AN 3 | Fonctions numériques

Après les suites numériques, nous allons poursuivre le cours d'analyse par l'étude des fonctions à variable et valeurs réelles.

DANS l'introduction historique du cours sur les suites numériques, nous avons eu l'occasion de mentionner les nombreuses méthodes d'approximation mises au point dès l'antiquité, en particulier celles d'**Archimède** pour le calcul approché d'aires ou encore des premières décimales de π.

Cependant, un gouffre sépare ces idées d'approximation et la notion de limite, le pas à franchir consistant à concevoir *une infinité* d'approximations.

Newton

L'invention du calcul différentiel au XVII^e siècle par **Newton** et **Leibniz** fut le premier moment de l'histoire des Mathématiques où l'idée de limite apparut.

Newton utilisa la notion de *fluxion* d'une quantité *fluente* : on dirait de nos jours *vitesse* d'une quantité *variable*, ou encore dérivée d'une fonction.

Cependant, il ne fonda pas rigoureusement ce calcul des fluxions en se contentant d'évoquer « un quotient de quantités infinitésimales (i.e. infiniment petites) », véritable ancêtre de la limite du taux d'accroissement.

D'Alembert

Ce manque de formalisme fut critiqué dans le pamphlet *The Analyst, a discourse adressed to an infidel mathematician* que **George Berkeley** publia en 1734 contre l'usage de ces quantités infimitésimales fait par **Edmond Halley**, qui fut le premier à diffuser les idées de **Newton**.

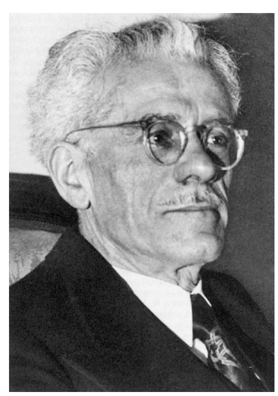
À la fin du XVIII^e siècle, **D'Alembert** tenta de préciser l'usage de ces infinitésimaux, avant que **Cauchy** et **Weierstrass** n'en donne des définitions plus précises au XIX^e siècle.

Afin de généraliser la notion de limite à d'autres cadres que celui des nombres réels, il fallut s'affranchir de la relation d'ordre.

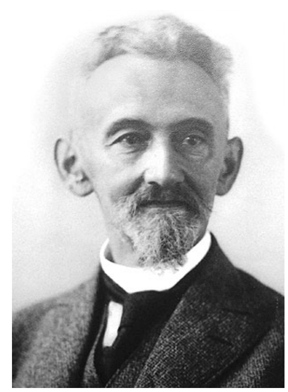
Une voie fructueuse consista à généraliser les notions de distance et de norme (**Fréchet**). Ce fut le point de départ de la topologie qui culmina en s'affranchissant de l'idée même de distance grâce aux définitions de **Hausdorff**.

D'Alembert

Weierstrass



Fréchet



Hausdorff

1. Vocabulaire et notations usuelles sur les fonctions numériques

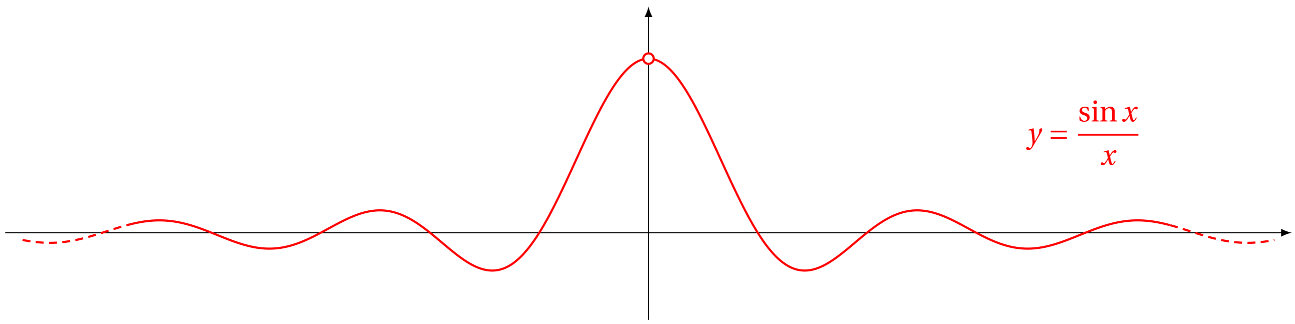
Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On rappelle que les notions de fonctions et d'applications sont synonymes [1].

1.1. Courbe représentative d'une fonction

La courbe représentative d'une fonction est un objet essentiel pour l'appréhender intuitivement.

Définition 3.1. Courbe représentative d'une fonction numérique

Soit $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ *avec* $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$ *et* $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}$, *et* $(\mathrm{O}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$ *un repère du plan. On appelle courbe représentative de* f *dans ce repère l'ensemble des points de coordonnées* $\big(x, f(x)\big)$ *pour* $x \in \mathrm{A}$.



1.2. Opérations sur les fonctions

Le lecteur est renvoyé au cours de théorie de ensembles (ALG 2) pour la définition et les propriétés de la composition des fonctions.

Nous rappelons simplement que, pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$ définies sur un ensemble *quelconque* $\mathscr{D}$, on peut construire les deux opérations usuelles.

Définition 3.2. Combinaisons linéaires et produit

Soit $\mathscr{D}$ *un ensemble quelconque,* $f : \mathscr{D} \to \mathbb{K}$, $g : \mathscr{D} \to \mathbb{K}$ *deux applications et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *On définit* $f+g$, fg *et* λf *par :*

$$f+g : \begin{array}{rcl} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x)+\lambda g(x) \end{array} \quad , \quad fg : \begin{array}{rcl} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & f(x)g(x) \end{array} \quad \text{et} \quad \lambda f : \begin{array}{rcl} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array}$$

On étend ces définitions par récurrence à n fonctions $f_1, \ldots, f_n$ *définies sur* $\mathscr{D}$ *avec les notations*

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} f_k$$

Toute fonction de la forme

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k \quad \text{avec} \quad (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$$

est appelée une combinaison linéaire des fonctions $f_1, \ldots, f_{n-1}$ et f_n.

1. Conformément aux programmes de CPGE.

1.3. Fonctions majorées, minorées, bornées et monotonie

Le vocabulaire des suites lié à la relation d'ordre $\leqslant$ s'étend aux fonctions numériques avec à la clé des théorèmes analogues (limite monotone, encadrement etc.).

Définition 3.3. **Fonctions majorées, etc.**

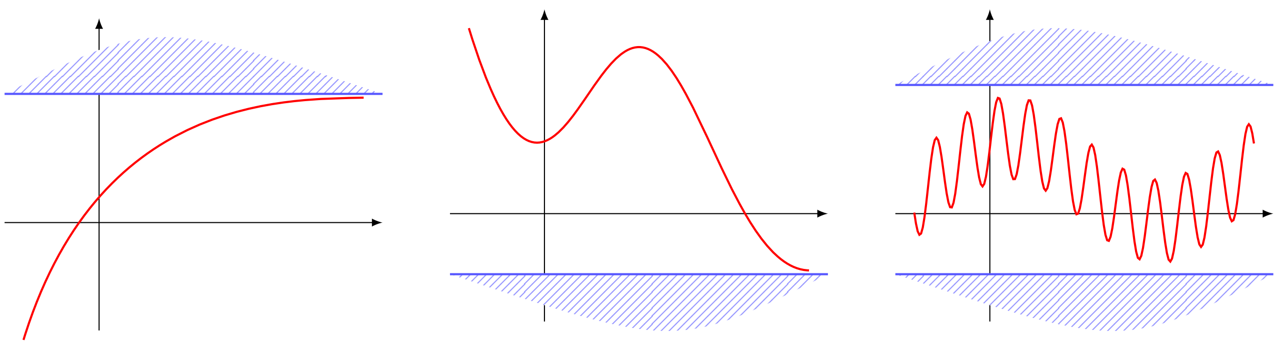
Une fonction $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ *est dite :*

- ▷ *majorée si* $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{A},\ f(x) \leqslant \mathrm{M}$.
- ▷ *minorée si* $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathrm{A},\ m \leqslant f(x)$.
- ▷ *bornée si* $|f|$ *est majorée sur* A.

On étend naturellement ces définitions à une partie Δ *de* A*. Par exemple,* f *est dite bornée sur* Δ *si* $f|_\Delta$ *est bornée.*

Une fonction est : majorée (resp. minorée) *si et seulement si* son graphe est contenu dans un demi-plan horizontal inférieur (reps. supérieur), bornée *si et seulement si* son graphe est contenu dans une bande horizontale, *si et seulement si* elle est majorée et minorée.

Il est clair qu'une fonction $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ est majorée *si et seulement si* $f\langle \mathrm{A}\rangle$ est une partie majorée de $\mathbb{R}$.



Si $\Delta \neq \varnothing$ et f majorée sur Δ, on note

$$\sup_{x\in\Delta} f(x) := \sup f\langle\Delta\rangle \quad \text{(lorsque } \Delta \text{ est l'ensemble de départ de } f\text{, on notera plus simplement } \sup f\text{)}$$

On emploie une notation analogue pour la borne inférieure en cas d'existence.

Définition 3.4. **Extremum local, extremum global**

Soit $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ *définie sur une partie* A *de* $\mathbb{R}$ *et* $c \in \mathrm{A}$*. On dit que* f *admet en* c *:*

- ▷ *un maximum (resp. minimum) global si* $\forall x \in \mathrm{A},\ f(x) \leqslant f(c)$ *(resp.* $\geqslant$*).*
- ▷ *un extremum global si elle admet en ce point un maximum ou un minimum global.*
- ▷ *un maximum (resp. minimum) local s'il existe* $\mathrm{V} \in \mathscr{V}_c$ *tel que* $\forall x \in \mathrm{A} \cap \mathrm{V},\ f(x) \leqslant f(c)$ *(resp.* $\geqslant$*), ce qui équivaut à*

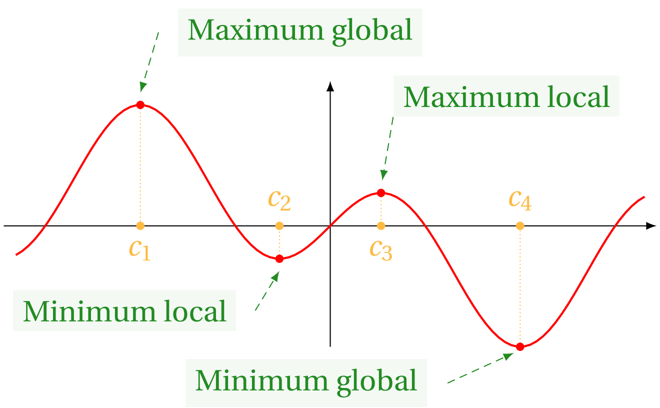
$$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathrm{A} \cap [c-\alpha, c+\alpha],\ f(x) \leqslant f(c) \quad \textit{(resp. } \geqslant\textit{)}$$

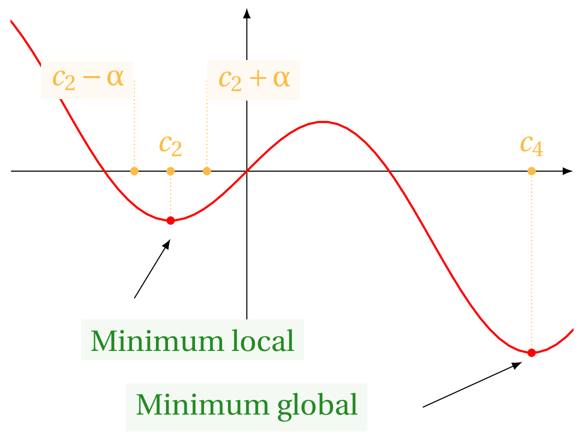
- ▷ *un extremum local si elle admet en ce point un maximum ou un minimum local.*

Pour $\Delta \subset \mathrm{A}$*, on dit que* f *admet un maximum sur* Δ *si* $f|_\Delta$ *admet un maximum. On adapte ce vocabulaire aux autres situations (minimum, maximum local, etc.). Sous réserve d'existence, on emploiera les notations*

Sous réserve d'existence, on emploiera les notations suivantes et leurs variantes :

$$\max_{x\in\Delta} f(x) := \max f\langle\Delta\rangle \quad \text{(lorsque } \Delta \text{ est l'ensemble de départ de } f\text{, on notera plus simplement } \max f\text{)}$$

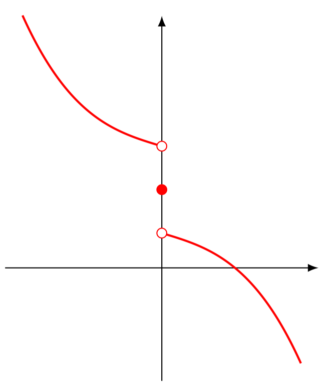


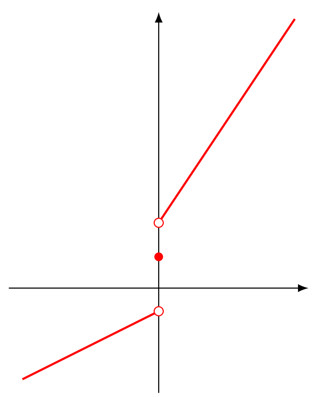


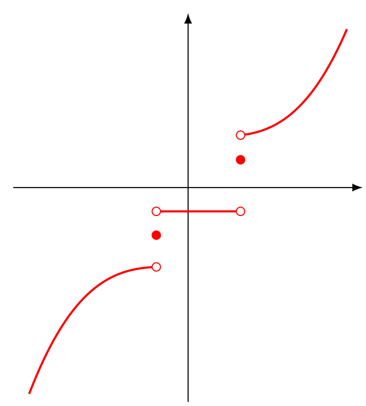
Définition 3.5. Fonctions monotones

Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ avec $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$; f est dite :

- ▷ *croissante sur $\mathscr{D}$ si, pour tout $(u,v) \in \mathscr{D}^2,\ u<v \implies f(u) \leqslant f(v)$;*
- ▷ *strictement croissante sur $\mathscr{D}$ si, pour tout $(u,v) \in \mathscr{D}^2,\ u<v \implies f(u) < f(v)$;*
- ▷ *décroissante sur $\mathscr{D}$ si, pour tout $(u,v) \in \mathscr{D}^2,\ u<v \implies f(u) \geqslant f(v)$;*
- ▷ *strictement décroissante sur $\mathscr{D}$ si, pour tout $(u,v) \in \mathscr{D}^2,\ u<v \implies f(u) > f(v)$;*
- ▷ *monotone (resp. strictement monotone) sur $\mathscr{D}$ lorsque f est croissante sur $\mathscr{D}$ ou décroissante sur $\mathscr{D}$ (resp. strictement croissante sur $\mathscr{D}$ ou strictement décroissante sur $\mathscr{D}$) ;*
- ▷ *constante sur $\mathscr{D}$ si, pour tout $(u,v) \in \mathscr{D}^2,\ f(u) = f(v)$;*







Si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ (avec I vrai intervalle) est monotone mais pas strictement, alors f admet au moins un palier, ie. $\exists \mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ vrai intervalle tel que f soit constante sur J.

On déduit de ces définitions quelques propriétés évidentes telles que la somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissantes) est croissante (resp. décroissante), et l'on peut conclure à une stricte croissance (resp. décroissance) dans le cas où l'une des deux fonctions est strictement croissante (resp. décroissante). Lorsqu'une composée $f \circ g$ est bien définies, les deux fonctions étant définies sur une partie de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles, on déduit directement des définitions que

$$f \text{ et } g \text{ sont monotones de même monotonie} \implies f\circ g \text{ est croissante}$$
$$f \text{ et } g \text{ sont monotones de monotonies contraires} \implies f\circ g \text{ est décroissante}$$

En effet, dans le cas où f et g sont décroissantes et croissantes, on a pour tout u et v dans l'ensemble de définition de g :

$$u \leqslant v \implies g(u) \leqslant g(v) \implies f\big(g(u)\big) \geqslant f\big(g(v)\big)$$

Il faut faire attention au signe des fonctions dans le cas des produits : le produit de deux fonctions *positives* monotones de même monotonie a la même monotonie que chacune des fonctions.

Transmutation des hypothèses par passage à l'opposé ou l'inverse

Pour une fonction $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ où A et B sont des parties de $\mathbb{R}$:

▷ f croissante équivaut à $-f$ décroissante, f est majorée équivaut à $-f$ minorée.

▷ Dans le cas où $f > 0$, f est croissante équivaut à $\frac{1}{f}$ décroissante, f majorée équivaut à $\frac{1}{f}$ minorée.

Ces propriétés élémentaires permettent d'optimiser certaines démonstrations en ramenant l'étude d'un cas à un autre déjà étudié.

1.4. Parité, périodicité, translation et dilatation d'un graphe

Les notions de parité et de périodicité nécessitent quelques clarifications sur les propriétés géométriques des ensembles de définition.

Définition 3.6. Partie symétrique par rapport à 0, partie stable par T-translation

Soit $\mathrm{T} \in \mathbb{R}$. *Une partie* $\mathscr{D}$ *de* $\mathbb{R}$ *est dite :*

▷ *symétrique par rapport à* 0 *si* $\forall x \in \mathscr{D},\ -x \in \mathscr{D}$.

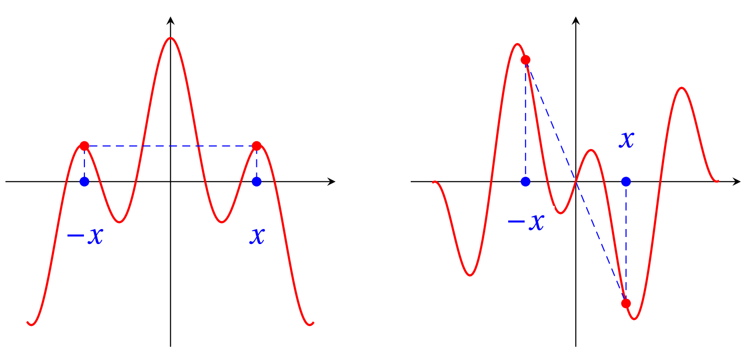
▷ *stable par* T*-translation si* $\forall x \in \mathscr{D},\ x \in \mathscr{D} \iff x + \mathrm{T} \in \mathscr{D}$.

Les notions de parité et d'imparité permettent de simplifier l'étude d'une fonction.

Définition 3.7. Parité d'une fonction

Soit $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ *une fonction définie sur* $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}$ *symétrique par rapport à* 0. *La fonction* f *est dite :*

a) paire si $\forall x \in \mathscr{D},\ f(-x) = f(x)$; *b) impaire si* $\forall x \in \mathscr{D},\ f(-x) = -f(x)$.



La fonction f est paire (resp. impaire) *si et seulement si* son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (resp. O).

Dans ce cas, il *suffit* de construire sur $\mathscr{D} \cap [0, +\infty[$ et de *compléter* la figure par la bonne symétrie pour obtenir la courbe sur $\mathscr{D}$.

On déduit directement des définitions que, en supposant qu'elle soit définie, la composée de deux fonctions paires ou impaires est : paire si les deux fonctions sont paires ou de parités contraires, impaire si les deux fonctions sont impaires. Supposons par exemple que f et g soient respectivement paire et impaire. Pour tout x appartenant à l'ensemble de définition de g :

$$(f\circ g)(-x) = f\big(g(-x)\big) = f\big(-g(x)\big) = f\big(g(x)\big) = (f\circ g)(x)$$

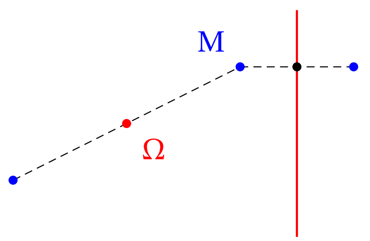
On généralise facilement ces deux propriétés à une axe vertical et un centre de symétrie quelconque. Pour Δ d'équation $x = c$:

le graphe de f est symétrique par rapport à Δ *si et seulement si* $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = f(2c-x)$

En effet, le symétrique de $\mathrm{M}(x,y)$ par rapport à Δ est $\mathrm{M}(2c-x,y)$. Pour un point $\Omega(a,b)$ du plan :

le graphe de f est symétrique par rapport à Ω *si et seulement si* $\forall x\in\mathbb{R},\ 2b-f(x) = f(2a-x)$

car le symétrique de $\mathrm{M}(x,y)$ par rapport à Ω est $\mathrm{M}(2a-x,2b-y)$. Ces deux calculs reposent sur le fait que le milieu de $[\mathrm{MM}']$ où $\mathrm{M}(x,y)$ et $\mathrm{M}'(x',y')$ est le point de coordonnées $\left(\frac{x+x'}{2},\frac{y+y'}{2}\right)$.



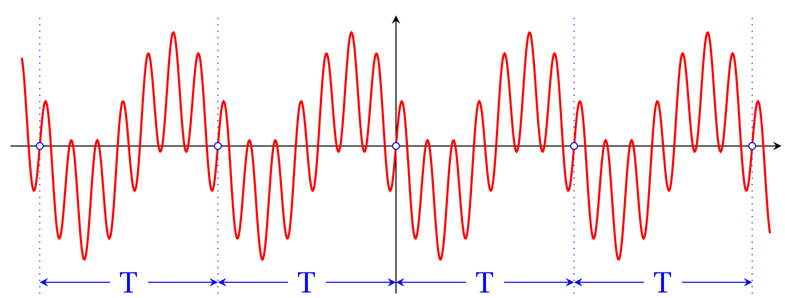
Le point M' est le symétrique de M par rapport à Δ *si et seulement si* $y' = y$ et le milieu de $[\mathrm{MM}']$ appartient à Δ, ce qui équivaut à $y' = y$ et $\frac{x+x'}{2} = c$, i.e. $y' = y$ et $x' = 2c-x$.

Le point M' est le symétrique de M par rapport à Ω *si et seulement si* Ω est le milieu de $[\mathrm{MM}']$, ce qui équivaut à $\frac{x+x'}{2} = a$ et $\frac{y+y'}{2} = b$, i.e. $y' = 2b-y$ et $x' = 2a-x$.

Définition 3.8. Fonctions périodiques

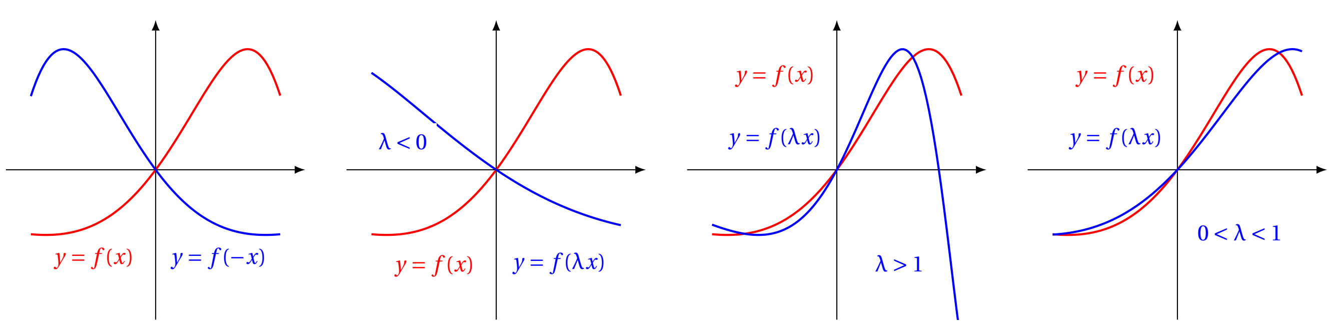
Une fonction $f:\mathscr{D}\to\mathbb{R}$ *est dite périodique si* $\exists\mathrm{T}>0$ *tq.* $\mathscr{D}$ *soit stable par* T*-translation et* $\forall x\in\mathscr{D}$, $f(x+\mathrm{T}) = f(x)$. *On dit que* f *est* T*-périodique et que* T *est une*[2] *période de* f.

Si une fonction f est T-périodique, alors son graphe s'obtient en traçant le graphe sur n'importe quel intervalle de longueur T (que l'on appelle aussi une « période ») puis en effectuant des translations de vecteurs $\mathrm{T}\mathbf{i}$, $2\mathrm{T}\mathbf{i}$, $3\mathrm{T}\cdot\mathbf{i}$, etc., $-\mathrm{T}\mathbf{i}$, $-2\mathrm{T}\mathbf{i}$, etc.



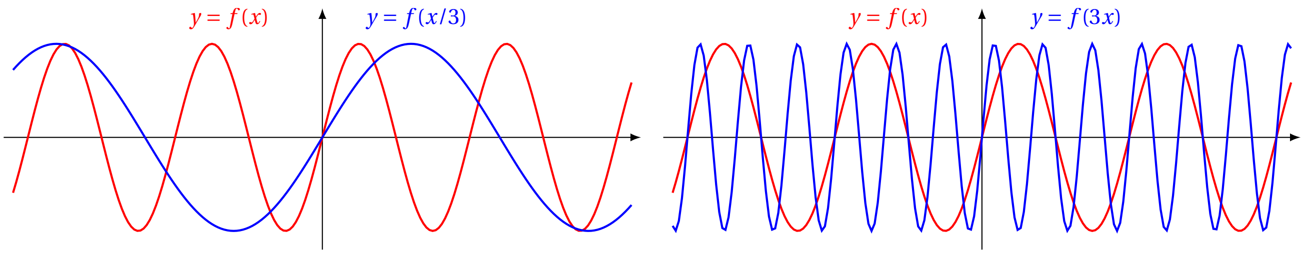
Plus généralement, il est intéressant d'étudier les modifications qu'une composition par une fonction affine apporte au graphe d'une fonction f. Comme $x\mapsto\lambda x+\tau$ est la composée (dans cet ordre) de la translation $x\mapsto x+\tau$ et de la dilatation $x\mapsto\lambda x$, il suffit d'étudier les modifications du graphe de f après composition à gauche (i.e. à l'arrivée) ou à droite (i.e. au départ) par chacune de ces transformations.

Une dilatation d'un facteur λ au départ a pour effet géométrique une dilatation du graphe selon $(\mathrm{O}x)$.

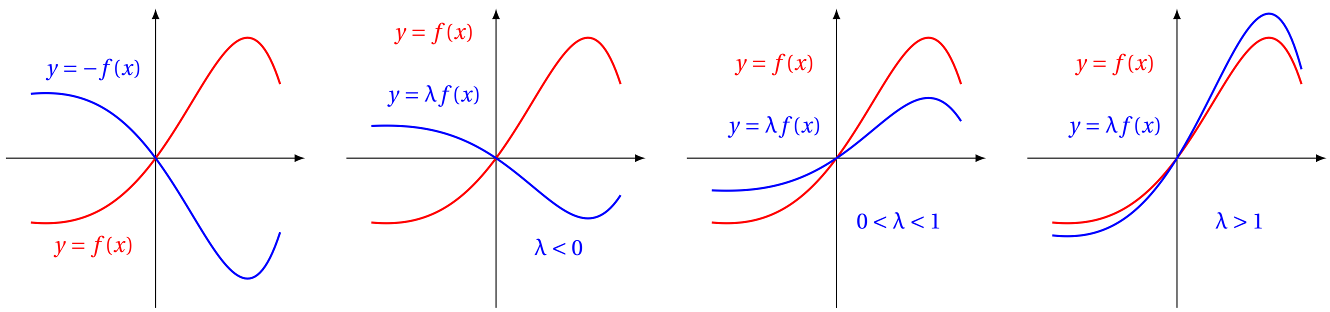


2. Une fonction T-périodique admet une infinité d'autres périodes, les nombres $n\mathrm{T}$ pour $n\in\mathbb{Z}^*$.

Dans le cas d'une fonction périodique, la nouvelle fonction est toujours périodique mais de fréquence différente.

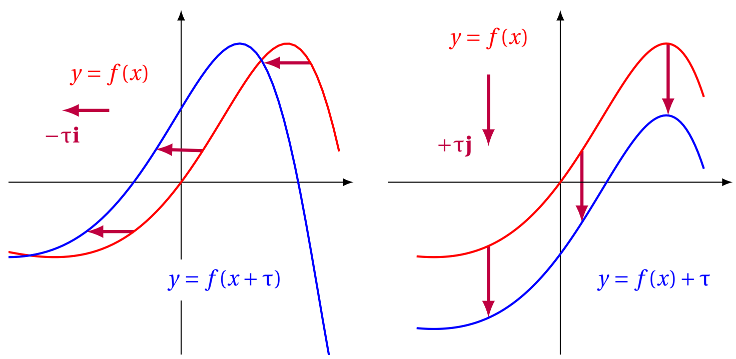


Une dilatation d'un facteur λ à l'arrivée a pour effet géométrique une dilatation du graphe dans la seule direction $(\mathrm{O}y)$.



Une translation de τ au départ a pour effet géométrique une translation de vecteur $-\tau\mathbf{i}$ du graphe de la fonction.

La même translation effectuée à l'arrivée a cette fois-ci pour effet géométrique une translation de vecteur $+\tau\mathbf{j}$ du graphe de la fonction.



2. Limite en un point de $\overline{\mathbb{R}}$

Nous avons introduit au chapitre AN 1 (plus particulièrement dans le paragraphe dédié à la topologie) les notions de voisinages et de point adhérent qui sont essentielles pour la généralisation de la définition de limite aux fonctions.

Pour $y \in \overline{\mathbb{R}}$, on notera $\mathscr{V}_y$ l'ensemble des voisinages de y.

Définition 3.9. Propriété vraie au voisinage d'un point ou au voisinage de l'infini

Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$, $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ *et* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *adhérent à* A. *Une propriété vérifiée par* f *est dite vraie au voisinage de* a *s'il existe* $\mathrm{V} \in \mathscr{V}_a$ *tel qu'elle soit vérifiée sur* $\mathrm{A} \cap \mathrm{V}$.

2.1. Définition de la limite

La notion de voisinage permet d'unifier les neufs cas de figure.

Définition 3.10. Limites

Soit $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$*,* $f : \mathrm{A} \mapsto \mathbb{R}$ *et* $a \in \overline{\mathbb{R}}$ *adhérent à* A.

- ▷ *On dit que* f *admet une limite en* a *si il existe* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ *tel que* $\forall \mathrm{V} \in \mathscr{V}_\ell,\ \exists \mathrm{U} \in \mathscr{V}_a,\ f(\mathrm{U} \cap \mathrm{A}) \subset \mathrm{V}$.
- ▷ *En cas d'existence,* ℓ *est unique. On note* $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$ *ou encore* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

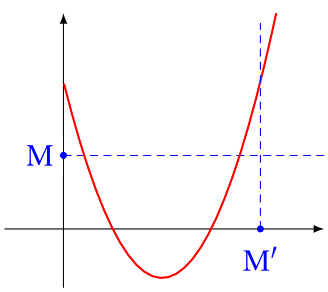
On déduit de la définition que, si f *est définie en* a *et admet une limite* ℓ *en* a*, alors* $\ell = f(a)$.

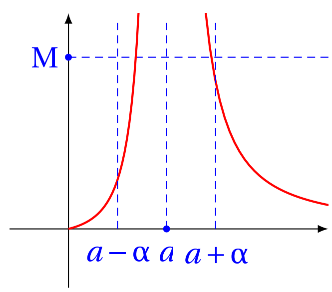
L'hypothèse d'adhérence de a à A est raisonnable (il serait absurde de chercher à définir la limite en -1 d'une fonction uniquement définie sur $\mathbb{R}_+$).

Comme dans le cas des suites numériques, cette définition admet une forme complètement quantifiée sans voisinages. Pour expliciter celle-ci, il faut cependant se placer dans l'un des neufs cas de figure (a fini ou ∞, idem pour ℓ). Par exemple, dans le cas où a et ℓ sont réels :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathrm{A} \cap [a-\alpha, a+\alpha],\ \left|f(x) - \ell\right| \leqslant \varepsilon$$

On remarque que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \iff f(x) - \ell \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \iff \left|f(x)\right| \xrightarrow[x \to a]{} 0$.



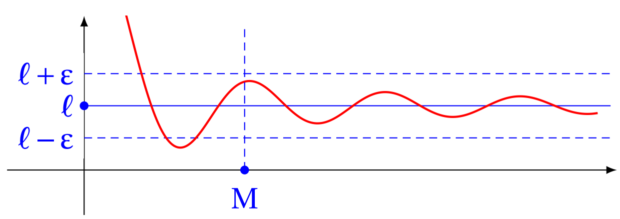


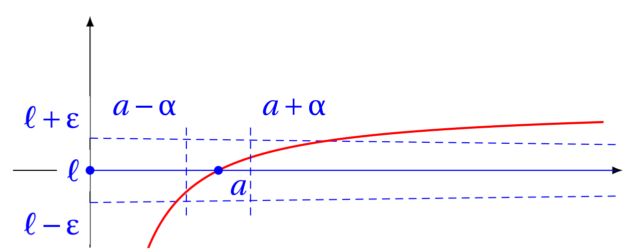
Limite $+\infty$ en $+\infty$:

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{M}' \in \mathbb{R},\ \forall x \geqslant \mathrm{M}',\ f(x) \geqslant \mathrm{M}$$

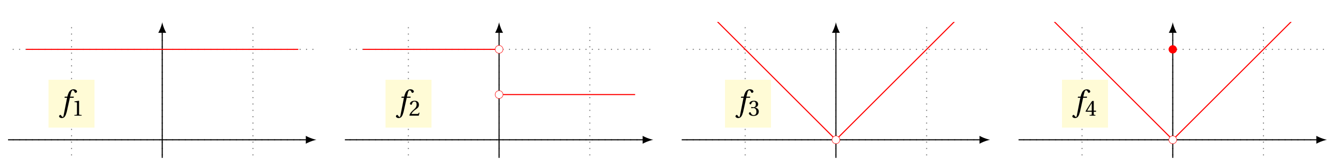
Limite $+\infty$ en $a \in \mathbb{R}$:

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \exists \alpha > 0,$$
$$\forall x \in \mathrm{A} \cap [a-\alpha, a+\alpha],\ f(x) \geqslant \mathrm{M}$$





Dans les fonctions ci-dessous, seules f_1 et f_3 admettent une limite en 0.



Proposition 3.11. Existence d'une limite finie et caractère localement borné

Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors f est bornée au voisinage de a.

2.2. Opérations sur les limites

Comme dans le cas des suites, les opérations sur les limites permettent d'éviter le recours à la définition dans de nombreux cas.

Proposition 3.12. Opérations sur les limites

Soit $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$, f et g des fonctions définies sur une partie A de $\mathbb{R}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A.
On suppose que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1$ et $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_2$.

a) On a $f(x)+g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1+\ell_2$ et $f(x)g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_1\ell_2$;

b) Si $\ell_1 \neq 0$, alors $\dfrac{1}{f(x)}$ est définie au voisinage de a et $\dfrac{1}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{1}{\ell_1}$ et $\dfrac{g(x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to a]{} \dfrac{\ell_2}{\ell_1}$.

Comme dans le cas des suites, des formes indéterminées apparaissent parfois en cas de limites infinies.

Proposition 3.13. Opérations sur les limites

On reprend les notations du 3.11. :

a) le comportement de $f(x)+g(x)$ au voisinage de a est décrit par le tableau suivant

ℓ_2 / ℓ_1	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_1+\ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
∞	$-\infty$	FI	$-\infty$

b) Si $\ell_1 = 0$ et f positive (resp. négative) au voisinage de a, alors $1/f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$ (resp. $-\infty$).

c) le comportement asymptotique de $f(x)g(x)$ est décrit par le tableau suivant

ℓ_2 / ℓ_1	>0	<0	0	$+\infty$	$-\infty$
>0	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
<0	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
0	0	0	0	FI	FI
$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

Le théorème de composition des limites, dispensable dans le cas des suites numériques, est essentiel dans le cadre des fonctions. Il permet de justifier le calcul suivant :

$$\text{Comme } e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0 \text{ et } -e^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty, \text{ on a } e^{-e^x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Proposition 3.14. (Théorème de composition des limites) (↯ **3.1.**)

Soit A et B deux parties de $\mathbb{R}$, $(a,b,\ell) \in \overline{\mathbb{R}}^3$ où a est adhérent à A et des fonctions $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{B} \to \mathbb{R}$ telles que $f(\mathrm{A}) \subset \mathrm{B}$, $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b$ et[3] $g(x) \xrightarrow[x\to b]{} \ell$. Alors $(g\circ f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

2.3. Limites latérales

On étend ici la notion de limite *en filtrant l'ensemble de définition* strictement à gauche ou à droite du point.

3. Ces hypothèses entraînent que b est adhérent à B.

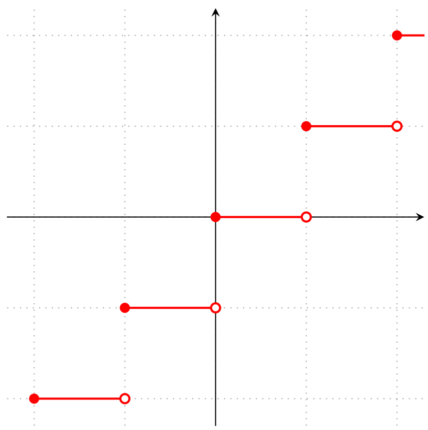
Définition 3.15. Limites à gauche et à droite (↯ **3.2.**)

Soit $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$*,* $a \in \mathbb{R}$ *et* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$*.*

- *Si* a *est adhérent à* $\mathrm{A} \cap]a, +\infty[$*, on dit que* f *admet* ℓ *pour limite à droite en* a *si* $f|_{\mathrm{A}\cap]a,+\infty[}$ *admet* ℓ *pour limite en* a*.*
- *Si* a *est adhérent à* $\mathrm{A} \cap]-\infty, a[$*, on dit que* f *admet* ℓ *pour limite à gauche en* a *si* $f|_{\mathrm{A}\cap]-\infty,a[}$ *admet* ℓ *pour limite en* a*.*
- *En cas d'existence, la limite à gauche est unique et l'on note* $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x < a}]{} \ell$ *ou* $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \ell$*.*

  De même à droite : $f(x) \xrightarrow[\substack{x \to a \\ x > a}]{} \ell$ *ou* $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \ell$

En cas d'existence la limite à droite (resp. à gauche) est également notée $f(x_0^+)$ *(resp.* $f(x_0^-)$*).*



Il est clair que a est adhérent à $\mathrm{A} \cap]a, +\infty[$ *si et seulement si* pour tout $\alpha > 0$, $\mathrm{A} \cap]a, a+\alpha[\neq \varnothing$.

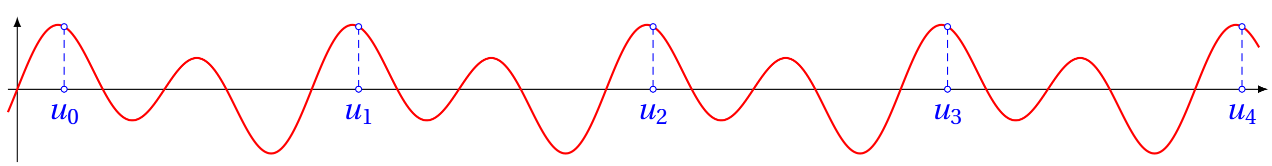
La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ admet une limite en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et n'admet aucune limite en un point de $\mathbb{Z}$.

Pour $n \in \mathbb{Z}$, cette fonction admet cependant des limites latérales en n valant respectivement n à droite et $n-1$ à gauche.

On remarquera que, contrairement à la définition générale de la limite en a, on « enlève » artificiellement le point a (on dit qu'on *épointe*) pour le calcul des limites latérales en ce point.

2.4. Le critère séquentiel

La connaissance du comportement asymptotique de $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *une suite particulière* de limite $+\infty$ ne suffit pas à déterminer celui de la fonction f en $+\infty$: tout comme la suite extraite $(a_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ par rapport à $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la donnée de $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ne représente qu'un échantillon de f en $+\infty$.



En revanche, la connaissance du comportement asymptotique $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ pour *toutes les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ permet de caractériser celui de f en $+\infty$.

Proposition 3.16. Critère séquentiel pour les limites

Pour $f : \mathrm{A} \mapsto \mathbb{R}$, $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A :

$$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell \iff \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}},\ a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \implies f(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

On adapte facilement ce résultat aux limites latérales. Ce critère permet de démontrer facilement qu'une fonction n'admet pas de limite en un point de $\overline{\mathbb{R}}$ donné.

Comment démontrer qu'une fonction n'admet pas de limite en un point de $\overline{\mathbb{R}}$?

- Il suffit de construire des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a telles que $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(f(v_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ aient des limites différentes.
- On peut aussi construire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite a telle que $\big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admette aucune limite.

En considérant la suite de terme général $u_n := \frac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$, qui est convergente de limite nulle, on démontre que la fonction

$$f : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin\dfrac{1}{x} \end{array} \quad \text{n'a pas de limite car } \big(f(u_n)\big)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'a pas de limite}$$

2.5. Limites et inégalités

Les théorèmes démontrés dans le cas des suites numériques se transposent sans peine au cas des fonctions.

Proposition 3.17. Passage à la limite dans une inégalité

Soit $(\ell_1,\ell_2)\in\mathbb{R}^2$ et $a\in\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. Si f et g sont deux fonctions définies sur A à valeurs réelles telles que $f(x)\leqslant g(x)$ au voisinage de a et si $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell_1$ et $g(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell_2$, alors $\ell_1\leqslant\ell_2$.

Comme dans le cas des suites, une inégalité stricte devient large à la limite : si $f(x)<k$ au voisinage de a et $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell$, alors $\ell\leqslant k$.

Proposition 3.18. (Inégalités asymptotiques connaissant la limite).

Soit $a\in\overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A, m et M deux nombres réels et $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$. Si $f(x)\xrightarrow[x\to a]{}\ell\in\mathbb{R}$ et $m<\ell<\mathrm{M}$, alors $m<f(x)<\mathrm{M}$ au voisinage de a.

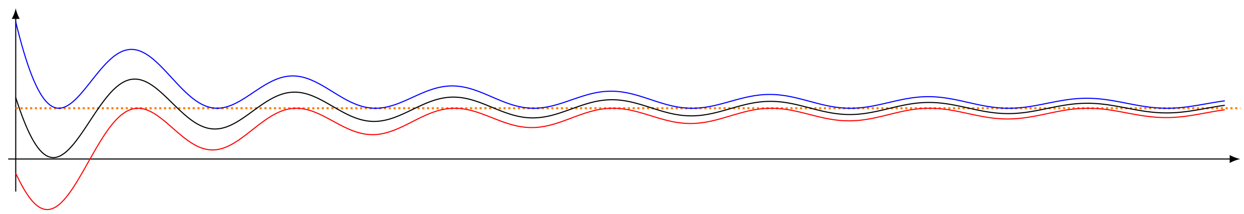
En particulier, si $\ell\neq 0$, alors f est du signe de ℓ au voisinage a.

3. Les grands théorèmes d'existence d'une limite

Les théorèmes d'encadrement et des suites monotones se généralisent sans peine au cas des fonctions.

3.1. Le théorème d'encadrement

Le théorème d'encadrement est géométriquement évident : les courbes représentatives des fonctions majorante et minorante forment « un entonnoir » dans lequel évolue la courbe de la fonction encadrée.



Proposition 3.19. (Théorème d'encadrement) (↯ 3.3.)
Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$ adhérent à A. Si f, g et h sont trois fonctions définies sur A à valeurs réelles telles que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ au voisinage de a et si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$ et $h(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$, alors $g(x) \xrightarrow[a\to a]{} \ell$.

Dans le cas où $\ell = +\infty$ (resp. $-\infty$), la minoration (resp. majoration) de f suffit à conclure. Ainsi, les inégalités

$$\forall t \in \mathbb{R},\ t-1 \leqslant t - \sin t \leqslant t+1$$

permet de conclure que $t - \sin t \xrightarrow[t\to-\infty]{} -\infty$ (par la majoration) et $t - \sin t \xrightarrow[t\to+\infty]{} +\infty$ (par la minoration).

3.2. Le théorème de la limite monotone

L'énoncé de ce théorème, dans le cadre fonctionnel, est plus délicat que son analogue séquentiel.

Théorème 3.20. (de la limite monotone)
Soit I un vrai intervalle et $f : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ croissante. On note $a = \inf \mathrm{I}$ et $b := \sup \mathrm{I}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$.

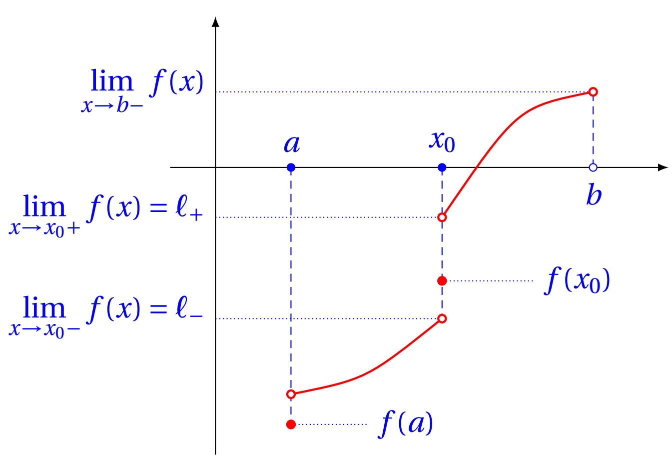
a) Si f est minorée (resp. majorée) sur I, alors f admet une limite réelle en a (resp. en b).

b) Si f est non minorée (resp. non minorée) sur I, alors f tend vers $-\infty$ en a (resp. vers $+\infty$ en b).

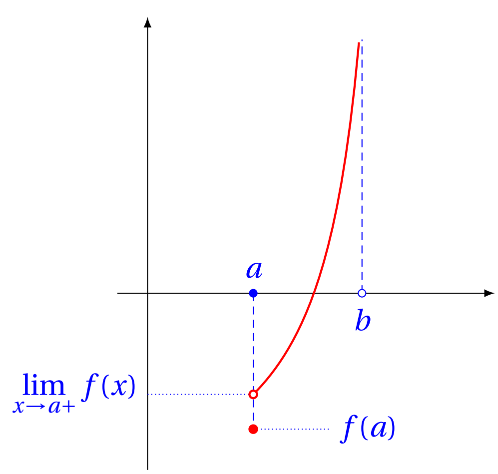
c) La fonction f admet des limites réelles ℓ_+ et ℓ_- à droite et à gauche en tout x_0 intérieur à I et

$$\ell_- \leqslant f(x_0) \leqslant \ell_+$$

Illustrons ce théorème dans le cas où $\mathrm{I} = [a, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$. La fonction admet une limite à gauche et à droite en tout point $x_0 \in]a, b[$.



Cas où f est majorée sur $[a, b[$: la fonction admet une limite réelle ℓ quand x tend vers b.



Cas où f est n'est pas majorée sur $[a, b[$: la fonction tend vers $+\infty$ quand x tend vers b.

4. Étude d'une bijection et de sa réciproque

Dans ce paragraphe, nous allons donner quelques pistes pour étudier les propriétés de la réciproque f^{-1} d'une bijection $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ (où A et B sont deux parties de $\mathbb{R}$).

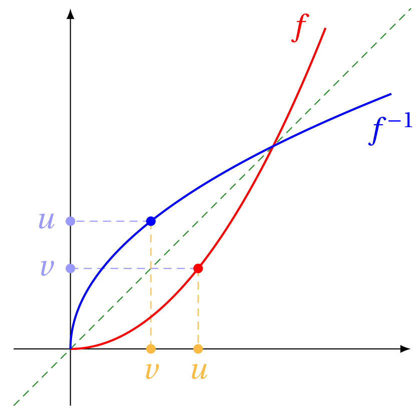
Représentations graphiques

On peut se faire une idée d'une bijection réciproque au moyen d'une figure : les représentations graphiques de f et f^{-1} se déduisent l'une de l'autre par la réflexion d'axe $\Delta : y = x$, droite appelée première bissectrice du repère.

Pour tout $u \in \mathrm{A}$, notons $v = f(u)$, de sorte que $u = f^{-1}(v)$.

Les points M et M′, de coordonnées (u, v) et (v, u), appartiennent aux courbes représentatives de f et de f^{-1}.

La symétrie d'axe $\Delta : y = x$ échangeant les points M et M′, les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à Δ, ce qui permet de construire le graphe de f^{-1} connaissant celui de f.



Imparités

Si la fonction f est impaire, alors f^{-1} est impaire. Supposons f impaire. Soit $y \in \mathrm{B}$. Pour vérifier que

$$f^{-1}(-y) = -f^{-1}(y)$$

il suffit, par injectivité de f, de démontrer que $f\big(f^{-1}(-y)\big) = f\big(-f^{-1}(y)\big)$. Or $f\big(f^{-1}(-y)\big) = -y$ et $f\big(-f^{-1}(y)\big) = -f\big(f^{-1}(y)\big) = -y$ par imparité de f.

Monotonies

Si la fonction f est strictement monotone, alors sa bijection réciproque f^{-1} est strictement monotone de même monotonie que f. Supposons par exemple f strictement croissante. Pour tout (b_1, b_2) dans B^2, l'implication

$$b_1 < b_2 \implies f^{-1}(b_1) < f^{-1}(b_2)$$

est vraie car sa contraposée $f^{-1}(b_1) \geqslant f^{-1}(b_2) \implies b_1 \geqslant b_2$ est vraie par croissance de f puisque $b_i = f\big(f^{-1}(b_i)\big)$ pour $i \in \{1, 2\}$.

Tableaux de variation

Si A est un intervalle, f est continue et strictement monotone, alors on déduit le tableau de variation de f^{-1} en inversant celui de f. Considérons par exemple le cas où f est strictement croissante et $\mathrm{A} = [a, b[$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Par le théorème de la limite monotone, f admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ en b. Par le théorème de la bijection, f réalise une bijection de $[a, b[$ sur $\big[f(a), \ell\big[$. Sa bijection réciproque étant strictement croissante, elle admet une limite L en ℓ. On déduit du théorème de composition des limites que

$$f^{-1}\big(f(x)\big) \xrightarrow[x \to b]{} \mathrm{L}$$

Comme $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$ pour tout x dans A, on déduit de l'unicité de la limite que $b = \mathrm{L}$. Ceci justifie que le tableau de variation de f^{-1} s'obtient en « inversant » celui de f :

x	a	b
$f(x)$	$f(a)$ $\nearrow$	ℓ ‖

x	$f(a)$	ℓ
$f^{-1}(x)$	a $\nearrow$	b ‖

On adapte facilement ce résultat aux autres situations (stricte décroissance, autre type d'intervalle que $[a,b[$).

5. Les fonctions usuelles

On commence par quelques rappels sur l'exponentielle et le logarithme.

5.1. Exponentielle et logarithme

La proposition suivante est admise (et sera justifiée plus tard dans le cours d'Analyse).

Définition 3.21. L'exponentielle

Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. On la note $\exp$.

On en déduit les propriétés suivantes.

Proposition 3.22. (Propriétés de l'exponentielle).

a) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$;

b) $\forall y \in \mathbb{R},\ \exp(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$;

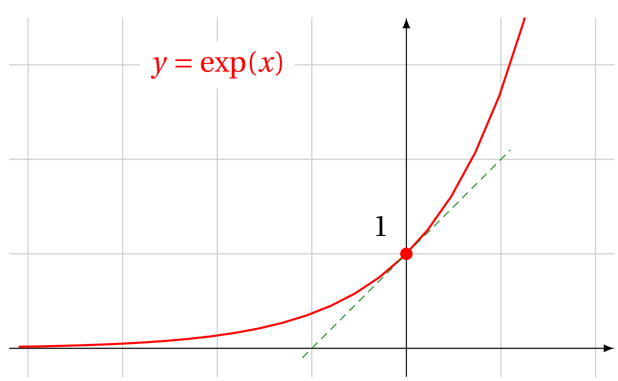
c) $\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(x) \geqslant 1 + x$;

d) $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \exp(-x) \leqslant \dfrac{1}{1+x}$;

e) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \exp(x-y) = \exp(x)/\exp(y)$.

On peut en déduire le tableau de variation de l'exponentielle puis tracer sa courbe représentative.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp(x)$	0 $\nearrow$	1 $\nearrow$	$+\infty$



La droite d'équation $y = 1 + x$ est tangente à la courbe de l'exponentielle au point de coordonnées $(0,1)$.

Définition 3.23. Nombre d'Euler e

Le nombre e est défini par $e = \exp(1)$. On dit encore que e est la base des logarithmes néperiens. On peut démontrer que $2{,}71 < e < 2{,}72$.

La notation e^x sera discutée un peu plus loin dans le paragraphe sur les fonctions puissances.

Nous introduisons à présent le logarithme népérien comme bijection réciproque de l'exponentielle.

Définition 3.24. **(Logarithme népérien).**
L'exponentielle réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$*. Sa bijection réciproque est appelée logarithme népérien et notée* $\ln$.

Nous avons déjà évoqué dans le chapitre ALG 0 la création des logarithmes par Neper comme moyen de transformer des produits en sommes.

Proposition 3.25. (Propriétés du logarithme neperien). ($\lightning$ **3.4.**)
Pour tous $(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et $n\in\mathbb{Z}$, on a

a) $\ln(xy)=\ln x+\ln y$

b) $\ln\sqrt{x}=\dfrac{\ln x}{2}$

c) $\ln x^{-1}=-\ln x$

d) $\ln x^n=n\ln x$

e) $\ln\dfrac{x}{y}=\ln x-\ln y$

Le logarithme neperien est l'unique primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1.

Proposition 3.26. (Dérivée du logarithme neperien)
La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x>0,\ \ln' x=\dfrac{1}{x}\cdot$

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln' x$	$\Vert$			$+$			
$\ln x$	$\Vert$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

La courbe représentative du logarithme peut s'obtenir en traçant la symétrique de celle de l'exponentielle par rapport à la droite d'équation $y=x$. Comme $\ln' 1=1$, la tangente au point $(1,0)$ est d'équation $y=x-1$. Le tableau de variation de ln s'obtient « en inversant » celui de l'exponentielle.

Proposition 3.27. (Comparaison). *a)* $\forall x>0, \ln x\leqslant x-1$; *b)* $\dfrac{\ln x}{x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0$; *c)* $x\ln x\xrightarrow[x\to0+]{}0$.

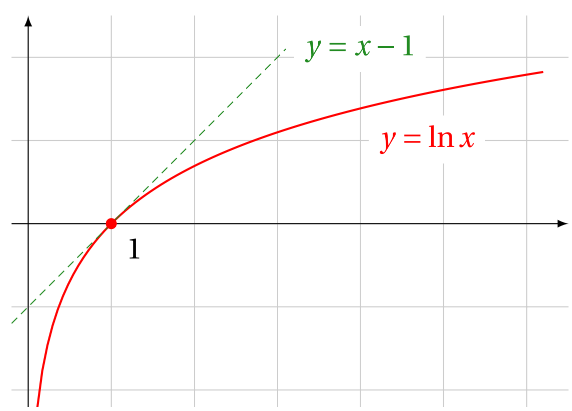
L'inégalité du a) nous apprend que le graphe du logarithme néperien est situé en-dessous de sa tangente au point de coordonnées $(1,0)$. C'est une inégalité classique de concavité sur laquelle nous reviendrons dans un chapitre ultérieur.

Le b) nous dit que lorsqu'un point se déplace sur cette courbe dans le sens des abscisses croissantes, son abscisse croît plus vite vers $+\infty$ que son ordonnée.

On en déduit l'allure de ce graphe à l'infini [4].

Il faut connaître l'approximation

$$0,69<\ln 2<0,70$$



4. On dit que le graphe présente une branche parabolique d'axe (Ox).

5.2. Racines et puissances

Le lecteur connaît bien ces définitions : $x^0 := 1$ pour $x \in \mathbb{R}$ et :

$$x^n := \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} \text{ pour } (x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^* \quad , \quad x^n := \left(\frac{1}{x}\right)^{-n} \quad \text{pour } (x,n) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{Z} \text{ tel que } n < 0$$

L'existence et l'unicité de la racine n-ème a été démontré dans le chapitre AN 1 et on en déduit le théorème suivant :

Définition 3.28. Racine n-ème

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $p_n : x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on note $\sqrt[n]{x} := p_n^{-1}(x)$; ce réel est appelé racine n-ème de x.

Autrement dit, $\sqrt[n]{x}$ est l'unique solution dans $\mathbb{R}_+$ de l'équation $y^n = x$. Lorsque n est impair, p_n réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, on peut donc aussi noter $\sqrt[n]{x}$ pour $x < 0$ dans ce cas.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout réel x strictement positif, on a vu que $\ln(x^n) = n \ln x$ d'où $x^n = \exp(n \ln x)$. C'est à partir de cette relation que l'on généralise la notion de puissance à des exposants quelconques.

Définition 3.29. Puissances

Pour $(x,\alpha) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on pose $x^\alpha := \exp(\alpha \ln x)$.

Pour $\alpha > 0$, on a $x^\alpha \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$, on prolonge naturellement[5] la fonction en 0 en posant $0^\alpha := 0$.

En se souvenant que $e := \exp 1$, on déduit de cette relation que $e^x = \exp(x \ln e) = \exp(x)$. Nous retrouvons ainsi la notation usuelle de l'exponentielle comme puissance du nombre e.

Proposition 3.30. *Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$.*

Cette définition permet de *prolonger* la notation x^α à des exposants α quelconque. En particulier, la racine n-ème d'un réel positif n'est autre que ce réel à la puissance $\frac{1}{n}$.

Proposition 3.31. (Propriétés des fonctions puissances).
Pour tous α, β dans $\mathbb{R}$, tous x, y dans $\mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$:

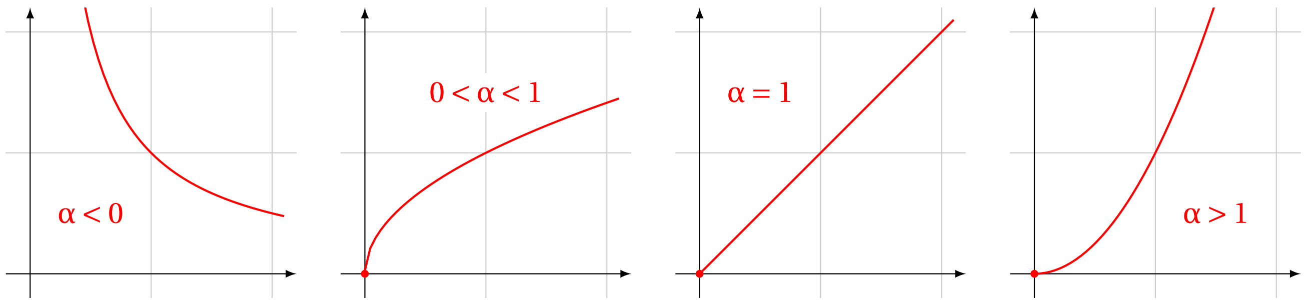
a) $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ b) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ c) $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$ d) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $x^\alpha = \exp(\alpha \ln x)$. On en déduit que, si $\alpha > 0$, alors $x \mapsto x^\alpha$ est strictement croissante en tant que composée de deux fonctions strictement croissantes, et si $\alpha > 0$, alors $x \mapsto x^\alpha$ est strictement décroissante en tant que composée d'une fonction strictement croissante et d'une fonction strictement décroissante. De plus, on a

$$x^\alpha = \exp(\alpha \ln x) \xrightarrow[x \to 0+]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha < 0 \\ 0 & \text{si } \alpha > 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{x^\alpha - 0^\alpha}{x - 0} = x^{\alpha-1} = \exp\big((\alpha-1)\ln x\big) \xrightarrow[x \to 0+]{} \begin{cases} +\infty & \text{si } 0 < \alpha < 1 \\ 1 & \text{si } \alpha = 1 \\ 0 & \text{si } \alpha > 1 \end{cases}$$

5. On parle de prolongement par continuité.

On en déduit que la fonction $x \longmapsto x^\alpha$ est dérivable en 0 si $\alpha \geqslant 1$ et non dérivable si $0 < \alpha < 1$ mais présentant une tangente verticale à l'origine dans ce cas.



5.3. Cosinus, sinus et tangente circulaires

On commence par quelques rappels sur les congruences angulaires. Dans ce paragraphe, le plan est supposé muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R}$.

Définition 3.32. La notation de congruence modulo φ

Soit $(a, b, \phi) \in \mathbb{R}^3$. On dit que a est congru à b modulo ϕ s'il existe un entier relatif k tel que $a = b + k\phi$. On écrit alors $a = b\,[\phi]$.

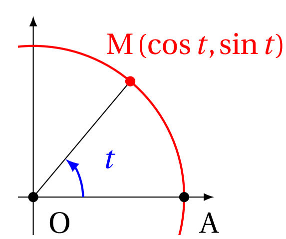
Proposition 3.33. (Règles de calcul sur les congruences).

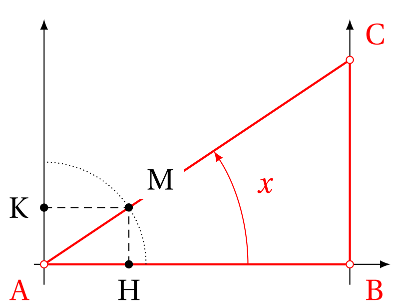
Pour tous nombres réels a, a', b, b' et ϕ et tout $\lambda \neq 0$:

a) $a = b\,[\phi] \iff a - b = 0\,[\phi]$; b) $a = b\,[\phi] \iff \lambda a = \lambda b\,[\lambda\phi]$;

c) $a = b\,[\phi]$ et $a' = b'\,[\phi] \implies a + a' = b + b'\,[\phi]$.

Soit $\mathscr{C}$ le cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$, $\mathrm{M} \in \mathscr{C}$ et $t = (\mathbf{OA}, \mathbf{OM})$. On rappelle que la mesure d'angle t est égale à la longueur algébrique de l'arc orienté $\overset{\frown}{\mathrm{OM}}$. Par définition du cosinus et du sinus, $(\cos t, \sin t)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $\mathscr{R}$. On en déduit les relations trigonométriques dans les triangles rectangles.





Considérons un triangle ABC rectangle en C. En choisissant des axes orientés, on déduit du théorème de Thalès :

$$\cos x = \frac{\overline{\mathrm{AH}}}{\mathrm{AM}} = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AC}} \quad \text{et} \quad \sin x = \frac{\overline{\mathrm{AK}}}{\mathrm{AC}} = \frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\mathrm{AC}}$$

d'où $\tan x = \dfrac{\overline{\mathrm{BC}}}{\overline{\mathrm{AB}}}$.

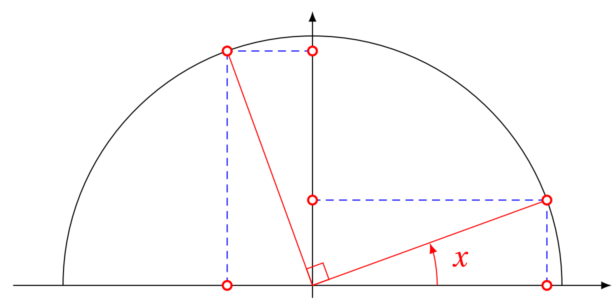
Formules de symétrie

Pour tout réel x,

- ▷ $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$;
- ▷ $\sin(\pi - x) = \sin x$ et $\cos(\pi - x) = -\cos x$;
- ▷ $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$ et $\cos(\pi/2 - x) = \sin x$;
- ▷ $\sin(\pi/2 + x) = \cos x$;
- ▷ $\cos(\pi/2 + x) = -\sin x$;
- ▷ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ et $\cos(\pi + x) = -\cos x$;
- ▷ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x$;
- ▷ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x$;
- ▷ $\cos -x = \cos x$ et $\sin -x = -\sin x$.

Ces différentes formules ont l'avantage de « *se lire* » directement sur le cercle trigonométrique. Il est donc improductif de les apprendre par cœur, mieux vaut savoir les retrouver rapidement au moyen d'une petite figure : voir le schéma ci-contre permettant de retrouver les formules :

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x \text{ et } \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$$



Il faut savoir retrouver rapidement les valeurs remarques des fonctions trigonométriques en s'aidant du cercle trigonométrique.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	✗

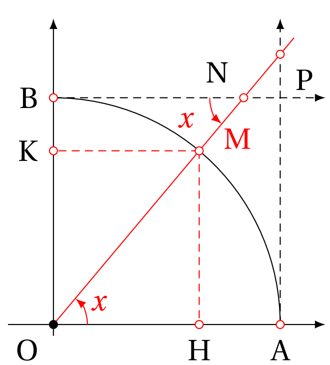
Définition 3.34. La fonction tangente

La fonction tangente est définie sur $\mathscr{D} := \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ *par*

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x}$$

On peut aussi définir $\operatorname{cotan} x := \dfrac{\cos x}{\sin x}$ pour tout $x \neq 0[\pi]$.

La tangente et la cotangente se lisent sur le cercle trigonométrique.



Soit M le point de coordonnées $(\cos x, \sin x)$, N et P les intersections – supposées définies – de (OM) avec les droites parallèles à (Ox) et (Oy) passant par les points B(0,1) et A(1,0) (et de même orientation).

Par les relations trigonométriques dans les triangles rectangles OAP et OBN, on a

$$\tan x = \frac{\overline{\mathrm{AP}}}{\overline{\mathrm{OA}}} = \overline{\mathrm{AP}} \quad \text{et} \quad \tan x = \frac{\overline{\mathrm{BO}}}{\overline{\mathrm{NB}}} = \frac{1}{\overline{\mathrm{BN}}}$$

d'où $\operatorname{cotan} x = \overline{\mathrm{BN}}$.

Formules d'addition

Pour tous réels α et β,

$$\begin{cases} \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \end{cases}$$

et, lorsque toutes les tangentes sont définies, $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$.

On déduit de la parité (resp. imparité) de cos (resp. sin) des formules analogues pour $\alpha-\beta$.

Formules de duplication

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \begin{cases} \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x \\ \sin 2x = 2\cos x \sin x \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathscr{D},\ \tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

où $\mathscr{D} := \left\{x \in \mathbb{R}\,;\, x \neq \frac{\pi}{2}\,[\pi] \text{ et } x \neq \frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right]\right\}$.

En utilisant le cercle trigonométrique, « *on voit* » facilement les résultats suivants, qui peuvent être justifiées au moyen des variations des fonctions trigonométriques, mais que l'on pourra utiliser tels quels.

Équations trigonométriques (↯ 3.5.)

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}\,[\pi]$$

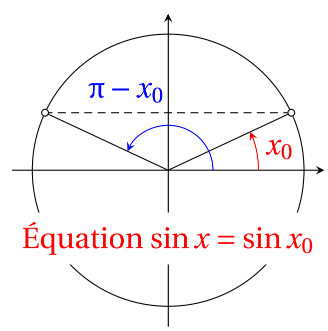
$$\sin x = 0 \iff x = 0\,[\pi]$$

$$\tan x = 0 \iff x = 0\,[\pi]$$

$$\cos x = \cos x_0 \iff \begin{cases} x = x_0\,[2\pi] \\ \quad \text{ou} \\ x = -x_0\,[2\pi] \end{cases}$$

$$\tan x = \tan x_0 \iff x = x_0\,[\pi]$$

$$\sin x = \sin x_0 \iff \begin{cases} x = x_0\,[2\pi] \\ \quad \text{ou} \\ x = \pi - x_0\,[2\pi] \end{cases}$$

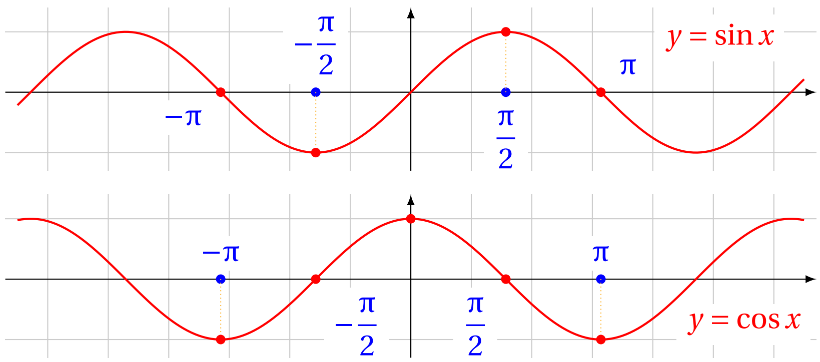


Le résultat suivant est fondamental en Physique.

Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\phi)$

Soit $(a,b) \neq (0,0)$. Comme $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$, $\exists \phi \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\phi$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\phi$.
Ainsi, par les formules d'addition :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\cos(t-\phi)$$



Cosinus et sinus sont supposés connus : ils sont définis sur $\mathbb{R}$, 2π-périodiques, respectivement pair et impair, dérivables sur $\mathbb{R}$ avec

$$\sin' = \cos, \ \cos' = -\sin$$

Et $\forall x \geqslant 0,\ \sin x \leqslant x$ $\big(\not{\downarrow} 8\big)$.

Proposition 3.35. (Propriétés de la fonction tangente).

a) La fonction tangente est π-périodique et impaire.

b) La fonction tangente est dérivable sur $\mathscr{D}$ et, $\forall x \in \mathscr{D},\ \tan' x = 1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

Comme $\sin x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}]{} 1$ et $\cos x \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}-]{} 0^+$,

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \xrightarrow[x \to \frac{\pi}{2}-]{} +\infty$$

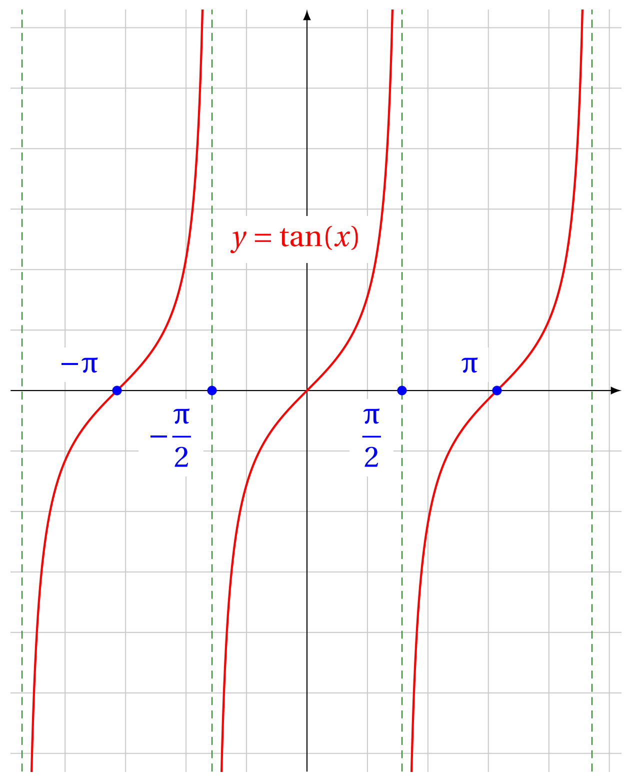
On en déduit le tableau de variation de la tangente sur $[0, \pi/2[$:

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan' x$		$+$	‖
$\tan x$	0 ↗	1 ↗	$+\infty$ ‖

La fonction tangente admet une infinité d'asymptotes, les droites $\mathscr{D}_k$ d'équations cartésiennes

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

Pour tout $x \in [0, \pi/2[$, $\tan x \geqslant x$.

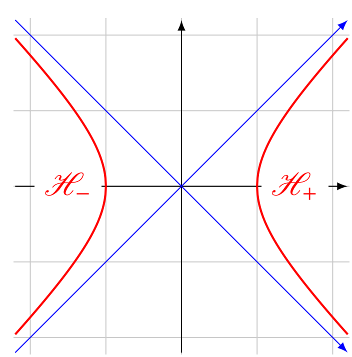


5.4. Cosinus, sinus et tangente hyperboliques

Considérons l'ensemble d'équation cartésienne $\mathscr{H} : x^2 - y^2 = 1$ dans un repère orthonormé direct $\mathscr{R}$.

Il s'agit d'une hyperbole et on prouve facilement que, dans le repère $\mathscr{R}'$ obtenu par rotation de $\mathscr{R}$ d'un angle $-\pi/4$ autour du point O, $\mathscr{H}$ est le graphe de la fonction $\mathrm{X} \mapsto \dfrac{1}{2\mathrm{X}}$.

On en déduit la construction ci-contre.



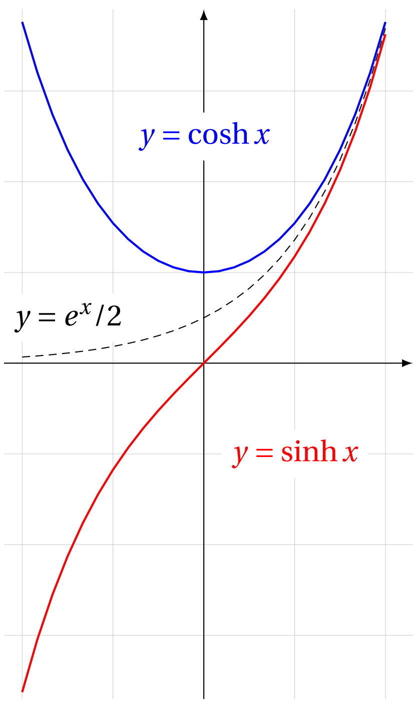
Définition 3.36. (cosh **et** sinh)**.**

On appelle cosinus et sinus hyperboliques les fonctions, respectivement notées cosh *et* sinh*, définies par*

$$\cosh : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}, \quad \sinh : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

Cette terminologie est justifiée par l'analogie cercle-hyperbole. Ces deux fonctions permettent de paramétrer l'hyperbole $\mathscr{H}$. Lorsque t varie dans $\mathbb{R}$, le point de coordonnées $(\cosh t, \sinh t)$ décrit la branche d'hyperbole $\mathscr{H}_+$ (intersection de l'hyperbole avec le demi-plan d'inéquation $x > 0$) et le point de coordonnées $(-\cosh t, \sinh t)$ décrit l'autre branche d'hyperbole $\mathscr{H}_-$.

Proposition 3.37. (↯ **3.7. et 3.8.**)
Les fonctions cosh et sinh sont resp. paire et impaire, dérivables sur $\mathbb{R}$, $\cosh' = \sinh$ et $\sinh' = \cosh$.



Comme $\sinh 0 = 0$, on a le tableau suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\sinh' x$		$+$	
$\sinh x$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

Puis, grâce au signe donné ci-dessus du sinus hyperbolique, on en déduit le tableau de variations de cosh :

$\cosh x$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\cosh' x$	$-$	0	$+$
$\cosh x$	$+\infty$ ↘	1	↗ $+\infty$

De plus, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sinh x < \dfrac{e^x}{2} < \cosh x$.

La relation fondamentale *circulaire* $\cos^2 + \sin^2 = 1$ a pour analogue[6] *hyperbolique* :

Proposition 3.38. (Relation fondamentale hyperbolique). $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

Comme dans le cas circulaire, on peut développer une trigonométrie hyperbolique[7] comportant des formules d'addition, de duplication, de factorisation, etc. Par exemple, pour tous réels x et y :

$$\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y \quad \text{car} \quad \begin{cases} \cosh x \cosh y = \dfrac{e^{x+y} + e^{-x-y} + e^{x-y} + e^{-x+y}}{4} \\ \sinh x \sinh y = \dfrac{e^{x+y} + e^{-x-y} - e^{x-y} - e^{-x+y}}{4} \end{cases}$$

6. Cf. l'analogie des paramètrages du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et de l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$.
7. La trigonométrie hyperbolique n'est pas au programme.

Définition 3.39. (Tangente hyperbolique).

On appelle tangente hyperbolique et l'on note tanh, *la fonction* $\dfrac{\sinh}{\cosh}$.

Proposition 3.40. (Propriétés de la tangente hyperbolique). (↯ **3.9. et 3.10.**)

La tangente hyperbolique est impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\tanh' = 1 - \tanh^2 = \dfrac{1}{\cosh^2}$.

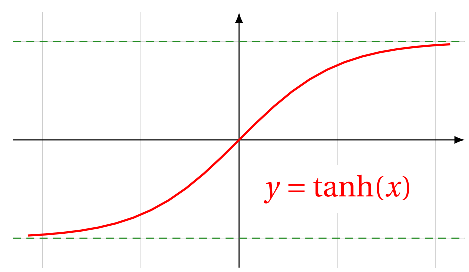
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\tanh' x$		$+$	
$\tanh x$	$-\infty$ ↗	0 ↗	$+\infty$

On a, pour tout réel x,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

Ainsi $\tanh(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 1$. Comme $\tanh' > 0$, la tangente hyperbolique est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a $\tanh 0 = 0$ et l'équation de la tangente à l'origine au graphe de tanh est $y = x$.

On complète l'étude précédente en utilisant l'imparité de tanh.



5.5. Polynômes et fractions rationnelles

Définition 3.41. Polynômes et fractions rationnelles

Une fonction $\mathrm{P} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est dite polynomiale s'il existe* $n \in \mathbb{N}$ *et* $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Dans le cas où P *est non nulle, la liste* $(a_0, \ldots, a_n)$ *est unique sous l'hypothèse* $a_n \neq 0$ *: l'entier* n *est appellé le degré de* P *et les* a_i*, les coefficients de* P.
On appelle fraction rationnelle tout fonction s'exprimant comme quotient de fonctions polynomiales.

On sait qu'une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$ admet au plus n racines. Il faut connaître le résultat suivant que nous démontrerons plus loin dans le cours d'algèbre linéaire.

Proposition 3.42. (Décomposition en éléments simples)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes distincts et P une fonction polynomiale de degré strictement inférieur à n. Il existe des nombres complexes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}\ ,\ \frac{\mathrm{P}(z)}{(z - z_1) \times \cdots \times (z - z_n)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{z - z_k}$$

Par exemple, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\},\ \frac{1}{x\left(x^2-1\right)} = \frac{1}{z(z-1)(z+1)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-1} + \frac{c}{z+1}$$

En multipliant par x puis en faisant tendre l'expression vers 0, on obtient :

$$\frac{1}{\left(x^2+1\right)} \xrightarrow[x\to 0]{} 1 \quad \text{et} \quad a + \frac{bx}{x-1} + \frac{cx}{x+1} \xrightarrow[z\to 0]{} a$$

d'où $a = 1$. En multipliant par $x-1$ puis en cherchant la limite en 1, on trouve $b = \frac{1}{2}$ et en procédant de façon analogue on aboutit à $c = \frac{1}{2}$.

6. Relations de comparaison des fonctions

Dans ce paragraphe, nous allons transposer les trois relations de comparaisons sur les suites dans le cadre fonctionnel.

6.1. La négligeabilité

Les définitions et notations sont identiques au cas séquentiel en remplaçant « à partir d'un certain rang » par « au voisinage de x_0 ».

Définition 3.43. La négligeabilité, notations o (Landau) et $\ll$ (Hardy)

Soit u et v des fonctions définies sur un même voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $u(x)$ est négligeable devant $v(x)$ au voisinage de x_0 si

- ▷ $\exists \varepsilon$ *définie au voisinage de x_0 telle que* $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$ *et* $u(x) = \varepsilon(x)v(x)$ *au voisinage de x_0.*
- ▷ *On note alors* $u(x) \underset{x\to x_0}{=} o(v(x))$ *ou* $u(x) \underset{x\to x_0}{\ll} v(x)$. *On peut omettre $x \to x_0$ s'il n'y a pas ambiguité.*

Si $v(x) \neq 0$ au voisinage épointé de x_0, alors $u(x) \underset{x\to x_0}{=} o(v(x))$ *équivaut à* $\dfrac{u(x)}{v(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$.

Il faut bien comprendre que cette relation de comparaison ne concerne que l'ordre de grandeur en valeur absolue : un fonction positive peut être négligeable par rapport à une fonction positive. On a $x \ll -x^2$ en $+\infty$. La notation usuelle $f(x) = o\big(f(x)\big)$ est abusive. On a $1 = o(x)$ et $\sqrt{x} = o(x)$ mais cet deux « $o(x)$ » ne sont pas égaux.

Dangers de la notation $o\big(g(x)\big)$

En résumé, l'égalité $f(x) = o\big(g(x)\big)$ en x_0 n'en est pas une, il faut la comprendre comme une relation binaire. En particulier, on explicitera tout « $o\big(g(x)\big)$ » avant de l'utiliser dans un calcul. On reviendra à la définition en l'écrivant sous la forme $g(x)\varepsilon(x)$ au voisinage de x_0 avec ε qui tend vers 0 en x_0.

Voici par exemple l'échelle de comparaison des puissances de x en $+\infty$:

$$\cdots \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{1}{x^3} \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{1}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\ll} \frac{1}{x} \underset{x\to+\infty}{\ll} 1 \underset{x\to+\infty}{\ll} x \underset{x\to+\infty}{\ll} x^2 \underset{x\to+\infty}{\ll} x^3 \underset{x\to+\infty}{\ll} \cdots$$

L'échelle de comparaison des puissances de x en 0 est inversée par rapport à la précédente :

$$\cdots \underset{x\to 0}{\ll} x^3 \underset{x\to 0}{\ll} x^2 \underset{x\to 0}{\ll} x \underset{x\to 0}{\ll} 1 \underset{x\to 0}{\ll} \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{\ll} \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\ll} \frac{1}{x^3} \underset{x\to 0}{\ll} \cdots$$

Comme dans le cas des suites, il faut connaître la comparaison des fonctions usuelles en $+\infty$.

Proposition 3.44. (Croissances comparées) (↯ **3.11. et 3.12.**)
Pour $a>0$, $b>0$ et $c>0$, on a $(\ln x)^a \ll x^b \ll e^{cx} \ll x^x$ et $e^{-cx} \ll x^{-b} \ll (\ln x)^{-a}$ en $+\infty$.

Le cas $ab>0$ est le seul où la comparaison de $(\ln x)^a$ et x^b n'est pas directe car les deux fonctions tendent alors vers $+\infty$ (si $a>0$ et $b>0$) ou 0 (si $a<0$ et $b<0$). Par exemple, si $a>0$ et $b<0$, alors $(\ln x)^a \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ et $x^b \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ d'où $x^b \ll (\ln x)^a$ en $+\infty$.

Les règles de calcul, rassemblées ci-dessous, sont faciles à retenir tant leurs démonstrations sont courtes et naturelles.

Proposition 3.45. (Règles de calcul sur les petits ô)
Soit u, v, w, f et g des fonctions à valeurs réelles définies au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

a) $\forall \mu \in \mathbb{R}^*,\ o(u(x)) \underset{x\to x_0}{=} o\big(\mu u(x)\big)$ (absorption des constantes multiplicatives) ;

b) $\begin{cases} f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(u(x)) \\ g(x) \underset{x\to x_0}{=} o(u(x)) \end{cases} \implies f(x)+g(x) \underset{x\to x_0}{=} o(u(x))$ (la somme de deux petits ô est un petit ô) ;

c) $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(1)$ si et seulement si $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0$;

d) $\begin{cases} u(x) \underset{x\to x_0}{=} o(v(x)) \\ v(x) \underset{x\to x_0}{=} o(w(x)) \end{cases} \implies u(x) \underset{x\to x_0}{=} o(w(x))$ (transitivité de la relation ô) ;

e) $\begin{cases} f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(u(x)) \\ g(x) \underset{x\to x_0}{=} o(v(x)) \end{cases} \implies f(x)g(x) \underset{x\to x_0}{=} o(u(x)v(x))$ (comptabilité de o avec $\times$) ;

f) $f(x) \underset{x\to x_0}{=} o(u(x)) \implies f(x)g(x) \underset{x\to x_0}{=} o\big(u(x)g(x)\big)$ (comptabilité de p avec $\times$) ;

g) $\forall \alpha>0,\ u(x) \underset{x\to x_0}{=} o(v(x)) \implies u(x)^\alpha \underset{x\to x_0}{=} o(v(x)^\alpha)$ (pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}_+$).

Proposition 3.46. (Composition à droite)
Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, u et v définies sur un voisinage V de x_0, ϕ à valeurs dans V telle que $\phi(y) \xrightarrow[y\to y_0]{} x_0$.
Si $u(x) \underset{x\to x_0}{=} o(v(x))$, alors $u\big(\phi(y)\big) \underset{y\to y_0}{=} o\Big(v\big(\phi(y)\big)\Big)$.

Par exemple, si $u(x) \underset{x\to+\infty}{\ll} v(x)$, alors $u\big(x^2\big) \underset{x\to+\infty}{\ll} v\big(x^2\big)$. C'est bien un résultat sur la composition à droite : pour tout ϕ à valeur dans V de limite x_0 en y_0,

$$u = o(v) \text{ en } x_0 \implies u\circ\phi = o(v\circ\phi) \text{ en } y_0 \quad \text{(on a composé à droite } u \text{ et } v\text{)}$$

On prendra garde à la composition à gauche. Même sous des conditions simples portant sur la fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$, la relation $u = o(v)$ n'entraîne pas en général que $f\circ u = o(f\circ v)$. Par exemple en $+\infty$, $x = o\big(x^2\big)$ mais $\ln x$ n'est pas un petit ô de $\ln x^2$ car $\ln x^2 = 2\ln x$ pour $x>0$.

Comme dans le cas séquentiel, il faut être prudent avec la composition à gauche et l'addition :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to x_0}{\ll} u(x) \\ g(x) \underset{x\to x_0}{\ll} v(x) \end{cases} \not\Longrightarrow f(x)+g(x) \underset{x\to x_0}{\ll} u(x)+v(x)$$

Par exemple $1 = o(x)$ et $1 = o(1-x)$ mais $2 \neq o(1)$ en $+\infty$.

6.2. L'équivalence

Définition 3.47. L'équivalence, notation $\sim$

Soit u et v des fonctions définies au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $u(x)$ est équivalente à $v(x)$ au voisinage de x_0 si

- $\exists\delta$ *définie au voisinage de x_0 telle que* $\delta(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 1$ *et* $u(x) = \delta(x)v(x)$ *au voisinage de x_0.*
- *On note alors* $u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)$.

Si $v(x) \neq 0$ au voisinage épointé de x_0, alors $u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)$ équivaut à $\dfrac{u(x)}{v(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} 1$.

L'équivalence est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites de nombres réels $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (les propriétés de réflexivité et de symétrie sont évidentes).

Proposition 3.48. (Règles de calcul sur les équivalents)

Soit u, v, w, f et g des fonctions à valeurs réelles définies au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

a) $u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x) \Longrightarrow o(u(x)) = o(v(x))$;

b) $u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x)$ et $v(x) \underset{x\to x_0}{\sim} w(x) \Longrightarrow u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} w(x)$ (transitivité de la relation $\sim$) ;

c) $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} u(x)$ et $g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x) \Longrightarrow f(x)g(x) \underset{x\to x_0}{\sim} u(x)v(x)$ (comptabilité de $\sim$ avec $\times$).

d) $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \Longrightarrow f(x)u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)u(x)$ (comptabilité de $\sim$ avec $\times$).

e) $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \Longrightarrow \dfrac{1}{f(x)} \underset{x\to x_0}{\sim} \dfrac{1}{g(x)}$;

Les propriétés (d) et (g) peuvent se résumer ainsi : pour calculer un équivalent d'un produit (resp. d'un quotient), il suffit de former le produit (resp. le quotient) des équivalents. Comme pour la négligeabilité, il n'existe pas de résultat de ce type pour les sommes. La relation $\sim$ n'est pas compatible avec l'addition :

$$\begin{cases} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x) \end{cases} \not\Longrightarrow f(x)+u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)+v(x)$$

Par exemple en 0, $x \sim x + x^3$ et $-x + x^2 \sim -x$ mais $x^2 \not\sim x^3$. En particulier, on ne peut ajouter membre à membre des équivalences ni faire passer un terme de gauche à droite en le transformant en son opposé(mais c'est possible pour le produit) :

$$f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \not\Longrightarrow f(x)+u(x) \sim g(x)+u(x)$$

$$f(x)+u(x) \sim g(x) \not\Longrightarrow f(x) \sim g(x)-u(x)$$

Proposition 3.49. (Composition à droite dans des équivalents)
Soit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, u et v définies sur un voisinage V de x_0, ϕ à valeurs dans V telle que $\phi(y) \xrightarrow[y \to y_0]{} x_0$.
Si $u(x) \underset{x \to x_0}{\sim} v(x)$, alors $u\big(\phi(y)\big) \underset{y \to y_0}{\sim} v\big(\phi(y)\big)$.

Ainsi en $+\infty$, $u(x) \sim v(x) \implies u(2x) \sim v(2x)$. Comme pour la négligeabilité, il n' y a pas de résultat général sur la composition à gauche dans des équivalents, i.e. pour une fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$

$$u(x) \underset{x \to x_0}{\sim} v(x) \not\Longrightarrow f\big(u(x)\big) \underset{x \to x_0}{\sim} f\big(v(x)\big)$$

en toute généralité. Par exemple, $x+1 \sim x$ mais $e^{x+1} \not\sim e^x$ car $\frac{e^{x+1}}{e^x} = e$. Il existe cependant des cas où l'on peut composer à gauche, comme celui des puissances et du logarithme.

Proposition 3.50. (Règles de composition à gauche dans des équivalents)
Pour des fonctions u et v définies et positives au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$:

a) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ u(x) \underset{x \to x_0}{\sim} v(x) \implies u(x)^\alpha \underset{x \to x_0}{\sim} v(x)^\alpha$;

b) Si $u(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}_+ \setminus \{1\}$ et $u(x) \underset{x \to x_0}{\sim} v(x)$, alors $\ln u(x) \underset{x \to x_0}{\sim} \ln v(x)$.

Le signe au voisinage d'un point est conservé par équivalence mais pas le sens de variation. En effet,

$$1 + \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\sim} 1 - \frac{1}{x}$$

les expressions de gauche et droite étant respectivement décroissante et croissante par rapport à x.

Proposition 3.51.
Deux fonctions équivalentes en x_0 sont du même signe au voisinage de x_0.

6.3. La domination

Comme nous l'avions mentionné dans le chapitre dédié aux suites, cette relation sera moins utilisée que les deux précédentes et vérifie des propriétés analogues.

Définition 3.52. **La domination, notation O (Landau)**

Soit u, v définies au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que $u(x)$ est dominée par $v(x)$ au voisinage de x_0 si

- ▷ *$\exists b$ définie et bornée au voisinage de x_0 telle que $u(x) = b(x)v(x)$ au voisinage de x_0.*
- ▷ *On note alors $u(x) \underset{x \to x_0}{=} \mathrm{O}(v(x))$.*

Si $v(x) \neq 0$ au voisinage épointé de x_0, alors $u(x) \underset{x \to x_0}{=} \mathrm{O}\big(v(x)\big)$ équivaut à $\dfrac{u}{v}$ est bornée au voisinage épointé de x_0.

Comme dans le cas des « *petits ô* », il s'agit d'un abus de notation. Il ne s'agit pas d'une égalité mais d'une relation. Il est clair que $u(x) = o\big(v(x)\big)$ implique que $u(x) = \mathrm{O}\big(v(x)\big)$ car une fonction qui tend vers 0 quand x tend vers x_0 est bornée au voisinage de x_0. La réciproque est fausse, on a par exemple en $+\infty$, $2024x^2+1=\mathrm{O}\left(x^2\right)$ mais $2024x^2\neq o\left(x^2\right)$ car l'expression $\frac{2024x^2+1}{x^2}$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Proposition 3.53. (Règles de calcul)

Soit u, v, w, t définies au voisinage de $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$. On a en x_0 :

a) $\begin{cases} u(x) = \mathrm{O}\big(v(x)\big) \\ v(x) = \mathrm{O}\big(w(x)\big) \end{cases} \Longrightarrow u(x) = \mathrm{O}\big(w(x)\big)$ (transitivité de O) ;

b) $u(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathrm{O}(1)$ si et seulement si u est bornée au voisinage de 0 ;

c) $\begin{cases} u(x) = \mathrm{O}\big(v(x)\big) \\ w(x) = \mathrm{O}\big(t(x)\big) \end{cases} \Longrightarrow u(x)w(x) = \mathrm{O}\big(v(x)t(x)\big)$ (compatibilité de O avec $\times$) ;

d) $u(x) = \mathrm{O}\big(v(x)\big) \Longrightarrow u(x)w(x) = \mathrm{O}\big(v(x)w(x)\big)$ (compatibilité de O avec $\times$).

6.4. Levée d'une forme indéterminée par calcul asymptotique

Au delà du signe, une autre propriété est conservée par équivalence : l'existence et la valeur d'une limite.

Proposition 3.54.

Si $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)$ et $g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell\in\overline{\mathbb{R}}$, alors $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$.

Par exemple en $+\infty$, $x^2-\ln x\sim x^2$ et $e^x-x^{2024}\sim e^x$ car $\ln x=o\big(x^2\big)$ et $x^{2024}=o\big(e^x\big)$. Ainsi

$$\frac{x^2-\ln x}{e^x-x^{2024}} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{x^2}{e^x}$$

Comme $x^2=o\big(e^x\big)$ en $+\infty$, on en déduit que $\dfrac{x^2-\ln x}{e^x-x^{2024}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Ce type de calcul, qualifié d'asymptotique, est bien plus efficace que les méthodes standards.

Levée d'une FI par calcul asymptotique

On trouve une *chaîne d'équivalents* en x_0

$$f(x)\sim g_1(x)\sim\cdots\sim g_p(x)$$

où $g_p(x)$ a un comportement connu en x_0. Si $g_p(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$, alors on en conclut que $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$.

Dans les calculs, on aura intérêt à chercher les équivalents les plus simples possibles. Il est clair que l'équivalent le plus simple d'une fonctions de limite réelle non nulle est sa limite.

Proposition 3.55.

Pour $x_0\in\overline{\mathbb{R}}$, une fonction u définie au voisinage de x_0 et $\ell\in\mathbb{R}^*$, $u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} \ell \iff u(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$.

Équivalents usuels (⚡ **3.13.**)

Pour f dérivable en 0 avec $f'(0) \neq 0$, on a $f(u) - f(0) \sim f'(0)u$ au voisinage de 0.
On en déduit les cas usuels suivants :

a) $e^u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} u$;

b) $\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$;

c) $\sin u \underset{u\to 0}{\sim} u$;

d) $\cos u - 1 \underset{u\to 0}{\sim} -\dfrac{u^2}{2}$;

e) $\tan u \underset{u\to 0}{\sim} u$;

f) $(1+u)^\alpha - 1 \underset{u\to 0}{\sim} \alpha u$ (pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$).

Commençons par un quotient d'expressions de limites nulles. En 0, on a

$$f(u) := \frac{\sqrt{1+u}-1}{\cos u - 1} \sim \frac{\frac{u}{2}}{-\frac{u^2}{2}} = -\frac{1}{u}$$

Ainsi f n'a pas de limite en 0 mais admet des limites latérales en 0 valant respectivement $+\infty$ et $-\infty$ à gauche et à droite. Poursuivons par une expression tend vers 1 à une puissance tendant vers l'infini en valeur absolue. En 0, on a

$$g(u) := (1+\ln(1+u))^{\frac{1}{\sin u}} = \exp\left(\frac{\ln(1+\ln(1+u))}{\sin u}\right)$$

La stratégie est ici d'étudier la limite de l'expression dans l'exponentielle pour conclure par composition des limites (car nous ne pouvons a priori composer par l'exponentielle à gauche dans des équivalents). On a en 0 :

$$\frac{\ln(1+\ln(1+u))}{\sin u} \sim \frac{\ln(1+u)}{u} \sim \frac{u}{u} = 1$$

car $\ln(1+u)$ tend vers 0 avec u. On en déduit que $\dfrac{\ln(1+\ln(1+u))}{\sin u} \xrightarrow[u\to 0]{} 1$ puis $g(u) \xrightarrow[u\to 0]{} e$ par composition des limites.

Comme les principaux équivalents et croissances comparées sont formulées en 0, il est préférable de se ramener à ce cas par changement de variable.

Équivalent en un point $\neq 0$

Pour rechercher un équivalent de $f(x)$ en un point $x_0 \neq 0$, on peut effectuer le changement de variable $x = x_0 + u$. On est ramené à rechercher unéquivalent de $f(x_0+u)$ quand u tend vers 0.

Déterminons un équivalent de $\tan x$ en $\frac{\pi}{2}$. On écrit $x = u + \frac{\pi}{2}$ et on étudie l'expression quand u tend vers 0 :

$$\tan\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sin\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(u+\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{\cos u}{-\sin u} \sim \frac{1}{-u}$$

Comme $x - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[x\to\frac{\pi}{2}]{} 0$, on en déduit par composition à droite que $\tan x \underset{x\to\frac{\pi}{2}}{\sim} \dfrac{1}{\frac{\pi}{2}-x}$.

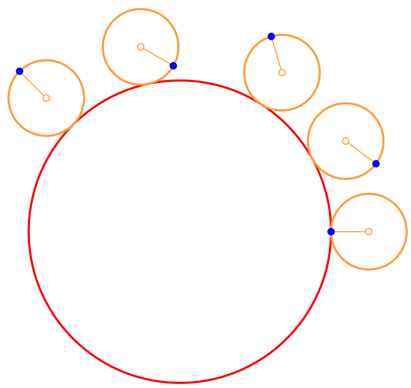
Étudions à présent le comportement de $\dfrac{2^x-4}{3^x-9}$ quand x tend vers 2. On écrit $x = 2+u$ et on étudie l'expression quand u tend vers 0 :

$$\frac{2^x-4}{3^x-9} = \frac{2^{2+u}-4}{3^{2+u}-9} = \frac{4}{9}\times\frac{2^u-1}{3^u-1} = \frac{4}{9}\times\frac{e^{u\ln 2}-1}{e^{u\ln 3}-1} \sim \frac{4u\ln 2}{9u\ln 3} = \frac{4\ln 2}{9\ln 3}$$

Ainsi $\dfrac{2^x-4}{3^x-9} \xrightarrow[x\to 2]{} \dfrac{4\ln 2}{9\ln 3}$.

7. Fonctions à variable ou valeurs complexes

Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ doit être comprise comme une courbe : $f(t)$ est l'affixe à l'instant t d'un point du plan supposé muni d'un repère.



Étudions par exemple le roulement sans glissement d'un « petit » cercle de rayon $\frac{1}{4}$ sur un « grand » cercle de rayon 1.

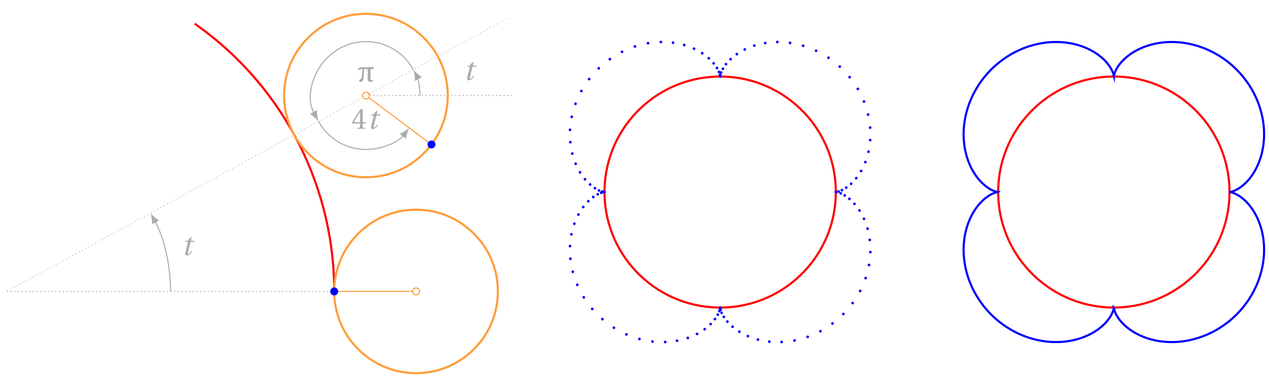
Considérons le repère orthonormé direct d'origine le centre du grand cercle tel que le point de contact entre les deux cercles soit celui de coordonnées $(1,0)$.

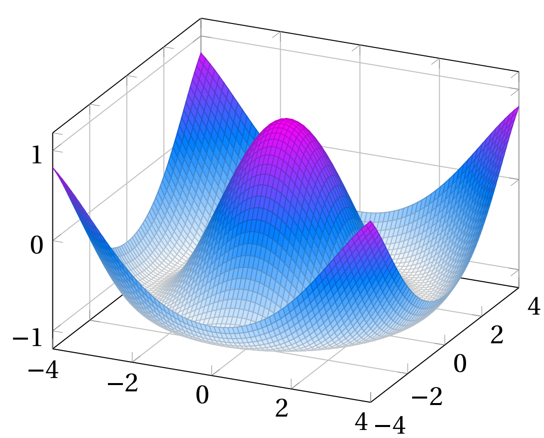
On s'intéresse à la trajectoire de ce point initial de contact (en bleu sur la figure ci-contre).

Lorsque le point de contact entre les deux cercles a tourné de t radians, le point M a tourné de $4t$ radian sur le petit cercle.

On en déduit l'affixe du point M :

$$f(t) = \left(1+\frac{1}{4}\right)e^{it} + \frac{1}{4}e^{i(5t+\pi)} = \frac{5}{4}e^{it} - \frac{1}{4}e^{5it} \quad \text{(trajectoire de la famille des épicycloïdes)}$$





On peut représenter en dimension trois le graphe d'une fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$ en traçant les points de coordonnées $\big(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, f(z)\big)$ quand z varie dans $\mathbb{C}$, cf. ci-contre le graphe de

$$z \longmapsto \cos|z|$$

Pour une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, il n'existe pas de représentation commode car le graphe d'une telle application est un objet mathématique de dimension quatre :

$$\big(\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z, \operatorname{Re} f(z), \operatorname{Im} f(z)\big)$$

On peut cependant l'appréhender en représentant les graphes des deux applications $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$, voire en représentant celui de $|f|$.

Dans le chapitre AN 1, nous avons défini au sein du paragraphe dédié à la topologie les notions de voisinage et de point adhérant, dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La définition de la limite au moyen des voisinages donnée dans ce cours vaut pour des fonctions dont le domaine est une partie de $\mathbb{C}$ et à valeurs dans $\mathbb{C}$ à partir du moment où les points et les limites considérées sont dans $\mathbb{C}$. La définition de $f(z) \xrightarrow[z\to\omega]{} \ell$ où $\omega \in \mathbb{C}$ est adhérant au domaine $\mathscr{D}$ de f et $\ell \in \mathbb{C}$ est :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall z \in \mathscr{D} \cap \mathrm{B}(\omega,\alpha),\ f(z) \in \mathrm{B}(\ell,\varepsilon)$$

c'est-à-dire, en explicitant les définitions des boules ouvertes au moyen du module :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall z \in \mathscr{D},\ |z-\omega| < \alpha \implies \left|f(z)-\ell\right| < \varepsilon$$

Dans le cas complexe, « faire tendre z vers l'infini » n'a aucun sens : on peut en effet tendre vers l'infini dans une infinité de direction. On peut néanmoins s'affranchir de cette difficulté par la définition de $f(z) \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} \ell$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathscr{D},\ |z| > \mathrm{M} \implies \left|f(z)-\ell\right| < \varepsilon$$

De même pour $\left|f(z)\right| \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} +\infty$:

$$\forall \mathrm{M}' \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathscr{D},\ |z| > \mathrm{M} \implies \left|f(z)\right| > \mathrm{M}'$$

ou encore $\left|f(z)\right| \xrightarrow[z\to\omega]{} +\infty$:

$$\forall \mathrm{M} > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall z \in \mathscr{D},\ |z-\omega| < \alpha \implies \left|f(z)\right| > \mathrm{M}$$

Par exemple, pour $d \in \mathbb{N}^*$, $a_0,\ldots,a_d$ dans $\mathbb{C}$ avec $a_d \neq 0$, on a

$$\left|\sum_{k=0}^{d} a_k z^k\right| \xrightarrow[|z|\to+\infty]{} +\infty$$

et pour le justifier, il suffit d'appliquer l'inégalité triangulaire : pour tout nombre complexe z

$$\left|\sum_{k=0}^{d} a_k z^k\right| \geqslant |a_d|\,|z|^d - \sum_{k=0}^{d-1} |a_k|\,|z|^k$$

On conclut en remarquant que $|a_d|\,x^d - \sum\limits_{k=0}^{d-1} |a_k|\,x^k \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

Les opérations sur les limites s'étendent naturellement à ce cadre, avec les précautions d'usage pour les formes indéterminées. Revenons par exemple au théorème de décomposition en éléments simples (cf. 3.42. à la page 23). Ill existe $(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-i,0,i\},\ \frac{1}{z\left(z^2+1\right)} = \frac{1}{z(z-i)(z+i)} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z-i} + \frac{c}{z+i}$$

En multipliant par z puis en faisant tendre l'expression vers 0, on obtient :

$$\frac{1}{\left(z^2+1\right)} \xrightarrow[z\to0]{} 1 \quad\text{et}\quad a + \frac{bz}{z-i} + \frac{cz}{z+i} \xrightarrow[z\to0]{} a$$

d'où $a = 1$. En multipliant par $z-i$ puis en cherchant la limite en i, on trouve $b = -\frac{1}{2}$ et en procédant de façon analogue on aboutit à $c = -\frac{1}{2}$.

On peut se ramener à des limites réelles au moyen de l'équivalence suivante :

$$f(z) \xrightarrow[z\to\omega]{} \ell \iff \operatorname{Re} f(z) \xrightarrow[z\to\omega]{} \operatorname{Re}\ell \quad\text{et}\quad \operatorname{Im} f(z) \xrightarrow[z\to\omega]{} \operatorname{Im}\ell$$

8. Tests

3.1. Calculer lorsqu'elles existent les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+2|x|}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$; c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^n-1}\cdot$

3.2. Pour $t\in\mathbb{R}$, on pose $f(t) := (-1)^{\lfloor t\rfloor}$. Tracer le graphe de la fonction f et étudier l'existence des limites à gauche et à droite en tout point de $\mathbb{R}$.

3.3. Étudier le comportement en 0 de la fonction définie par $f(x) = x^2\left\lfloor \dfrac{1}{x}\right\rfloor$.

3.4. Résoudre l'inéquation $\ln|x+1|-\ln|2x+1| \geqslant \ln 2$.

3.5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x+\sin x = 0$.

3.6. Étudier et représenter la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x)\,(1+\cos(x))$.

3.7. Résoudre $\cosh x+2\sinh x = 2$ dans $\mathbb{R}$.

3.8.

a) Établir que le sinus hyperbolique réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Exprimer $\sinh^{-1}$ au moyen du logarithme néperien.

c) Tracer le graphe de $\sinh^{-1}$.

3.9. Tableau de variation et courbe de la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{x\cosh(x)-\sinh(x)}{\cosh(x)}\cdot$

3.10. Établir que $\forall x\in\mathbb{R},\ \arctan\left(e^x\right) = \arctan\left(\tanh\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)+\dfrac{\pi}{4}\cdot$

3.11. Comparer au voisinage de 0 les fonctions $f : x\mapsto x\ln\left(1+x^2\right)$ et $g : x\mapsto x^2$.

3.12. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $0<a<b$. Comparer a^x et b^x en $+\infty$.

3.13. Lever les formes indéterminées suivantes pour $u\to 0$:

a) $\dfrac{1}{u^2}-\dfrac{1}{\sin^4 u}$; b) $\dfrac{2^u-1}{\sin u}$; c) $\dfrac{2^u-1-\sin u}{\ln(1+u)}$; d) $(1+\tan u)^{\operatorname{cotan}^3 u}$.

9. Solutions des tests

3.1.

a) Comme

$$\forall x \neq 0,\quad \frac{x^2+2|x|}{x} = x+2\times \operatorname{signe}(x) \leqslant x+2$$

on trouve $-\infty$.

b) Comme

$$\forall x \neq 2,\quad \frac{x^2-4}{x^2-3x+2} = \frac{x+2}{x-1}$$

on trouve 4.

c) L'énoncé n'a de sens que pour $n \geqslant 1$. Pour $x \neq 1$, on a

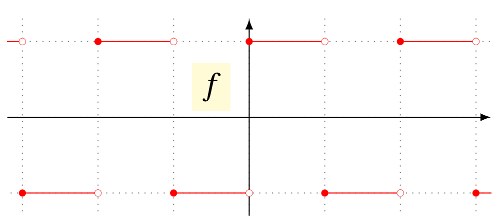
$$\frac{x^n-1}{x-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k$$

Ainsi, on trouve $\dfrac{1}{n}$.

3.2.

▷ La fonction f est constante au voisinage de tout point $t_0 \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$ donc admet une limite en ces points.

▷ Soit $n \in \mathbb{Z}$. Pour $t \in [n-1, n[$, $f(t) = -(-1)^n$, et, pour $t \in [n, n+1[$, $f(t) = (-1)^n$. La fonction f admet donc des limites à gauche et à droite de n valant respectivement $-(-1)^n$ et $(-1)^n$.



3.3. Pour tout $x \neq 0$, on a

$$\frac{1}{x} - 1 < \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leqslant \frac{1}{x}$$

d'où, puisque $x^2 > 0$, $x - x^2 < f(x) \leqslant x$ et donc, d'après le théorème d'encadrement,

$$f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

3.4. L'inéquation est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1, -1/2\}$ et est équivalente à

$$\frac{(x+1)^2}{(2x+1)^2} \geqslant 4$$

ie $(x+1)^2 - 2^2(2x+1)^2 \geqslant 0$, soit encore

$$(\underbrace{x+1-4x-2}_{=-3x-1})(\underbrace{x+1+4x+2}_{=5x+3}) \geqslant 0$$

On trouve $\left[-\dfrac{3}{5}, -\dfrac{1}{2}\right[\cup \left]-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}\right]$.

3.5. Pour tout réel x, $\cos x = -\sin x$ si et seulement si $\cos x = \cos(x+\pi/2)$, ce qui équivaut à $x = -x - \pi/2\,[2\pi]$ ou $x = x + \pi/2\,[2\pi]$. Cette dernière équation n'ayant pas de solution, $\cos x = -\sin x$ si et seulement si $2x = -\pi/2\,[2\pi]$, ie $x = -\pi/4\,[\pi]$. L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

3.6. La fonction f est paire et 2π-périodique, on l'étudie sur $[0, \pi]$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

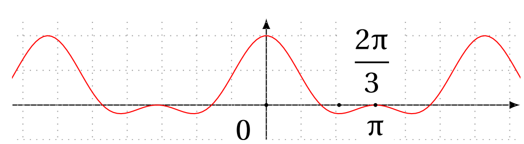
$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin(x) - 2\sin(x)\cos(x) \\ &= -2\sin(x)\left(\frac{1}{2} + \cos(x)\right) \end{aligned}$$

On en déduit que le signe de $f'(x)$ pour $x \in [0, \pi]$ est l'opposé de celui de $1/2 + \cos(x)$, ainsi

$$\begin{cases} f'(x) \leqslant 0 & \text{pour } x \in [0, 2\pi/3] \\ f'(x) \geqslant 0 & \text{pour } x \in [2\pi/3, \pi] \end{cases}$$

D'où les variations puis le graphe de f :

x	0		$2\pi/3$		π
$f(x)$	2	$\searrow$	$-1/4$	$\nearrow$	0



3.7. En posant $t = e^x$, l'équation est équivalente à

$$3t - \frac{1}{t} = 4$$

c'est-à-dire $3t^2 - 4t - 1 = 0$, donc $t = \dfrac{2 \pm \sqrt{7}}{3}$. Puisque $t = e^x > 0$, on trouve l'unique solution

$$x = \ln\left(\frac{2+\sqrt{7}}{3}\right)$$

3.8.

a) Cela découle des variations du sinus hyperbolique qui ont été étudiées dans le cours : sinh réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\sinh(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

b) Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} x = \sinh(y) &\iff e^y - e^{-y} = 2x \\ &\iff e^y - 1/e^y = 2x \\ &\iff \left(e^y\right)^2 - 2xe^y - 1 = 0 \end{aligned}$$

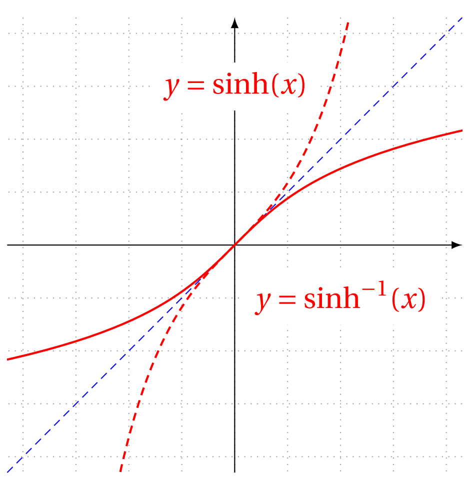
Le discriminant du trinôme $u^2 - 2xu + 1$ étant $4x^2 + 4$, il admet pour solutions,

$$x \pm \sqrt{1+x^2}$$

Puisque seule $x + \sqrt{1+x^2}$ est positive,

$$\sinh^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$$

c) On trace le symétrique du graphe de sinh par rapport à la première bissectrice du repère :



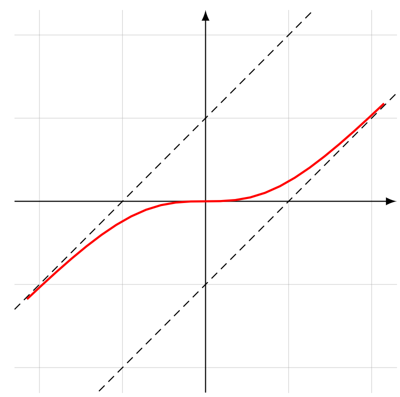
3.9. On remarque que f est impaire et qu'elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puisque cosh ne s'annule pas. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x - \tanh(x)$, ainsi $f' = \tanh^2 \geqslant 0$. La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$. On a

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \quad \text{et} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$$

Comme

$$f(x) - x = -\tanh(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \mp 1$$

les droites d'équations $y = x+1$ et $y = x-1$ sont asymptotes au graphe de f respectivement en $-\infty$ et $+\infty$.



3.10. Posons

$$f : \begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \arctan\left(e^x\right) - \arctan\left(\tanh(x/2)\right) \end{aligned}$$

Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \frac{1}{1+(e^x)^2} - \frac{1}{2}\frac{1-\tanh^2(x/2)}{1+\tanh^2(x/2)} \\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2}\frac{1-\tanh^2(x/2)}{1+\tanh^2(x/2)} \\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2}\frac{\cosh^2(x/2)-\sinh^2(x/2)}{\cosh^2(x/2)+\sinh^2(x/2)} \\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{1}{2}\frac{1}{(e^x+e^{-x})/2} \\ &= \frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{e^x}{1+e^{2x}} = 0 \end{aligned}$$

La fonction f est donc constante sur $\mathbb{R}$. Comme $f(0) = \arctan(1) = \pi/4$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \arctan\left(e^x\right) = \arctan\left(\tanh(x/2)\right) + \frac{\pi}{4}$$

3.11. On a pour tout réel x,

$$\left|f(x)\right| \leqslant |x|^3$$

donc $f(x) \underset{x\to 0}{\ll} g(x)$.

3.12. Comme $a^x/b^x = (a/b)^x \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, on a $a^x \underset{x\to+\infty}{\ll} b^x$.

3.13.

a) Comme $\sin^{-4}(u) \underset{u\to 0}{\sim} u^{-4}$ et $u^{-4} \underset{u\to 0}{\ll} u^{-2}$, on a

$$\frac{1}{u^2} - \frac{1}{\sin^4(u)} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{u^2}$$

et ainsi $\dfrac{1}{u^2} - \dfrac{1}{\sin^4(u)} \xrightarrow[u\to 0]{} +\infty$.

b) On a

$$\frac{2^u - 1}{\sin(u)} = \frac{e^{u\ln(2)} - 1}{\sin(u)} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{\ln(2)u}{u}$$

ainsi $\dfrac{2^u-1}{\sin(u)} \xrightarrow[u\to 0]{} \ln(2)$.

c) On a

$$2^u - 1 = e^{u\ln(2)} - 1 \underset{u\to 0}{=} u\ln(2) + o(u)$$

et $\sin(u) = u + o(u)$ ainsi

$$2^u - 1 - \sin(u) = (\ln(2) - 1)u + o(u)$$

et donc

$$\frac{2^u - 1 - \sin(u)}{\sin(u)} \underset{u\to 0}{=\sim} \frac{(\ln(2)-1)u}{u}$$

Ainsi $\dfrac{2^u - 1 - \sin(u)}{\ln(1+u)} \xrightarrow[u\to 0]{} \ln(2) - 1$.

d) Comme $\tan(u) \xrightarrow[u\to 0]{} 0$, on a

$$\begin{aligned}\operatorname{cotan}^3(u)\ln(1+\tan(u)) &\underset{u\to 0}{\sim} \operatorname{cotan}^3(u)\tan(u)\\ &\underset{u\to 0}{\sim} \operatorname{cotan}^2(u)\end{aligned}$$

Comme $\operatorname{cotan}^2(u) \xrightarrow[u\to 0]{} +\infty$, on a

$$(1+\tan(u))^{\operatorname{cotan}^3(u)} \xrightarrow[u\to 0]{} +\infty$$