AN 1 | Nombres réels et introduction à la topologie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

L'objectif de ce chapitre est de retrouver, à partir d'une axiomatique de $\mathbb{R}$, les principales propriétés de cet ensemble. Nous nous attarderons en particulier sur la manipulation des développements décimaux, même si ces derniers ne seront fondés que plus tardivement dans le cours d'analyse. La leçon s'achèvera sur une brève introduction à la topologie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, préalable à la définition de la notion de limite pour les suites et les fonctions.

DURANT de nombreux siècles, les Mathématiciens ont considéré les nombres complexes comme donnés *a priori* à l'instar des points et des droites en Géométrie classique. Ils se représentaient l'ensemble des nombres réels comme le continuum d'une droite graduée.

Dedekind

C'est la crise provoquée par les débuts de la théorie des ensembles au milieu du XIXe siècle qui mena progressivement les savants à proposer des constructions de l'ensemble des nombres réels.

De toutes les constructions des ensembles de nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, celle de la droite réelle est de loin la plus technique et abstraite.

Il est profitable d'attendre un cours de L3 afin de l'aborder avec un peu plus d'expérience.

La première construction date de 1869 et on la doit à **Méray** via des suites de Cauchy, puis **Heine** exposa en 1872 les travaux de **Cantor** sur ce sujet et enfin **Dedekind** proposa sa célèbre construction par les coupures la même année.

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

À défaut d'une construction de l'ensemble des nombres réels, nous donnerons comme point de départ une définition axiomatique de $\mathbb{R}$. Tous ensembles vérifiant les conditions exposées ci-dessous sont isomorphes au sens défini dans le chapitre ALG 2.

Proposition 1.1. (Axiomatique de $\mathbb{R}$). *Il existe un ensemble $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

1. *$\mathbb{R}$ contient tous les nombres rationnels.*

2. *$\mathbb{R}$ est muni de deux opérations $+$ et $\times$ vérifiant les propriétés suivantes :*

- **a.** *Elles coïncident avec les opérations usuelles sur les rationnels.*
- **b.** *Associativité de $+$ et $\times$:* $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ (x+y)+z = x+(y+z)$ *et* $(x\times y)\times z = x\times(y\times z)$.
- **c.** *Commutativité de $+$ et $\times$:* $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x+y = y+x$ *et* $x\times y = y\times x$.
- **d.** *Les réels 0 et 1 sont neutres pour $+$ et $\times$:* $\forall x\in\mathbb{R},\ x+0=x$ *et* $x\times 1 = x$.
- **e.** *Tout réel x admet un opposé, i.e. un élément x' tel que $x+x'=0$ (on le note $-x$).*
- **f.** *Tout réel x non nul admet un inverse, i.e. $\exists x''$ tel que $xx''=1$ (on le note x^{-1} ou encore $\frac{1}{x}$).*
- **g.** *Distributivité de la multiplication sur l'addition :* $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3\ ,\ (x+y)\times z = x\times z + y\times z$.

3. *L'ensemble $\mathbb{R}$ est muni d'une relation d'ordre $\leqslant$ totale prolongeant celle de $\mathbb{Q}$ et vérifiant :*

- **a.** *L'addition est compatible avec la relation d'ordre :* $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\ x\leqslant y \implies x+z\leqslant y+z$.
- **b.** *La multiplication est positivement compatible avec la relation d'ordre :*
$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^3,\ \forall z\in\mathbb{R},\ \big(x\leqslant y \text{ et } z\geqslant 0\big) \implies x\times z\leqslant y\times z$$
- **c.** *Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.*

Pour deux réels x et y, on dit que x est strictement inférieur à y (notation $x<y$) si $x\leqslant y$ et $x\neq y$. On définit classiquement $\mathbb{R}^* := \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $\mathbb{R}_+ := \{x\in\mathbb{R}\,;\, x\geqslant 0\}$ et $\mathbb{R}_- := \{x\in\mathbb{R}\,;\, x\leqslant 0\}$, de même pour les variantes $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ épointées de 0.

La relation $\leqslant$ étant totale, deux réels quelconques x et y sont toujours comparables, i.e. vérifient $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$. Cette propriété permet de définition par récurrence le maximum de n nombres réels.

Notation 1.2. Maximum et minimum d'un nombre fini de réels

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. *On note* $\max(x, y)$ *et* $\min(x, y)$ *respectivement le plus grand et le plus petit des deux nombres* x *et* y. *On généralise (récurrence) à un nombre fini de réels :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1},\ \max\big(x_1, \ldots, x_{n+1}\big) = \max\Big(\max\big(x_1, \ldots, x_n\big), x_{n+1}\Big)$$

On en déduit facilement que toute partie finie de $\mathbb{R}$ (i.e. ayant un nombre fini d'éléments) admet un maximum. On adapte cette définition et cette dernière propriété au cas d'un minimum.

Les axiomes opératoires (cf. le 2. ci-dessus) sont bien connus des lecteurs, nous ne reviendrons pas sur eux. Le lecteur est renvoyé au cours ALG 2 pour les règles d'exponentiation, que nous avons énoncé directement dans $\mathbb{C}$. Dans la suite de ce paragraphe, nous allons principalement mettre l'accent sur les conséquences des axiomes 3., consacrés à la relation d'ordre.

1.1. Règles de calcul sur les inégalités

On déduit de cette axiomatique de nombreuses propriétés usuelles de $\mathbb{R}$. Par exemple, pour tout réel x, $x \leqslant 0$ équivaut à $-x \geqslant 0$. En effet, pour un réel x positif, on a par compatibilité de la relation d'ordre avec l'addition :

$$0 + (-x) \leqslant x + (-x)$$

Ainsi $-x \leqslant 0$. La réciproque en découle en appliquant le résultat à $-x$ au lieu de x.

Les règles de calcul usuelles ont été regroupées dans l'encadré de la page suivante.

Démontrons par exemple les résultats de superposition pour les sommes. Considérons quatre nombres réels a, a', b et b' tels que $a \leqslant b$ et $a' \leqslant b'$. On déduit de l'axiome 3.a. que $a + a' \leqslant b + a'$ et $a' + b \leqslant b' + b$. Ainsi par transitivité de la relation $\leqslant$, on en déduit que $a + a' \leqslant b + b'$. Par récurrence sur le nombre de termes, on en déduit la propriété générale de superposition :

$$\big(\,\forall i \in [\![1, n]\!],\ a_i \leqslant b_i\,\big) \implies \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i$$

La propriété est vraie aux rangs 1 et 2 (par ce qui précède). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_1, \ldots, a_{n+1}, b_1, \ldots, b_{n+1}$ vérifiant $a_i \leqslant b_i$ pour tous les indices i de 1 à $n+1$. On déduit de l'hypothèse au rang n que $\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i$. On déduit alors de ce qui précède que :

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} \leqslant \sum_{i=1}^{n} b_i + b_{n+1}$$

d'où le résultat au rang $n+1$. Passons au cas d'une superposition d'inégalité dont l'une au moins est stricte. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels tels que $a_i \leqslant b_i$ pour tout indice i entre 1 et n et tel qu'il existe un indice i_0 entre 1 et n vérifiant $a_{i_0} < b_{i_0}$. On alors

$$\sum_{i=1}^{n} b_i - \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) = b_{i_0} - a_{i_0} + \sum_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_0\}} (b_i - a_i)$$

Posons $x := b_{i_0} - a_{i_0}$ et $y := \sum_{i \in [\![1,n]\!] \setminus \{i_0\}} (b_i - a_i)$. On sait par le point précédent que $y \geqslant 0$. On sait également que $x > 0$. Il reste à justifier que $x + y > 0$. On sait déjà que $x + y \geqslant 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $x+y=0$. On aurait alors $x=-y\leqslant 0$ (cf. le préambule de ce paragraphe) ce qui est absurde. Les autres propriétés se démontrent avec des arguments analogues (une récurrence pour le produit).

Opérations et inégalités

- ▷ *Opposés* : pour tous réels a,b et c, on a $a\leqslant b\leqslant c$ *si et seulement si* $-c\leqslant -b\leqslant -a$.
- ▷ *Multiplication* : pour tous réels a,b,λ et μ avec $\lambda>0$ et $\mu<0$, $\begin{cases} a\leqslant b \iff \lambda a\leqslant \lambda b \\ a\leqslant b \iff \mu b\leqslant \mu a\end{cases}$
- ▷ *Superposition par somme* : pour tous réels a,b,a' et b', $\begin{cases} a \leqslant b \\ a' \leqslant b'\end{cases} \Longrightarrow a+a'\leqslant b+b'$.
- ▷ On généralise par récurrence à n couples : $(\forall i\in[\![1,n]\!],\ a_i\leqslant b_i) \Longrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i\leqslant \sum_{i=1}^n b_i$.
- ▷ $\Big((\forall i\in[\![1,n]\!],\ a_i\leqslant b_i) \quad\text{et}\quad \big(\exists j\in[\![1,n]\!],\ a_j<b_j\big)\Big) \Longrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^n a_i< \sum_{i=1}^n b_i$.
- ▷ *Superposition par produit* : pour tous réels a,b,a' et b', $\begin{cases} 0\leqslant a \leqslant b \\ 0\leqslant a' \leqslant b'\end{cases} \Longrightarrow aa'\leqslant bb'$.
- ▷ On généralise par récurrence à n couples : $(\forall i\in[\![1,n]\!],\ 0\leqslant a_i\leqslant b_i) \Longrightarrow \displaystyle\prod_{i=1}^n a_i\leqslant \prod_{i=1}^n b_i$.
- ▷ *Recentrer des inégalités* : $\forall (a,x,u,b)\in\mathbb{R}^4,\quad x-a\leqslant u\leqslant x-b \iff u+b\leqslant x\leqslant u+a$.
- ▷ *Inverses* : deux nombres de même signe sont rangés dans l'ordre inverse de leurs inverses.
- ▷ Une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous ces réels sont nuls.
- ▷ Si x et y sont positifs, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $x\leqslant y \iff x^n\leqslant y^n$.

Attention, on peut additionner membre à membre des inégalités mais pas les soustraire ! Par exemple, on a $1<3$ et $4<7$ mais l'inégalité $1-4<3-7$ est fausse.

Comment encadrer une différence ?

$\begin{cases} m' \leqslant a' \leqslant \mathrm{M}' \\ m \leqslant a \leqslant \mathrm{M}\end{cases} \Longrightarrow m'-\mathrm{M}\leqslant a'-a\leqslant \mathrm{M}'-m$; pour majorer $a'-a$, il suffit de $\begin{cases}\text{majorer } a' \\ \text{minorer } a\end{cases}$.

De même, on ne peut diviser membre à membre deux inégalités entre des nombres strictement positifs. Par exemple, on a $1<2$ et $4<10$ mais l'inégalité $\frac{1}{4}<\frac{2}{10}$ est fausse.

Comment encadrer un quotient ?

$\begin{cases} 0< m' \leqslant a' \leqslant \mathrm{M}' \\ 0< m \leqslant a \leqslant \mathrm{M}\end{cases} \Longrightarrow \dfrac{m'}{\mathrm{M}}\leqslant \dfrac{a'}{a}\leqslant \dfrac{\mathrm{M}'}{m}$; pour majorer $\dfrac{a'}{a}$, il suffit de $\begin{cases}\text{majorer } a' \\ \text{minorer } a\end{cases}$.

On retiendra aussi que la comparaison de deux fractions peut se faire via les produits en croix :

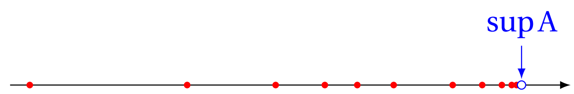
$$\forall (a,b,c,d)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^4,\ \frac{a}{b}\leqslant\frac{c}{d} \iff ad\leqslant bc$$

Exemple 1.3. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $-1 < a < 4$ et $-3 < b < -1$.
Donner des encadrements de $a+b$, $a-b$, ab et $\dfrac{a}{b}\cdot$

1.2. Bornes supérieures ou inférieures

On rappelle que la borne supérieure d'une partie non vide A est, sous réserve d'existence, le plus petit des majorants de A. Il ne faut pas confondre cette notion avec celle de maximum (synonyme de plus grand élément) : A admet un maximum s'il existe un élément de A plus grand (au sens large) que tous les autres.

D'un point de vue intuitif, la borne supérieure d'une partie A de $\mathbb{R}$ (supposée non vide et majoré) est un majorant M de A tel qu'il existe des éléments de A arbitrairement proches de M : on peut s'approcher aussi près que l'on veut de M en restant dans A.



Par exemple, $A_1 := \mathbb{Q}$ n'admet pas de borne supérieure car n'est pas majorée et $A_2 = \mathbb{Q} \cap]0,1[$ admet une borne supérieure (qui vaut 1 car l'ensemble de ses majorants est $[1,+\infty[$) mais pas de maximum car $1 \notin A_2$. Ainsi, il peut exister une borne supérieure mais pas de maximum mais tout maximum est une borne supérieure.

Passage à la borne supérieure

Soit A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$ vérifiant $\forall a \in A,\ a \leqslant M$.

- ▷ On peut alors affirmer que $\sup A$ existe et vérifie $\sup A \leqslant M$.
- ▷ Le raisonnement permettant de passer de la proposition « $\forall a \in A,\ a \leqslant M$ » à « $\sup A \leqslant M$ » s'appelle *un passage à la borne supérieure*.

Exemple 1.4. L'ensemble défini par $A := \left\{2(-1)^n + \frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ admet-il :
Un maximum ? Un minimum ? Une borne supérieure ? Une borne inférieure ? On accompagnera ses réponses d'un calcul le cas échéant.

La propriété de la borne supérieure (cf. les axiomes de $\mathbb{R}$) admet une variante pour les bornes inférieures.

Proposition 1.5. *Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.*

Proposition 1.6. (Propriétés des bornes)
Soit A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
Si B est majorée, alors A aussi et $\sup A \leqslant \sup B$. Si B est minorée, alors A aussi et $\inf B \leqslant \inf A$.

La droite numérique achevée est utile pour étendre certaines définition aux infinis. Avec la définition suivante, on pourra écrire que toute partie de $\mathbb{R}$ non vide admet des bornes dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition 1.7. Droite numérique achevée

On note $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. *Dans le cas d'une partie* A *non vide de* $\mathbb{R}$ *non majorée (resp. non minorée), on posera* $\sup \mathrm{A} := +\infty$ *(resp.* $\inf \mathrm{A} := -\infty$*).*

La propriété d'Archimède est un lemme très utile lors de l'étude des suites numériques.

Lemme 1.8. (Propriété d'Archimède)
Soit a et x deux réels tels que $a > 0$. Il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ tel que $n_0 a > x$.

Tests

1.1. Reprendre l'exemple 1.4. avec l'ensemble $\mathrm{A} := \left\{1 - \frac{1}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1.3. Convexité et intervalles

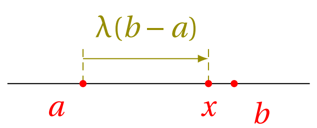
Commençons par un petit rappel sur la typologie des intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 1.9. Intervalles de $\mathbb{R}$

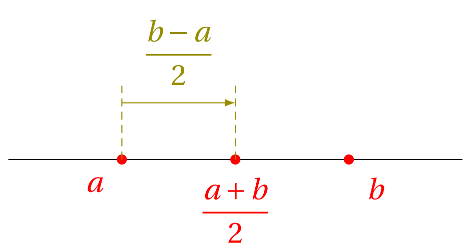
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, *on pose* $[x, y] := \left\{t \in \mathbb{R}\,;\, x \leqslant t \leqslant y\right\}$, $[x, +\infty[:= \{t \in \mathbb{R}\,;\, x \leqslant t\}$, *etc.*

- ▷ *On appelle intervalle de* $\mathbb{R}$ *tout sous-ensemble de* $\mathbb{R}$ *d'un des types précédents.*
- ▷ *On appelle vrai intervalle tout intervalle ayant une infinité d'éléments.*
- ▷ *On appelle segment tout intervalle de la forme* $[x, y]$ *avec* $x \leqslant y$.
- ▷ *Soit* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $x \leqslant y$. *On appelle longueur de intervalle* $[x, y[$ *(ou* $]x, y]$*, etc.) le réel* $y - x$.

On peut facilement décrire certains de ces intervalles au moyen de la notion de combinaison linéaire convexe.



On obtient donc le milieu pour $\lambda = \frac{1}{2}$.



Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. On appelle combinaison linéaire convexe de a et b tout réel de la forme

$$(1-\lambda)a + \lambda b \ \text{ où } \ \lambda \in [0, 1]$$

L'interprétation géométrique de $\lambda \in [0, 1]$ dans

$$x = (1-\lambda)a + \lambda b = a + \lambda(b - a)$$

est claire : le réel λ est *la fraction de la longueur totale* $b - a$ à laquelle se trouve x par rapport à l'extrémité a. Il est intéressant de comprendre $(1-\lambda)a + \lambda b$, pour $\lambda \in [0, 1]$, comme une moyenne pondérée des points a et b.

On obtient facilement

$$[a, b] = \left\{(1-\lambda)a + \lambda b\,;\, \lambda \in [0, 1]\right\} \ , \ ]a, b] = \left\{(1-\lambda)a + \lambda b\,;\, \lambda \in]01]\right\} \ \text{ et } \ [a, b[= \left\{(1-\lambda)a + \lambda b\,;\, \lambda \in [0, 1[\right\}$$

Proposition 1.10. (Caractérisation des intervalles)
Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si elle est convexe (i.e. $\forall (a, b) \in \mathrm{I}^2,\ [a, b] \subset \mathrm{I}$).

Tests

1.2.

a) Répondre sans démonstration aux questions suivantes :

▷ L'intersection de deux intervalles est-elle un intervalle ?

▷ La réunion de deux intervalles est-elle un intervalle?

b) Donner sans justification une condition nécessaire ou suffisante pour que la réunion de deux intervalles fermés soit un intervalle.

1.4. Deux outils fondamentaux : la valeur absolue et la partie entière

La valeur absolue est l'outil au fondement des notions de convergence et de limite.

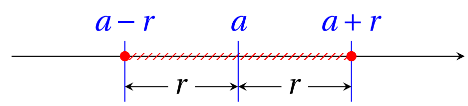
Définition 1.11. La valeur absolue

Pour tout réel x, on note $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

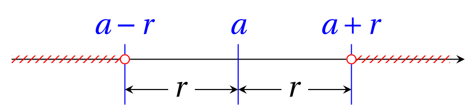
La valeur absolue permet de définir *la distance* $|x-y|$ *entre deux nombres réels* x et y.
Cette distance permet des interprétations géométriques sur une droite graduée : cf. ci-contre les représentations des réels à une distance de a inférieure à r et des réels à une distance de a strictement supérieure à r.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $r > 0$.

▷ Réels x vérifiant $|x-a| \leqslant r$:



▷ Réels x vérifiant $|x-a| > r$:



On reconnaît respectivement $[a-r, a+r]$ et $]-\infty, a-r[\,\cup\,]a+r, +\infty[$.

Proposition 1.12. (Propriétés de la valeur absolue).

a) Pour tout $(x,a) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+$, $|x-a| \leqslant r \iff a-r \leqslant x \leqslant a+r$.

b) Pour tout $(x,a) \in \mathbb{R}^2$ et $r \in \mathbb{R}_+$, $|x-a| > r \iff x < a-r$ ou $x > a+r$.

c) Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x| \times |y|$, $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ et $|x+y| = |x|+|y| \iff xy \geqslant 0$.

d) Inégalité triangulaire généralisée : pour $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $x_1, \ldots, x_n$, $\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |x_k|$.
Il y a égalité si seulement si les x_k sont tous de même signe.

Exemple 1.13. Variations sur la valeur absolue
Quelques résultats classiques.

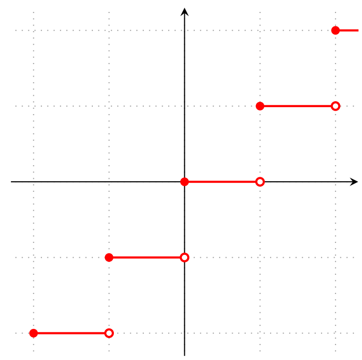
a) Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\left|\dfrac{x+1}{x-3}\right| \leqslant 1$.

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : $|x+3| > 5$ puis $|2x-4| \leqslant |x+2|$.

c) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $\max(a,b) = \dfrac{a+b+|a-b|}{2}\cdot$ Formule analogue pour $\min(a,b)$?

Définition 1.14. La partie entière

Pour tout réel x, on appelle partie entière de x et on note $\lfloor x \rfloor$ l'unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \leqslant x < k+1$.



Par exemple, $\lfloor 5,78 \rfloor = 5$. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand des entiers relatifs inférieurs à x et, si x est positif, $x - \lfloor x \rfloor$ est la partie décimale de x, par exemple $5,78 - \lfloor 5,78 \rfloor = 0,78$.

Le graphe de $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est représenté ci-contre.

Proposition 1.15. (Propriétés de la partie entière).
$\forall x,\ x-1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$ et $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $\forall (x,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z},\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Exemple 1.16. La partie entière est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \dfrac{\lfloor 2x \rfloor}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$. Résoudre $\lfloor 2x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor$, $\lfloor x+3 \rfloor = \lfloor x-1 \rfloor$ puis $\lfloor 2x \rfloor = 1 - \lfloor x \rfloor$.

Tests

1.3. On définit *la partie fractionnaire* de $x \in \mathbb{R}$ par $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

a) Calculer $\{54,465\}$ et $\{-36,456\}$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comparer $\{x\}$ et $\{-x\}$.

c) Prouver que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \{x\}$ est périodique et tracer son graphe.

2. Application aux équations algébriques

Dans ce paragraphe, on montre comment retrouver la théorie des équations du second degré à coefficients réels à partir de l'axiomatique de $\mathbb{R}$ que nous avons développée.

2.1. Racine n-ème d'un nombre réel positif

Les équations du second degré reposent sur la notion de racine carrée. Nous évoquerons ici plus généralement le cas des racines n-èmes.

Définition 1.17. Racine n-ème d'un réel positif

Pour tout $\delta \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel positif x tel que $x^n = \delta$; on le note $\sqrt[n]{\delta}$ (« racine n-ème de δ »). Pour $n = 2$, on note plus sobrement $\sqrt{\delta}$ la racine carrée d'un réel δ positif. En particulier, on retiendra que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sqrt{x^2} = |x|$$

Soit $\delta \in \mathbb{R}_+$. Comme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 - \delta = x - \sqrt{\delta}^2 = \left(x - \sqrt{\delta}\right)\left(x + \sqrt{\delta}\right)$$

l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^2 = \delta$ est $\left\{-\sqrt{\delta}, \sqrt{\delta}\right\}$.

Il faut connaître la technique de la quantité conjuguée qui est utile pour manipuler des différences de racines carrées.

Formule de la quantité conjuguée

Pour tout $(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ est la quantité conjuguée de $\sqrt{a}-\sqrt{b}$:

$$\sqrt{a}-\sqrt{b} = \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\times\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

Exemple 1.18. Cas de la suite de terme général $u_n := \sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.
Cette suite décroît vers 0.

2.2. Équations du second degré

Toute équation du second degré se ramène à une équation de la forme $x^2=\delta$ d'inconnue x. Soit a, b et c trois nombres réels tels que $a\neq 0$. Pour tout nombre réel x,

$$\mathrm{P}(x) := ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right)$$

où $\Delta := b^2-4ac$. Cette transformation du trinôme ax^2+bx+c s'appelle *mise sous forme canonique*.

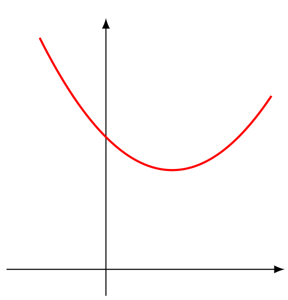
▷ Cas où $\Delta<0$. On a $\forall x\in\mathbb{R}$, $\mathrm{P}(x)$ est non nul et du signe de a car

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$$

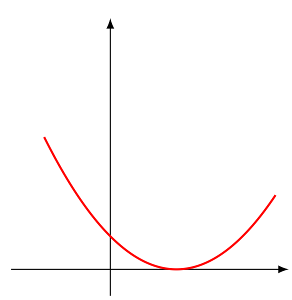
▷ Cas où $\Delta\geqslant 0$. On a $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{P}(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$ où $x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ car

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\sqrt{\Delta}^2}{4a^2}\right) = a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

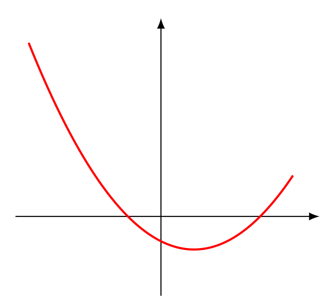
On retiendra l'allure du graphe de $x\longmapsto \mathrm{P}(x)$ (qui est une parabole) en fonction des signes de Δ et a :



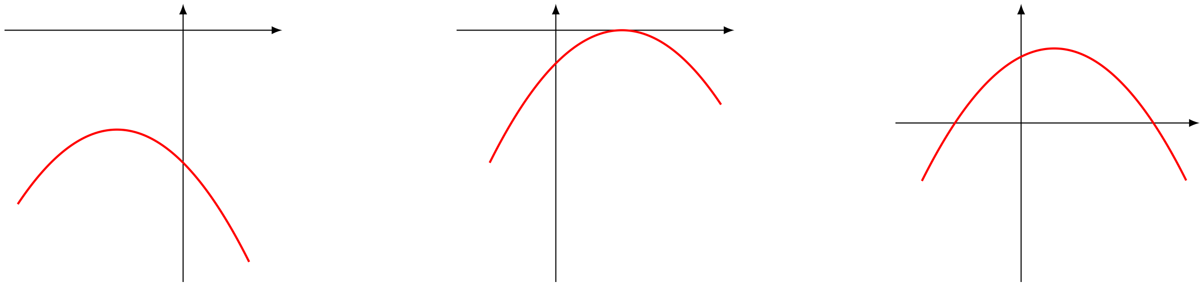
$\Delta<0$ et $a>0$



$\Delta=0$ et $a>0$



$\Delta>0$ et $a>0$



$\Delta < 0$ et $a < 0$ $\qquad$ $\Delta = 0$ et $a < 0$ $\qquad$ $\Delta > 0$ et $a < 0$

Exemple 1.19. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a > 0$ et, pour tout réel x, $\mathrm{P}(x) := ax^2 + bx + c$.
Déterminer une CNS pour que $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) \geqslant 0$.

3. Approximations décimales d'un nombre réel

En tant qu'usager régulier d'une calculatrice depuis de nombreuses années, le lecteur a pris l'habitude de manipuler les nombres réels au travers d'approximations décimales. Par exemple, en demandant $\sqrt{2}$ à une machine quelconque, on obtient instantanément :

$$1,41421356237\cdots$$

L'objectif de ce paragraphe est d'effectuer quelques rappels (voire plus) sur les développements décimaux et d'apporter un éclairage sur la façon de les obtenir. On peut bien entendu se limiter aux réels appartenant à $[0,1[$ quitte à considérer $x - \lfloor x \rfloor$. Dans le cas d'un nombre réel positif x, la partie entière $\lfloor x \rfloor$ contribue aux chiffres à gauche de la virgule dans le développement décimal :

$$\sqrt{2} = 1,41421356237\cdots = \underbrace{1}_{\text{Partie entière de } \sqrt{2}} + \underbrace{0,41421356237\cdots}_{\text{Partie fractionnaire de } \sqrt{2}}$$

3.1. Introduction au développement décimal d'un nombre réel

La notion de développement décimal repose sur le théorème suivant : pour tout réel x dans $[0,1[$, il existe une unique suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ à valeurs dans $[\![0,9]\!]$ qui ne stationne[1] pas à 9 telle que

$$x = 0, c_1 c_2 c_3 \cdots c_n \cdots$$

ce qui signifie

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{10^n} \quad \left(\text{cette somme infinie étant à comprendre comme } \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} \frac{c_n}{10^n}\right)$$

Le chiffre c_n est appelé n-ème décimale de x. Il nous faudra attendre le chapitre sur les séries numériques avant de justifier rigoureusement ce résultat. L'hypothèse de non stationnarité à 9, mentionnée ci-dessus, est essentielle comme l'illustre le contre-exemple suivant :

$$1 = 1,00000\cdots = 0,99999\cdots$$

En effet, par la formule des sommes géométriques,

1. C'est-à-dire qui n'est pas constante égale à 9 à partir d'un certain rang.

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10} \times \frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = 1 - \frac{1}{10^n} \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1$$

Les nombres tels que $c_n = 0$ à partir d'un certains rang sont qualifiés de décimaux. Ce sont les nombres de la forme $\frac{k}{10^n}$ où $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$. Par exemple,

$$0{,}000561 = 561 \times 10^{-6} = \frac{561}{10^6}$$

3.2. Approximations à ε-près d'un nombre réel

Pour déterminer les décimales d'un nombre x, une idée naturelle est de s'aider d'un autre nombre a dont on connaît les décimales et « *assez proche* » de x. L'objectif de ce paragraphe est de quantifier cela précisément.

Définition 1.20. Valeur approchée à ε-près

Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$, x et a deux nombres réels.

- *On dit que a est une valeur approchée de x à ε-près si $|x-a| < \varepsilon$.*
- *On parle de valeur approchée par excès si $a \geqslant x$, et par défaut si $x \leqslant a$.*

Par exemple, $1{,}41$ est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à un centième-près par défaut car $1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$ (il suffit de remarquer que $(1{,}41)^2 < 2 < (1{,}42)^2$). On en déduit que l'écriture sous forme décimale de $\sqrt{2}$ est de la forme $1{,}41\cdots$ Plus généralement, le calcul des décimales repose sur le résultat suivant :

Condition nécessaire et suffisante pour le calcul de m décimales

Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1[$, les m premières décimales de x sont $c_1, \ldots, c_m$ *si et seulement si*

$$0, c_1 c_2 \cdots c_m \leqslant x < 0, c_1 c_2 \cdots c_m + 10^{-m}$$

Dans ce qui précède, on dispose d'une approximation décimale par défaut de x à 10^{-m}. L'étude du cas général d'une approximation par un nombre qui n'est pas nécessairement décimal fait apparaître quelques subtilités. Supposons par exemple que

$$0, c_1 c_2 \cdots c_n c_{n+1} \cdots \leqslant x < 0, c_1 c_2 \cdots c_n c_{n+1} \cdots + 10^{-n}$$

On obtient donc directement

$$0 \leqslant x - 0, c_1 \cdots c_{n-1} < (c_n + 1) 10^{-n} + 10^{-n}$$

Si $c_n \leqslant 8$, alors $(c_n+1)10^{-n} + 10^{-n} \leqslant 10 \times 10^{-n} = 10^{-(n-1)}$ et l'on en déduit que les $n-1$ premières décimales de x sont $c_1, \ldots, c_{n-1}$. Lorsque $c_n = 9$, on ne peut rien conclure. Par exemple, $0{,}999$ est une valeur approchée à 10^{-3}-près de 1 mais les deux premières décimales de $0{,}999$ et 1 sont différentes. On adapte ce qui précède à une approximation par défaut à 10^{-n}-près.

Calcul exact de n décimales

Si $a = 0, c_1 \cdots c_n \cdots$ est valeur approchée de x à 10^{-n}-près, alors :

▷ Si $a \leqslant x$ et $c_n \neq 9$, alors x et a ont les mêmes $n-1$ premières décimales.

▷ Si $a \geqslant x$ et $c_n \neq 0$, alors x et a ont les mêmes $n-1$ premières décimales.

Sinon, on ne peut conclure et il faudra en pratique tenter une approximation à un ordre strictement supérieur à n pour calculer des décimales.

3.3. Comment calculer les décimales d'un nombre réel ?

Comme nous allons le voir, le calcul du développement décimal d'un nombre réel est immédiat si celui est décimal, possible via un algorithme dans le cas d'un rationnel et peut s'avérer très délicat dans le cas d'un irrationnel.

Nombres décimaux.

Un nombre décimal positif est par définition de la forme $\frac{k}{10^n}$ où $(k,n) \in \mathbb{N}^2$. Le développement d'un tel nombre s'obtient classiquement à partir de l'écriture en base 10 de l'entier k en décalant la virgule de n crans sur la gauche :

$$\frac{123}{10^5} = 0,00123 \ \text{ car } \ \frac{123}{10^5} = \frac{1\times 10^2 + 2\times 10^1 + 3\times 10^0}{10^5} = \frac{1}{10^3} + \frac{2}{10^4} + \frac{2}{10^5}$$

Nombres rationnels.

Plus généralement, le développement d'un rationnel positif $\frac{p}{q}$ où $(p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$ qui n'est pas décimal, peut être obtenu au moyen de l'algorithme usuel :

$$\begin{array}{r|l} 1 & 7 \\ \cline{2-2} & 0 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 10 & 7 \\ \cline{2-2} 3 & 0,1 \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 100 & 7 \\ \cline{2-2} 30 & 0,14 \\ 2 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1000 & 7 \\ \cline{2-2} 300 & 0,142 \\ 20 & \\ 6 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 10000 & 7 \\ \cline{2-2} 3000 & 0,1428 \\ 200 & \\ 60 & \\ 4 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 100000 & 7 \\ \cline{2-2} 30000 & 0,14285 \\ 2000 & \\ 600 & \\ 40 & \\ 5 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 1000000 & 7 \\ \cline{2-2} 300000 & 0,142857 \\ 20000 & \\ 6000 & \\ 400 & \\ 50 & \\ 1 & \end{array}$$

À partir du retour du chiffre 1, on retrouve la même séquence. Ainsi, $\frac{1}{7} = 0,\overline{142857}$, la séquence surlignée étant répétée à l'infini. Plus généralement, comme les restes possibles dans la division par q sont en nombre fini (il n'y a que $0,\ldots,\ q-1$), la suite des décimales d'un rationnel sera toujours périodique à partir d'un certain rang. La réciproque est vraie. Considérons par exemple $x := 0,11\overline{123}$. Posons $y := 100x - 11 = 0,\overline{123}$. Ce nombre vérifie l'équation :

$$1000y - 123 = y$$

d'où $y = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$ puis $100x = 11 + \dfrac{41}{333} = \dfrac{3704}{333}$ puis $x = \dfrac{926}{8325}$.

Proposition 1.21. (Caractérisation des décimaux par leur développment décimal).
Un réel est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique APCR.

Nombres irrationnels.

Dans le cas d'un nombre irrationnel, l'idée est de chercher des approximations rationnelles explicites de ce réel et d'appliquer la méthode précédente.

Illustrons cette méthode sur le nombre irrationnel $\sqrt{2}$. Pour tout entier naturel n, on démontre par récurrence l'existence de $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \left(\sqrt{2}-1\right)^n = a_n - b_n\sqrt{2}$$

Le couple $(a_0, b_0) := (1,0)$ convient clairement au rang zéro. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons l'existence de $(a_n, b_n) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant la relation ci-dessus. On a alors

$$\left(\sqrt{2}+1\right)^{n+1} = \left(a_n + b_n\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right) = a_n + 2b_n + (a_n+b_n)\sqrt{2}$$

Posons $(a_{n+1}, b_{n+1}) := (a_n + 2b_n, a_n + b_n)$. Comme a_n et b_n sont des entiers naturels, il en est de même de a_{n+1} et b_{n+1}. De plus,

$$\left(\sqrt{2}-1\right)^{n+1} = \left(a_n - b_n\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right) = a_n + 2b_n - (a_n+b_n)\sqrt{2} = a_{n+1} - b_{n+1}\sqrt{2}$$

d'où la propriété au rang $n+1$. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$a_n = \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^n + \left(\sqrt{2}-1\right)^n}{2} \geqslant \frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^n}{2} \geqslant \frac{2^n}{2} \quad \text{et} \quad b_n = a_{n-1} + b_{n-1} \geqslant a_{n-1} \geqslant 2^{n-2}$$

Fixons à présent n dans $\mathbb{N}^*$. Comme $\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right) = 1$, on en déduit que

$$1 = \left(a_n + b_n\sqrt{2}\right)\left(a_n - b_n\sqrt{2}\right)$$

Ainsi $\frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} = \frac{1}{b_n\left(a_n + b_n\sqrt{2}\right)}$ et donc

$$0 < \frac{a_n}{b_n} - \sqrt{2} \leqslant \frac{1}{2^{n-2}\left(\sqrt{2}2^{n-1} + 2^{n-2}\right)} < \frac{1}{4^{n-2}\left(2\sqrt{2}+1\right)} < \frac{1}{3 \times 4^{n-2}}$$

Si on veut obtenir les deux premières décimales de $\sqrt{2}$, on recherche la plus petite valeur entière de n telle que $\frac{1}{3\times 4^{n-2}} \leqslant 10^{-3}$: il s'agit de $n = 7$. Après quelques itérations, on trouve

$$\frac{a_7}{b_7} = \frac{239}{169} \text{ et on trouve par l'algorithme rappelé ci-dessus que } \frac{239}{169} = 1,414\cdots$$

Comme l'approximation est par excès et que la troisième décimale n'est pas nulle, on peut en déduire que les deux premières décimales de $\sqrt{2}$ sont 4 et 1. Pour doubler le nombre de décimales et arriver à quatre, on passe à $n = 10$:

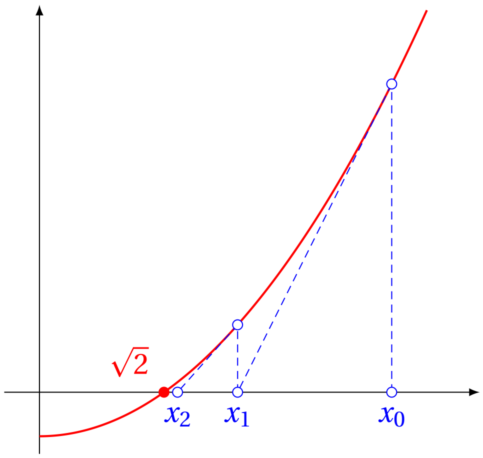
$$\frac{a_{10}}{b_{10}} = \frac{3363}{2378} \text{ et on trouve par l'algorithme rappelé ci-dessus que } \frac{3363}{2378} = 1,41421\cdots$$

Comme l'approximation est par excès et que la cinquième décimale n'est pas nulle, on peut en déduire que les quatre premières décimales de $\sqrt{2}$ sont 4, 1, 4 et 2. Plus généralement :

Nombre de décimales souhaitées	2	4	6	8	10	20	30	40	50
Rang à atteindre	7	10	13	17	20	37	53	70	86

Sous réserve, à chaque fois, d'obtenir une $(n+1)$-ème décimale non nulle.

Dans ce contexte, on comprend qu'il est intéressant de trouver des approximations de très bonne qualité de $\sqrt{2}$, i.e. d'avoir à itérer le moins possible pour obtenir une précision raisonnable. Illustrons cela sur une autre façon d'obtenir des approximations de $\sqrt{2}$. L'idée vient d'Isaac Newton (la postérité a d'ailleurs donné son nom à la méthode).



On cherche une approximation du zéro de $f : x \mapsto x^2 - 2$. Pour cela, on part de $x_0 := 2$ et on calcule l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente au graphe de f au point $\big(x_0, f(x_0)\big)$. L'équation de cette tangente est $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ d'où l'on tire l'abscisse x_1 du point d'intersection recherché :

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

On continue en recherchant l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente au graphe de f au point $\big(x_1, f(x_1)\big)$. En itérant le procédé, on obtient une suite récurrente :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

On devine que le *profil convexe* de la courbe à droite de son intersection avec l'axe des abscisses, va assurer une convergence rapide de nos approximation vers $\sqrt{2}$. D'autre part, comme x_0 est rationnel que la relation de récurrence assure l'hérédité de la rationnalité de x_n, on va bien obtenir des approximations rationnelles. Essayons d'estimer la précision de ces approximations. Posons $\delta_n := x_n - \sqrt{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut facilement démontrer par récurrence que $\sqrt{2} < x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\delta_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\delta_n}{2} - \frac{\delta_n}{\sqrt{2}x_n} = \frac{\delta_n^2}{2x_n}$$

Comme $x_n > \sqrt{2} > \frac{5}{4}$, on en déduit $0 \leqslant \delta_{n+1} \leqslant \frac{2\delta_n^2}{5}$ et on en déduit par une récurrence facile que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant \delta_n \leqslant \frac{5}{2}\left(\frac{2\delta_1}{5}\right)^{2^{n-1}} < \frac{5}{2}\left(\frac{1}{25}\right)^{2^{n-1}}$$

Car $\delta_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2} < \frac{1}{10}$. Si on veut obtenir les quatre premières décimales de $\sqrt{2}$, on recherche la plus petite valeur entière de n telle que $\frac{5}{2}\left(\frac{1}{25}\right)^{2^{n-1}} \leqslant 10^{-5}$: il s'agit de $n = 3$. Après quelques itérations, on trouve

$$x_3 = \frac{577}{408} \text{ et on trouve par l'algorithme rappelé ci-dessus que } \frac{577}{408} = 1{,}41421\cdots$$

Comme l'approximation est par excès et que la cinquième décimale ne vaut pas zéro, on peut en déduire que les quatre premières décimales de $\sqrt{2}$ sont 4, 1, 4 et 2. Plus généralement :

Nombre de décimales souhaitées	2	4	6	8	10	20	30	40	50
Rang à atteindre	3	3	4	4	5	5	6	6	7

On voit ici un réel gain de temps dans les calculs par rapport à la méthode précédente[2] !

2. Sous réserve, à chaque fois, d'obtenir une $(n+1)$-ème décimale non nulle.

4. Inégalités remarquables

4.1. Inégalités de Cauchy-Schwarz et arithmético-géométrique

Nous regroupons dans ce paragraphe deux inégalités forts classiques et d'usage courant.

Proposition 1.22. (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$.

Exemple 1.23. Des applications (dont l'inégalité de Minkowski)
Comparer $ab + bc + ca$ et $a^2 + b^2 + c^2$ pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots b_n$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$.

L'inégalité $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}$, valable pour des nombres réels positifs x et y quelconques, admet une généralisation appelée inégalité arithmético-géométrique [3].

Proposition 1.24. (Inégalité arithmético-géométrique).

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$.

Cette inégalité est souvent intéressante lorsqu'il faut minorer une somme. Par exemple, on peut en déduire que

$$\text{Pour tous réels } a \text{ et } b \text{ strictement positif, } \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$$

4.2. Encadrement d'une somme ou d'un produit

Afin d'encadrer une somme de réels ou d'un produit de réels positifs, on peut encadrer chacun des termes et on a applique les propriétés de superposition (cf. l'encadré de la page 4). On peut par exemple majorer et minorer par le nombre de termes multiplié par le plus grand ou le plus petit. Cette technique est intéressante par le plus petit et le plus grand terme sont « du même ordre de grandeur ».

Encadrement grossier d'une somme ou un produit

Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels tels que $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$.

On a $n \times a_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant n \times a_n$. Si de plus $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$, alors $a_1^n \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_i \leqslant a_n^n$.

3. Elle compare la moyenne arithmétique $\frac{x+y}{2}$ à la moyenne géométrique $\sqrt{xy}$.

Exemple 1.25. Deux illustrations.
Démontrer que $u_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{(n+1-k)(k+1)}} \geqslant 1$. Encadrer finement $v_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+k}}$.

Pour majorer un produit de réels positifs, il souvent intéressant d'utiliser l'inégalité de convexité de l'exponentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geqslant 1+x$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et des nombres réels $a_0, \ldots, a_n$ appartenant à $[-1, +\infty[$, on a

$$\prod_{k=0}^{n} (1+a_k) \leqslant \exp\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)$$

On se souviendra également de l'inégalité de concavité du logarithme :

$$\forall x \in]-1, \infty[,\ \ln(1+x) \leqslant x$$

4.3. Quelques pistes pour établir une inégalité

Nous regroupons dans ce paragraphe quelques principes élémentaires pour bien aborder un encadrement.

Simplifications préalables

Avant d'aborder la démonstration, il convient de simplifier au maximum l'inégalité en réduisant le nombre de variables, en la reformulant en une inégalité plus simple, en faisant apparaître des factorisations ou des formules usuelles.

Nous illustrerons notre propos par la célèbre inégalité de Bernoulli :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ (1+x)^n \geqslant 1+nx$$

Se ramener à l'étude d'une fonction.

L'inégalité est clairement une égalité si $n=0$ ou $n=1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x \mapsto (1+x)^n - nx$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f_n'(x) = n\big((1+x)^{n-1} - 1\big) \geqslant 0$ pour $x \in \mathbb{R}_+$. Comme $f_n(0) = 1$ et f_n est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que f_n est positive sur $\mathbb{R}_+$, ce qui démontre l'inégalité.

Reformuler l'inégalité.

On peut utiliser la formule du binôme. Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et un nombre réel x positif :

$$(1+x)^n - 1 - nx = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^k \geqslant 0$$

car $\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x = 1+nx$. De façon peut-être moins naturelle, on peut aussi faire appel à la formule de factorisation « $a^n - b^n$ » :

$$(1+x)^n - 1 = x \sum_{k=0}^{n-1} (1+x)^k \geqslant xn$$

car les n termes en $(1+x)^k$ sont minorés par 1.

Penser à une démonstration par récurrence.

L'inégalité peut se démontrer facilement par récurrence en remarquant que si $(1+x)^n \geqslant 1+nx$, alors

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \geqslant (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geqslant 1+(n+1)x$$

L'initialisation étant acquise comme mentionné ci-dessus.

5. Introduction à la topologie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$

Dans toute cette section $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. La topologie a pour objet de définir un cadre rigoureux au sein duquel pourra être définie la notion de limite et tout ce qui en découle (dérivée, intégrale, etc.).

5.1. Points intérieurs, points adhérents et voisinages d'un point

Nous exposerons dans ce bref paragraphe la notion de voisinage, essentielle pour définir celle de limite.

Définition 1.26. Boules

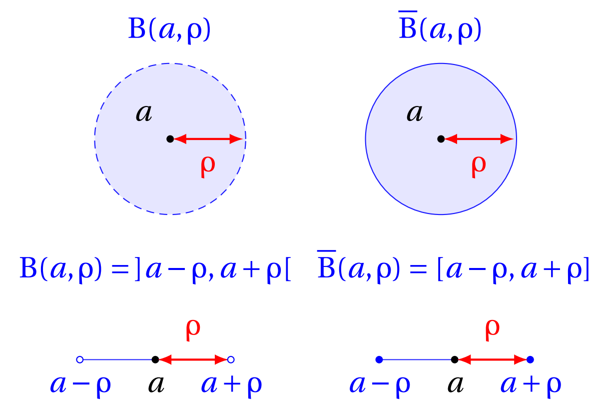
Soit $a \in \mathbb{K}$ *et* $\rho \in \mathbb{R}_+^*$.

- ▷ *On appelle boule ouverte de centre a et de rayon* ρ *:*

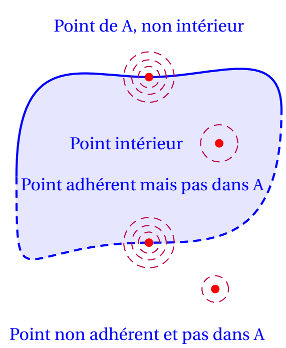
$$\mathrm{B}(a,\rho) := \left\{z \in \mathbb{K}\,;\, |z-a| < \rho\right\}$$

- ▷ *On appelle boule fermée de centre a et de rayon* ρ *:*

$$\overline{\mathrm{B}}(a,\rho) := \left\{z \in \mathbb{K}\,;\, |z-a| \leqslant \rho\right\}$$



On reconnaît des disques de centre a dans le cas de $\mathbb{C}$ et des intervalles centrés en a dans le cas de $\mathbb{R}$. En général, il n'y aura pas d'ambiguité sur le fait de travailler dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, nous n'aurons donc pas besoin d'une notation des boules distincte pour les cas complexes et réels.



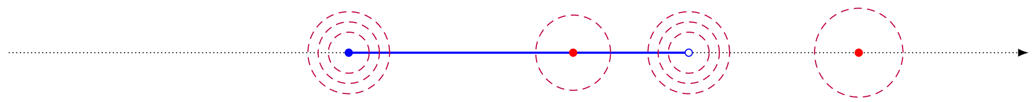
Définition 1.27. Point intérieur, voisinages, point adhérent

Soit A *une partie de* $\mathbb{K}$ *et* $x \in \mathbb{K}$.

- ▷ *On dit que x est intérieur à* A *s'il existe* $\alpha > 0$ *tel que* $\mathrm{B}(x,\alpha) \subset \mathrm{A}$.
- ▷ *On appelle voisinage de x toute partie* V *de* $\mathbb{K}$ *telle que x soit intérieur à* V.
- ▷ *Pour* $y \in \mathbb{K}$*, on note* $\mathscr{V}_y$ *l'ensemble des voisinages de y.*
- ▷ *Soit* $y \in \mathbb{K}$. *On dit que y est adhérent à* A *si,* $\forall \mathrm{V} \in \mathscr{V}_y$, $\mathrm{V} \cap \mathrm{A} \neq \varnothing$.

Bien qu'également définies dans $\mathbb{R}$, il est préférable de se forger une solide intuition de ces notions dans le plan. Les figures en dimension un sont en effet peu évocatrices, à cause de l'aplatissement dû à cette dimension.

Les point intérieurs (resp. adhérents) de $[0,1[$ sont les éléments de $]0,1[$ (resp. de $[0,1]$). Ci-dessous, $\mathrm{A} := [0,1[$ apparaît en bleu, 0 est non intérieur à A, 1 est adhérent à A, $0,66$ est intérieur à A et $1,5$ est non adhérent et n'appartient pas à A. Nous avons dessiné les boules ouvertes dans le plan afin de ne rendre cette figure plus lisible (il faudrait en fait considérer les intervalles ouverts qui sont les intersections de ces boules avec l'axe réel) :



Définition 1.28. Extension de ces définitions à $\overline{\mathbb{R}}$

Les voisinages de $\pm\infty$ seront utilisés pour des limites infinies ou en plus ou moins infini.

- ▷ *On appelle voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) tout* $\mathrm{V} \subset \mathbb{R}$ *tel que* $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ [\mathrm{M}, +\infty[\subset \mathrm{V}$ *(resp.* $]-\infty, \mathrm{M}] \subset \mathrm{V}$*).*
- ▷ *Pour $y \in \overline{\mathbb{R}}$, on note $\mathscr{V}_y$ l'ensemble des voisinages de y.*
- ▷ *Soit $y \in \overline{\mathbb{R}}$. On dit que y est adhérent à* A *si,* $\forall \mathrm{V} \in \mathscr{V}_y,\ \mathrm{V} \cap \mathrm{A} \neq \varnothing$.

Proposition 1.29. (Propriétés des voisinages)

Soit x et x' dans $\overline{\mathbb{R}}$.

a) L'intersection d'un nombre fini de voisinages de x est un voisinage de x.

b) Si $x \neq x'$, alors il existe des voisinages V et V′ de x et x' tels que $\mathrm{V} \cap \mathrm{V}' = \varnothing$.

5.2. Parties denses de $\mathbb{K}$

La notion de partie dense dans $\mathbb{K}$ formalise l'idée d'un sous-ensemble contenant, pour tout élément x de $\mathbb{K}$, des éléments arbitrairement proches de x.

Définition 1.30. Parties denses

Un sous-ensemble A *de* $\mathbb{K}$ *est dit dense dans* $\mathbb{K}$ *si toute boule ouverte de* $\mathbb{K}$ *contient au moins un élément de* A.

Nous verrons dans le chapitre suivant que la densité admet une caractérisation séquentielle, i.e. au moyen des suites : une partie A est dense dans $\mathbb{K}$ *si et seulement si* pour tout nombre x de $\mathbb{K}$, il existe $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$. Il est également clair que A dense dans $\mathbb{R}$ *si et seulement si* tout nombre réel est adhérent à A.

Proposition 1.31. (Densité de $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$). *Les parties $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

On en déduit que l'ensemble $\mathbb{Q}$ n'admet aucun point intérieur (tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient des irrationnels par densité de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$), et l'ensemble des points adhérents à $\mathbb{Q}$ est $\mathbb{R}$ (tout intervalle ouvert non vide contient des rationnels). L'ensemble des points à parties réelle et imaginaire rationnelles est dense dans $\mathbb{C}$. L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$.

Tests

1.4. Montrer que l'ensemble $\left\{ r^3\,;\, r \in \mathbb{Q} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

6. Solutions des tests

1.1. L'ensemble A est non vide et borné car inclus dans $[0,1]$. On pose $u_n := 1 - \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- ▷ Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant u_1 = 0$, A admet un minimum qui vaut 0 et donc $\min \mathrm{A} = \inf \mathrm{A} = 0$.
- ▷ Comme la suite (u_n) est strictement majorée par 1 et converge vers 1, A n'admet pas de maximum mais $\sup \mathrm{A} = 1$.

1.2.

a) ▷ L'intersection de deux intervalles est toujours un intervalle.

▷ C'est faux pour la réunion.

b) Pour deux intervalles fermés I et J, $\mathrm{I} \cup \mathrm{J}$ est un intervalle *si et seulement si* $\mathrm{I} \cap \mathrm{J} \neq \varnothing$.

1.3.

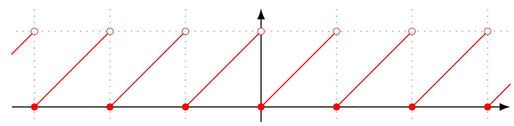
a) $\{54,465\} = 0,465$ et $\{-36,456\} = 0,544$.

b) Si $x \in \mathbb{Z}$, $\{-x\} = 0 = \{x\}$. Si $x \notin \mathbb{Z}$, on a $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$ donc $\{-x\} = 1 - \{x\}$.

c) on a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\{x+1\} = x + 1 - \lfloor x+1 \rfloor = x + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 = \{x\}$$

D'où l'allure du graphe de la partie fractionnaire ...



1.4. Soit x et y des réels tels que $x < y$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\sqrt[3]{x} < r < \sqrt[3]{y}$, ie $x < r^3 < y$. On en déduit que $\left\{ r^3 \,;\, r \in \mathbb{Q} \right\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.