=1}^n b_i^p} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

5. Compléments sur les fonctions convexes

5.1. Stricte convexité

Une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, où I est un vrai intervalle de $\mathbb{R}$, est dite strictement convexe si toutes ses cordes ouvertes sont strictement situées au-dessus de sa courbe représentative.

Définition 6.8. **Fonction strictement convexe**

Soit I *un vrai intervalle de* $\mathbb{R}$. *Une fonction* $f : \mathrm{I} \to: \mathrm{R}$ *est dite :*

- ▷ *strictement convexe si pour tout* $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ *tel que* $x \neq y$ *,*

$$\forall \lambda \in]0,1[\,,\ f\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f\left(y\right)$$

  ce qui équivaut à

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2\,,\ x < y \implies \forall z \in]x,y[\,,\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) + f(x) \geqslant f(z)$$

- ▷ *concave si pour tout* $(x, y) \in \mathrm{I}^2$ *tel que* $x \neq y$ *,*

$$\forall \lambda \in]0,1[\,,\ f\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \geqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f\left(y\right)$$

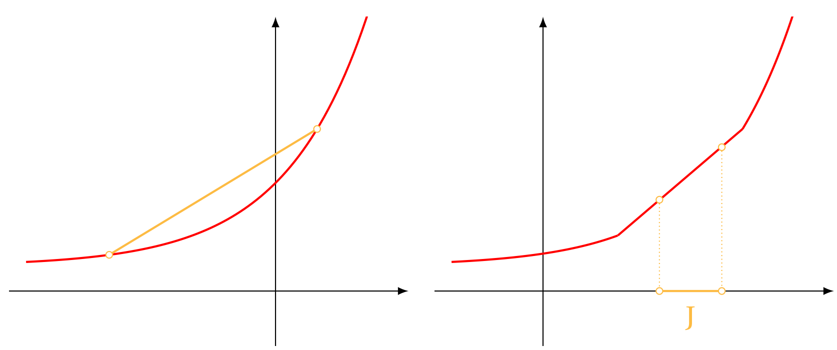
  ce qui équivaut à

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2\,,\ x < y \implies \forall z \in [x,y]\,,\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x}(z-x) + f(x) \leqslant f(z)$$

Proposition 6.9. (Fonctions convexes mais pas strictement)

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ convexe. La fonction f n'est pas strictement convexe *si et seulement si* il existe $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, intervalle ouvert non vide, tel que $f|_{\mathrm{J}}$ soit affine.

Une fonction strictement convexe (toutes les cordes ouvertes sont situées strictement au-dessus du graphe) et une autre convexe mais pas strictement (il existe une portion affine non réduite à un point dans le graphe, celui-ci admet une « facette »).



On en déduit facilement que :

- ▷ Une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable est strictement convexe *si et seulement si* f' est croissante et il n'existe aucun $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, intervalle ouvert non vide, tel que $f'|_{\mathrm{J}}$ soit constante.
- ▷ Une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable est strictement convexe *si et seulement si* $f'' \geqslant 0$ et il n'existe aucun $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, intervalle ouvert non vide, tel que $f''|_{\mathrm{J}}$ soit nulle.

Les énoncés concernant les opérations sur les fonctions convexes se généralisent facilement aux fonctions strictement convexes.

5.2. Régularité d'une fonction convexe

Nous avons justifié que $x \mapsto |x|$ (définie sur $\mathbb{R}$) est une fonction convexe ; nous savons depuis la chapitre AN 4 qu'elle n'est pas dérivable en 0 mais admet des dérivées à gauche et à droite en ce point. Dans le théorème suivant, nous allons démontrer que l'existence de dérivées latérales se généralise à toute fonction convexe sur l'intérieur de son intervalle de définition.

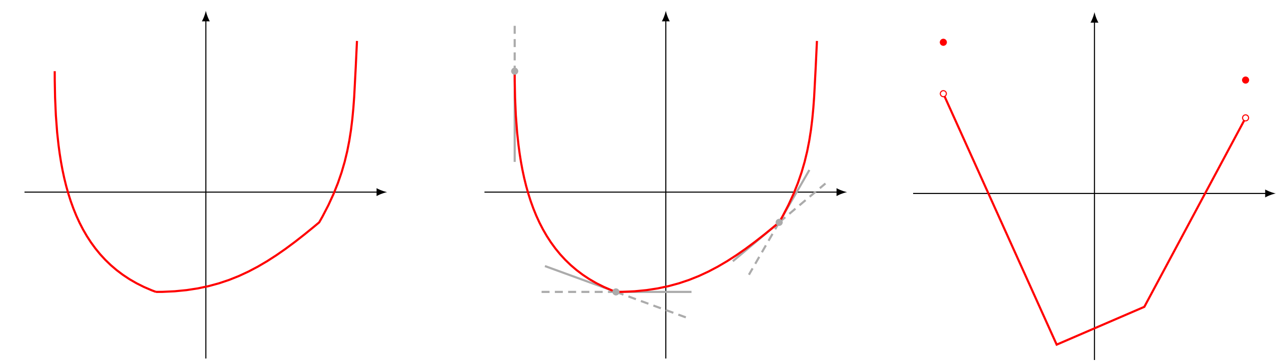
Proposition 6.10. (Régularité d'une fonction convexe)

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe définie sur un vrai intervalle I de $\mathbb{R}$.

a) f est dérivable à gauche et à droite en tout point intérieur x_0 à I et $f'_g(x_0) \leqslant f'_d(x_0)$.

b) En particulier, f est continue en tout point intérieur à I.

On remarquera qu'une fonction convexe sur un intervalle I peut ne pas être continue en une borne de I lorsqu'elle y est définie, et peut le cas échéant ne pas y être dérivable (tangente verticale).

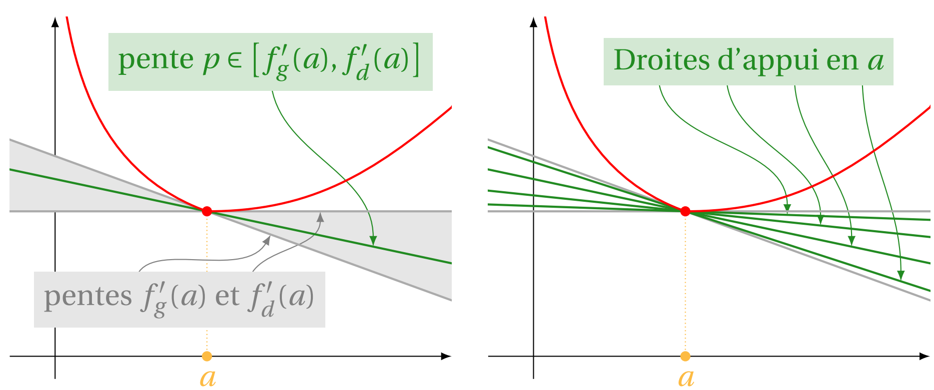


Définition 6.11. **Droite d'appui**

Soit I *un vrai intervalle,* $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ *une fonction convexe et* $a \in \mathrm{I}$*. On appelle droite d'appui en a au graphe de f toute droite passant par* $\big(a, f(a)\big)$ *et située sous le graphe de* f*.*

Proposition 6.12. (Droites d'appui d'une fonction convexe)

Soit I un vrai intervalle, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et a un point intérieur à I. La droite passant par le point $\big(a, f(a)\big)$ et de pente $p \in \mathbb{R}$ est une droite d'appui au graphe de f en ce point *si et seulement si* $f'_g(a) \leqslant p \leqslant f'_d(a)$.



On peut démontrer l'inégalité de Jensen au moyen d'une droite d'appui. Reprenons les notations de cette proposition. Considérons une droite d'appui pour f au point d'abscisse

$$a := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$$

Son équation s'écrit $y = p(x-a) + f(a)$. Pour tout indice i dans $[\![1, n]\!]$, on a $f(x_i) \geqslant (x_i - a) + f(a)$ d'où $\lambda_i f(x_i) \geqslant \lambda_i (x_i - a) + \lambda_i f(a)$ puis

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \big(\lambda_i (x_i - a) + \lambda_i f(a)\big) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - a + f(a) = f(a)$$

6. Tests

6.1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ convexe sur $[0,1[$. Peut-on affirmer que f est convexe sur $[0,1]$?

6.2. Soit $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ convexes. Les fonctions $\inf(f,g)$ et $\sup(f,g)$ sont-elles convexes ?

6.3. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\tau_0 : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ soit croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Peut-on en déduire que f est convexe ?

6.4. Montrer que $f : x \mapsto \ln\ln x$ est concave sur $]1,+\infty[$.

6.5. Soit $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fois dérivables telles que $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1)$ et $f'' \leqslant g''$. Démontrer que $f \leqslant g$.

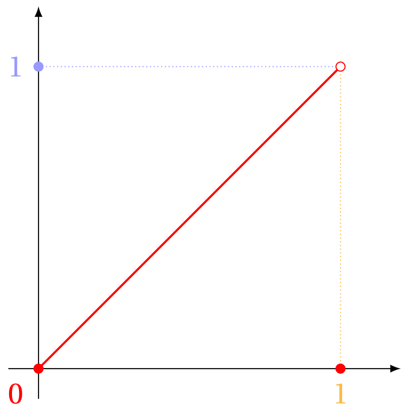
6.6. Démontrer que pour tous réels a, b et c, on a $(a+b+c)^4 \leqslant 27\big(a^4+b^4+c^4\big)$.

6.7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ strictement positifs. Démontrer que

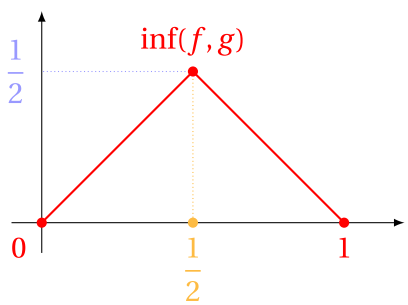
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n$$

7. Solutions des tests

6.1. Non. Comme l'illustre le contre-exemple suivant :



6.2. La réponse est négative pour $\inf(f,g)$ comme le prouve le contre-exemple de $\mathrm{I} := [0,1]$, $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto 1-x$:



Nous allons établir que $h := \sup(f,g)$ est convexe. Pour $(x,y) \in \mathrm{I}^2$ et $\lambda \in [0,1]$. Notons $z_\lambda := \lambda x + (1-\lambda)y$. On a

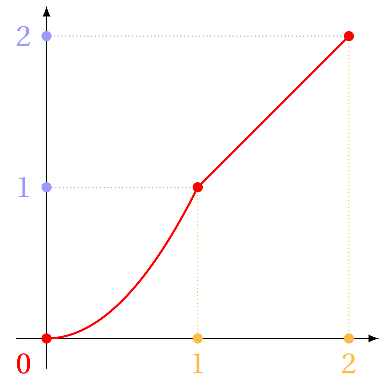
$$\begin{cases} \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y) \\ \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y) \end{cases}$$

car λ et $1-\lambda$ sont positifs. On en déduit que d'où

$$\begin{cases} f(z_\lambda) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y) \\ g(z_\lambda) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y) \end{cases}$$

$$h(z_\lambda) \leqslant \lambda h(x) + (1-\lambda) h(y)$$

6.3. Non, comme l'illustre le contre-exemple suivant :



6.4. La fonction f est deux fois dérivable sur $]1,+\infty[$ en tant que composée de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$. De plus,

$$\forall x > 1,\ f''(x) = -\frac{1+\ln x}{(x \ln x)^2} < 0$$

Ainsi f est concave sur $]1,+\infty[$.

6.5. La fonction $h := g - f$ est convexe car $h'' = f'' - g'' \geqslant 0$. Le graphe de h est donc sous la corde joignant les points d'abscisses 0 et 1. Comme $h(1) = h(0) = 0$, on en déduit que $h \leqslant 0$ d'où $f \leqslant g$.

6.6. L'inégalité équivaut à

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \leqslant \frac{a^4+b^4+c^4}{3}$$

et découle de la convexité de $f : x \mapsto x^4$ sur $\mathbb{R}$ (on vérifie sans peine que f est deux fois dérivable et $f'' \geqslant 0$).

6.7. Posons $x_{n+1} := x_1$. On applique l'inégalité AG :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}} \geqslant \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} \frac{x_k}{x_{k+1}}} = 1$$