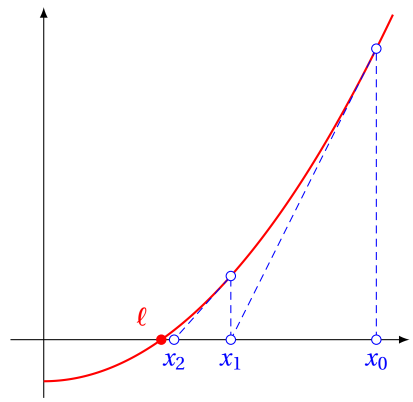
AN 2 | Suites numériques

Après avoir passé en revue les propriétés de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, nous poursuivons par l'étude des suites numériques, qui sont des outils fondamentaux en Analyse réelle.



L'IDÉE de suite est présente dès l'Antiquité dans l'histoire des mathématiques. Il faut cependant attendre la fin du XIXe siècle pour voir émerger la définition actuelle, proposée par Giuseppe Peano, d'une suite comme fonction définie sur l'ensemble des entiers naturels.

L'intérêt des savants pour les séquences de nombres découle principalement du calcul approché. Nous avons vu apparaître des suites de nombres rationnels dans le chapitre sur les nombres réels, et en particulier dans le paragraphe sur la façon d'obtenir les décimales d'un nombre.

Archimède est l'un des premiers à utiliser des suites pour résoudre des problèmes de *quadrature*, ce dernier terme signifiant la construction d'un carré de même aire qu'une surface donnée [1]. Aujourd'hui, il faut tout simplement entendre par là le calcul de l'aire de la surface en question.

Archimède développe une méthode dite d'*exhaustion*, qui consiste, pour calculer une telle aire, à encadrer la surface entre deux autres dont la différence des aires est aussi petite que l'on veut. Dans son *De la quadrature de la parabole*, il établit par exemple la proposition suivante :

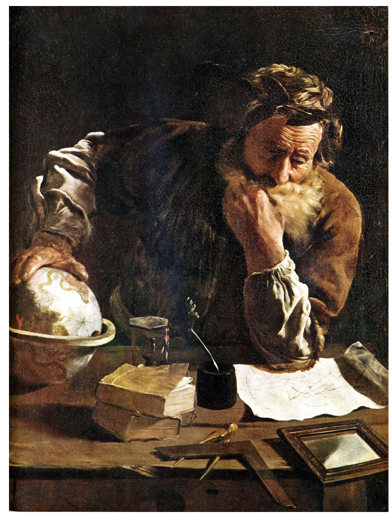
« *un segment quelconque compris par une droite et une parabole est égal à quatre fois le tiers d'un triangle qui a la même base et la même hauteur que le segment.* »

Pour ce faire il est amené à travailler avec une suite géométrique de raison $1/4$, dont il doit sommer les termes, en évitant toutefois la somme infinie et en se contentant de manipuler la suite des sommes finies.

Un autre exemple dû à Archimède est son calcul approché de π par la méthode dite des *isopérimètres*, consistant à approcher le périmètre d'un cercle par deux suites adjacentes de périmètres, obtenues, pour l'une, par des polygones réguliers inscrits et, pour l'autre, par des polygones réguliers circonscrits, dont il fait croître le nombre de côtés.

Il obtient ainsi l'encadrement suivant :

$$3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$$



Archimède

Léonard de Pise, dit Fibonacci

Une autre suite célèbre dans l'histoire est celle de Fibonacci, prototype d'un système dynamique discret et modélisant la reproduction des lapins. À l'instant initial $n=0$ nous avons un couple de lapins nouveau-nés qui ne pourra se reproduire qu'à partir de l'âge de deux mois (ie $n=2$, l'unité de temps est le mois) pour donner alors chaque mois un autre couple de lapins, chacun de ces couples de lapins se reproduisant selon le même schéma. Si on note u_n le nombre de couples de lapins à l'instant n, on a alors $u_0=1$, $u_1=1$, $u_2=1+1=2$ et de manière générale (en supposant l'absence de mortalité),

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$$

Le comportement de cette suite (dite suite de Fibonacci) lorsque n devient grand est alors gouverné par le mythique *nombre d'or*

$$\phi:=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

1. Par exemple, l'aire d'un disque.

1. Suites à valeurs numériques

Ce chapitre est dédié à l'étude des suites à valeurs numériques, c'est-à-dire à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

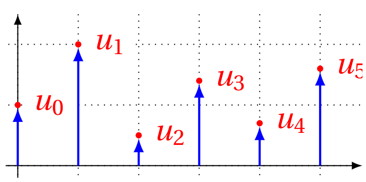
Ce paragraphe d'ouverture a pour objet de mettre en place le vocabulaire sur les suites et de rappeler quelques notations classiques.

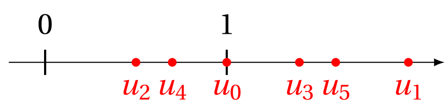
Définition 2.1. Suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$

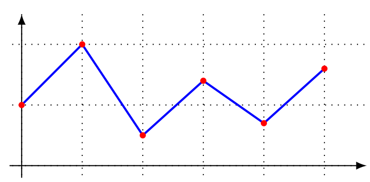
Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

- ▷ *On appelle suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ toute fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{K}$.*
- ▷ *Notation séquentielle : pour une suite $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note f_n au lieu de $f(n)$; on note aussi $f = (f_n)_{n\geqslant 0}$ ou encore $f = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On dit que f est la suite de terme général f_n.*
- ▷ *L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.*

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il y a deux façons de se représenter une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: en dimension deux, au moyen des points (n, u_n) (en les joignant ou pas), ou en dimension un, en positionnant u_n sur un axe gradué.







Dans le cas d'une suite ne prenant que des valeurs réelles, on peut ajouter quelques définitions liées à la relation d'ordre $\leqslant$.

Définition 2.2. Suites monotones, suites majorées, etc. (↯ **2.1.**)

Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite :

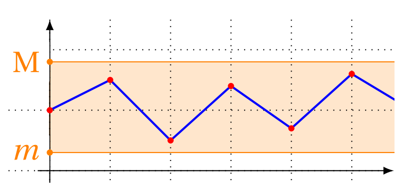
- ▷ *croissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \geqslant u_n$;*
- ▷ *décroissante si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leqslant u_n$;*
- ▷ *minorée si $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant m$;*
- ▷ *majorée si $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \mathrm{M}$;*
- ▷ *bornée si $\exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant k$ (valable pour $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$) ;*

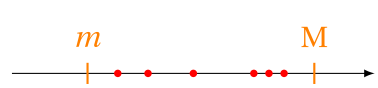
Comme pour les fonctions, une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée si et seulement si *elle est majorée et minorée.*

Par exemple, la suite de terme général $u_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ est bornée et décroissante comme la relation suivante en témoigne :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

Une suite est bornée *si et seulement si* ses termes appartiennent à un segment $[m, \mathrm{M}]$, i.e. son graphe est contenu dans une bande horizontale.





Transmutation des hypothèses par passage à l'opposé ou l'inverse

Pour une suite $u := (u_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels :

- ▷ u croissante équivaut à $-u$ décroissante, u est majorée équivaut à $-u$ minorée.
- ▷ Dans le cas où u est à termes strictement positifs, u est croissante équivaut à $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant 0}$ décroissante, f majorée équivaut à $\left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geqslant 0}$ minorée.

Ces propriétés élémentaires permettent d'optimiser certaines démonstrations en ramenant l'étude d'un cas à un autre déjà étudié.

Définition 2.3. Propriété vraie à partir d'un certain rang

Une propriété $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier naturel n est dite vraie à partir d'un certain si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Par exemple, une suite est dite *stationnaire* si elle est constante à partir d'un certain rang.

2. Convergence et divergence

La notion de limite est le point de départ de l'analyse. Elle permet de s'affranchir de la finitude des calculs algébriques afin de réaliser *une infinité d'opérations*, comme par exemple dans la relation

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k} := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = 1$$

Elle sera un outil puissant pour créer de nouveaux objects mathématiques [2].

2.1. Suites convergentes

D'un point de vue intuitif, la convergence de suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ vers 0 signifie que $\frac{1}{n}$ peut être rendu « aussi petit » que l'on veut pourvu que n soit assez grand.

Afin d'éviter toute ambiguité, voici une traduction formelle de cette propriété :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geqslant n_0\,,\ \frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$$

Dans cette définition, l'indice n_0 dépend de ε. Par exemple, pour $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, $\frac{1}{n} \leqslant \varepsilon$ équivaut à $n \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, la valeur $n_0 := \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ convient. En fait tout indice supérieur à celui-ci convient dans la définition. D'une façon plus générale, la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers zéro sera définie par :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geqslant n_0\,,\ |u_n| \leqslant \varepsilon$$

La valeur absolue est indispensable dans le cas général où l'on ne sait rien du signe des termes u_n.

La convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers un réel ℓ est naturellement définie par la propriété $u_n - \ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. Citons par exemple les notions de dérivée et d'intégrale, bien connues du lecteur.

Définition 2.4. Convergence, limite d'une suite convergente (⚡ 2.2.)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge (ou encore qu'elle est convergente) s'il existe* $\ell \in \mathbb{R}$ *tel que*

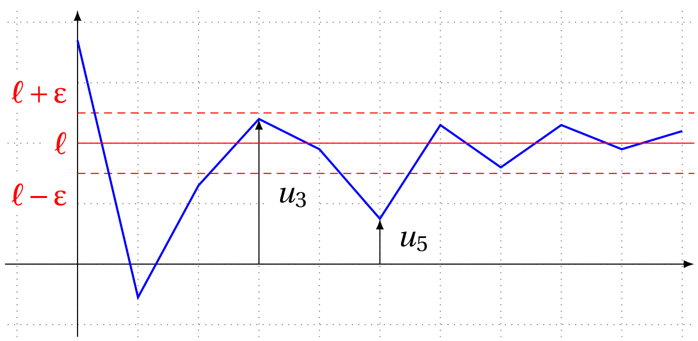
$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geqslant n_0\,,\ |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

En cas d'existence, ℓ *est unique et appelé limite de* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *On écrit* $\ell = \lim u_n$ *ou encore* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. *Une suite qui n'est pas convergente est dite divergente.*

On déduit de la définition que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ équivaut à $|u_n - \ell| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

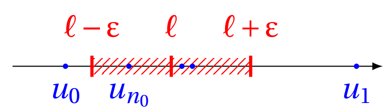
Les deux Interprétations géométriques de la convergence

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel le graphe de $u = (u_n)$ est contenu dans la bande horizontale d'inéquations $\ell - \varepsilon \leqslant y \leqslant \ell + \varepsilon$.



On peut aussi donner une interprétation de la convergence en dimension un (sur la droite réelle).

Pour tout réel ε strictement positif, il existe un rang n_0 à partir duquel *tous* les termes de la suite appartiennent au segment $[\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$.



Lemme 2.5.
Une suite convergence est bornée.

La réciproque est fausse comme l'illustre le contre-exemple $\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans la pratique, on ne revient à la définition *epsilonesque* qu'en dernier recours ; il est préférable d'utiliser par exemple le théorème concernant les opérations sur les suites convergentes.

Proposition 2.6. (Opérations sur les suites convergentes)
Soit $(\ell_1, \ell_2) \in \mathbb{R}^2$. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$, alors $u_n + v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 + \ell_2$ et $u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1 \ell_2$.
Si de plus $\ell_1 \neq 0$, alors $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, $\dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\ell_1}$ et $\dfrac{v_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\ell_2}{\ell_1}$.

On obtient, par une récurrence immédiate, des résultats analogues pour des opérations sur un nombre fini de suites.

2.2. Divergence vers un infini

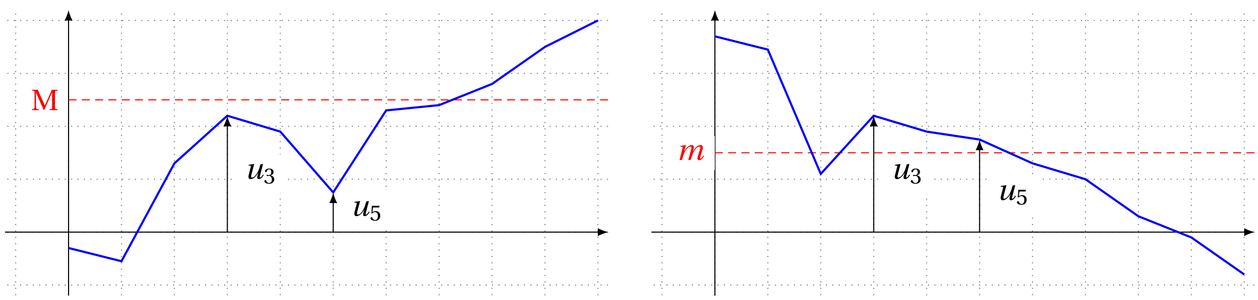
Nous allons étudier un cas particulier de divergence, celui des suites admettant une limite infinie.

Définition 2.7. Divergence vers $\pm\infty$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

- ▷ *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $+\infty$ *si* $\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \geqslant \mathrm{M}$ *; on note* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- ▷ *On dit que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *diverge vers* $-\infty$ *si* $\forall m \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ u_n \leqslant m$ *; on note* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

Interprétations géométriques de la divergence vers $\pm\infty$



Démontrons par exemple que $\sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Soit $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$. La condition $\sqrt{n} \geqslant \mathrm{M}$ équivaut à $n \geqslant \mathrm{M}^2$. Posons $n_0 := \lfloor \mathrm{M}^2 \rfloor + 1$. Pour un entier n vérifiant $n \geqslant n_0$, on a que $n^2 \geqslant n_0^2 \geqslant \mathrm{M}^2$. La définition de la divergence vers $+\infty$ a bien été vérifiée :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} ,\ \forall n \geqslant n_0 ,\ \sqrt{n} \geqslant \mathrm{M}$$

Passons à présent au cas de le suite géométrique $\left(r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ où $r > 1$. En posant $\varepsilon := r - 1$, on a $r = 1 + \varepsilon$. On remarque que $\varepsilon > 0$. Fixons M dans $\mathbb{R}_+$ et n dans $\mathbb{N}$, on cherche une condition suffisante de la forme $n \geqslant n_0$ pour que

$$(1+\varepsilon)^n \geqslant \mathrm{M}$$

La formule du binôme peut nous y aider. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(1+\varepsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k \geqslant 1 + n\varepsilon$$

car la somme de ces $n+1$ termes positifs est supérieure à celle des deux premiers termes).Il suffit donc d'avoir $1 + n\varepsilon \geqslant \mathrm{M}$ pour en conclure que $(1+\varepsilon)^n \geqslant \mathrm{M}$. En posant $n_0 := \max\left(0, \left\lfloor \frac{\mathrm{M}-1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1\right)$, on a donc bien $(1+\varepsilon)^n \geqslant \mathrm{M}$ lorsque $n \geqslant n_0$. Au passage, le « 0 » dans le maximum définissant n_0 sert à assurer que n_0 est un entier naturel. Nous avons bien démontré que :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}_+ ,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} ,\ \forall n \geqslant n_0 ,\ (1+\varepsilon)^n \geqslant \mathrm{M}$$

L'étude des opérations sur les suites admettant une limite infinie fait apparaître des *formes indéterminées* (FI), ie des cas où ne peut conclure en général, il faut faire une étude au cas par cas (↯ **2.3.**).

Proposition 2.8. (Opérations sur les limites)

Soit $(\ell_1, \ell_2) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$, alors :

a) le comportement asymptotique de $u_n + v_n$ est décrit par le tableau suivant

	$\ell_1 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 = +\infty$	$\ell_1 = -\infty$
$\ell_2 \in \mathbb{R}$	$\ell_1 + \ell_2$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	FI
$\ell_2 - \infty$	$-\infty$	FI	$-\infty$

b) Si $\ell_1 = 0$ et que u_n est positif (resp. négatif) à partir d'un certain rang, alors $1/u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ (resp. $-\infty$).

c) le comportement asymptotique de $u_n v_n$ est décrit par le tableau suivant

	$\ell_1 > 0$	$\ell_1 < 0$	$\ell_1 = 0$	$\ell_1 = +\infty$	$\ell_1 = -\infty$
$\ell_2 > 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 < 0$	$\ell_1\ell_2$	$\ell_1\ell_2$	0	$-\infty$	$+\infty$
$\ell_2 = 0$	0	0	0	FI	FI
$\ell_2 = +\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$
$\ell_2 = -\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$	$+\infty$

2.3. Convergence et relation d'ordre

Un argument revient régulièrement dans les démonstrations d'analyse : le passage à la limite dans une égalité. Considérons deux suites de nombres réels de termes généraux u_n et v_n, supposées convergentes de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2. Si $u_n = v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\ell_1 = \ell_2$. C'est une conséquence immédiate de l'unicité de la limite. Ce résultat admet une généralisation : le passage à la limite dans une inégalité.

Proposition 2.9. (Passage à la limite dans une inégalité).
Soit ℓ_1 et ℓ_2 deux nombres réels. Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et telles que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_1$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_2$, alors $\ell_1 \leqslant \ell_2$.

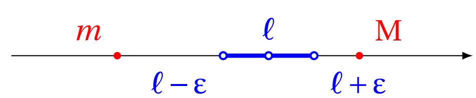
En particulier s'il existe $(m, \ell) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_n \geqslant m$ à partir d'un certain rang, alors $\ell \geqslant m$. On prendra garde à ce qu'un passage à la limite dans une inégalité asymptotique se solde toujours par une inégalité *au sens large* : si $u_n < v_n$ à partir d'un certain rang, alors on ne peut en conclure que $\ell_1 < \ell_2$, comme l'illustre l'inégalité $\frac{1}{n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Étudions à présent la problématique *inverse* : quelles inégalités asymptotiques (i.e. valables à partir d'un certain rang) peut-on déduire de la limite d'une suite ?

Proposition 2.10. (Inégalités asymptotiques.)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombre réels telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}$.
Pour tout $(m, \mathrm{M}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $m < \ell < \mathrm{M}$, on a $m < u_n < \mathrm{M}$ à partir d'un certain rang.

Ce résultat est géométriquement clair. Dans la définition de la convergence, il suffit de choisir ε de la façon suivante :

$$m < \ell - \varepsilon < \ell + \varepsilon < \mathrm{M}$$



2.4. Suites extraites

Nous allons à présent formaliser le choix d'un nombre infini de termes d'une suite donnée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en la balayant dans le sens des indices croissants :

$$u_0 \ , \ \boxed{u_1} \ , \ \boxed{u_2} \ , \ u_3 \ , \ u_4 \ , \ \boxed{u_5} \ , \ u_6 \ , \ u_7 \ , \ \boxed{u_8} \ , \ \boxed{u_9} \ \cdots$$

On peut ranger ces termes dans une *nouvelle suite* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 := u_1$, $v_1 := u_2$, $v_2 := u_5$, $v_3 := u_8$, $v_4 := u_9$, etc.

Définition 2.11. Suites extraites (⚡ 2.4. et 2.5.)
On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *toute suite de la forme* $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *où* $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est strictement croissante.*

Dans l'exemple précédent, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec, pour tout entier naturel n, $v_n = u_{\phi(n)}$ où $\phi(0) := 1$, $\phi(1) := 2$, $\phi(2) := 5$, $\phi(3) := 8$, $\phi(4) := 9$, etc.

La notion de suite extraite est un précieux outil pour étudier la dynamique une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée.

Lemme 2.12. (Fonctions strictement croissantes de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$)
Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N} \ , \quad \varphi(n) \geqslant n$.

Proposition 2.13. (Suites extraites d'une suite convergente)
Toute suite extraite d'une suite admettant une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ admet la même limite ℓ.

On remarquera que la réciproque de ce théorème est fausse, une suite extraite pouvant ne donner qu'un *renseignement partiel* sur la suite d'origine[3]. Cette proposition est un outil commode pour établir qu'une suite n'a pas de limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Par exemple, la suite de terme général $u_n := (-1)^n$ diverge car ses deux suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes mais de limites différentes.

Comment démontrer qu'une suite n'a pas de limite ?

Pour établir qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune limite, il suffit d'exhiber une suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admettant aucune limite ou encore de trouver deux suites extraites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admettant des limites distinctes.

Le théorème précédent admet une réciproque partielle.

Proposition 2.14. (Extraction des indices pairs et des indices impairs).
Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et de même limite.

Les suites extraites permettent de caractériser simplement les suites non majorées ou non minorées.

Proposition 2.15. (Caractérisation des suites non majorées).
Une suite est non majorée si et seulement si elle admet une suite extraite qui diverge vers $+\infty$.

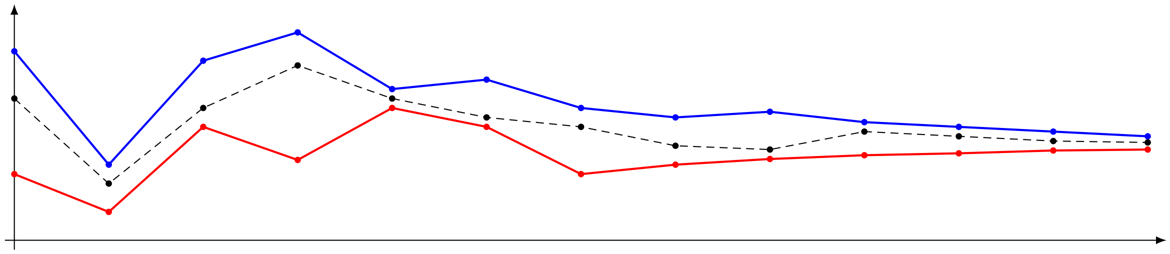
3. Les théorèmes de convergence

Dans cette section, nous étudions quelques conditions suffisantes d'existence d'une limite. Nous dégagerons trois grands types d'hypothèses : la monotonie, des encadrements et l'écriture sous forme d'une moyenne pondérée.

3. Cela dépend bien-sûr des indices extraits.

3.1. Le théorème d'encadrement

Le résultat suivant est parfois appelé *théorème des gendarmes* ou encore *théorème du sandwich*. Son interprétation géométrique est limpide.



Théorème 2.16. (Théorème d'encadrement)
a) Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si (u_n), (v_n) et (w_n) sont trois suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ à partir d'un certain rang et telles que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $w_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

b) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et telles que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

c) Si (u_n) et (v_n) sont deux suites réelles telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang et telles que $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.

On déduit immédiatement du théorème d'encadrement la stratégie suivante : pour démontrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, on cherche une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0 telle que $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon_n$ à partir d'un certain rang.

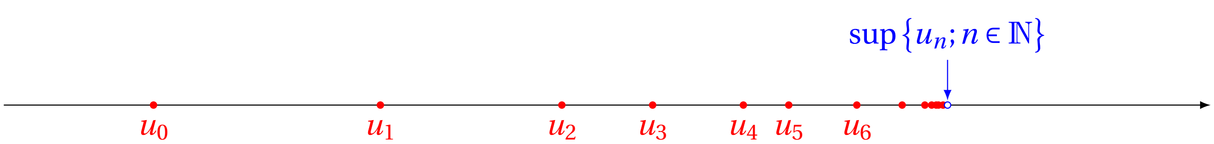
Montrons par exemple que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Pour n dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$0 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k} \leqslant \frac{n}{n^2+1}$$

car le plus grand terme de la somme est celui d'indice $k=1$. Comme $\frac{n}{n^2+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, le théorème d'encadrement permet bien de conclure.

3.2. Le théorème de la limite monotone

D'un point de vue intuitif, une suite croissante et majorée converge vers la borne supérieure de $\{u_n ; n\in\mathbb{N}\}$ (et une suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$) :



Théorème 2.17. (Théorème de la limite monotone)
Si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est croissante, alors elle admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$. Plus précisément :

a) Si (u_n) est majorée, alors (u_n) converge vers un réel ℓ.

b) Si (u_n) n'est pas majorée, (u_n) diverge vers $+\infty$.

On adapte sans peine ce résultat au cas d'une suite décroissante. Étudions par exemple la suite définie par

$$u_0 > 1\,,\ u_1 > 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+2} = \frac{u_{n+1}^2 + u_n^2}{2}$$

On démontre par une récurrence facile que tous les termes de cette suite sont strictement plus grand que 1. Pour un entier n, on a

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2 - 2u_{n+1} + u_n^2}{2} = \frac{(u_{n+1}-1)^2 + u_n^2 - 1}{2} > 0$$

Ainsi $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante à partir du rang 1 et admet donc une limite ℓ dans $]1,+\infty[\cup\{+\infty\}$. Raisonnons par l'absurde en supposant $\ell \in]1,+\infty[$. En passant à la limite dans la relation de récurrence et en utilisant les opérations sur les limites, on obtient

$$\ell = \frac{\ell^2 + \ell^2}{2} = \ell^2$$

et donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$, ce qui est absurde. On a donc établi que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Le théorème de la limite monotone admet une variante aux applications intéressantes.

Définition 2.18. Suites adjacentes (↯ 2.6.)

Deux suites $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont dites adjacentes si elles sont monotones de sens de variation contraires avec $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Considérons par exemple, les deux suites définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n := u_n + \frac{1}{n!}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement strictement croissante et pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{1-n}{(n+1)!}$$

Ainsi, ces deux suites sont adjacentes à partir du rang un.

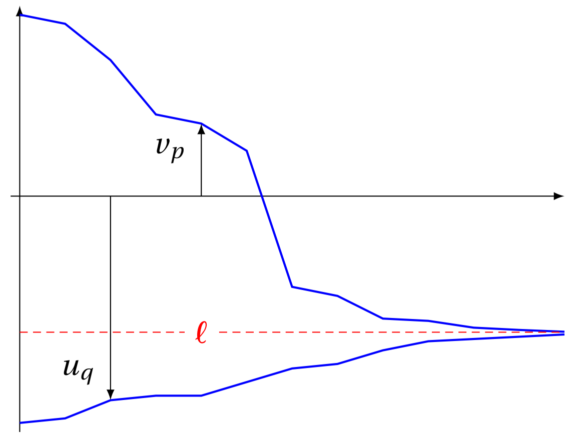
Théorème 2.19. (Théorème des suites adjacentes)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ adjacentes.

a) $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes de même limite ℓ.

b) Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont respectivement croissante et décroissante, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Ces dernières inégalités sont strictes dans le cas où les monotonies le sont également.

La « *géométrie* » d'un couple de suites adjacentes est celle d'un entonnoir.



Pour calculer des valeurs approchées d'un nombre réels x (par défaut ou par excès), il est intéressant de disposer d'une paire de suites adjacentes $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite x. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement strictement croissante et décroissante, alors

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n < x < v_n$$

Pour tout indice n, u_n (resp. v_n) est une valeur approchée par défaut (resp. par excès) de x à $(v_n - u_n)$-près.

Notons ℓ leur limite commune des suites adjacentes $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies ci-dessus. On remarque que $7! = 5040 > 10^3$ et

$$u_7 = \frac{7!+7!+7\times6\times5\times4\times3+7\times6\times5\times4+7\times6\times5+7\times6+7+1}{7!} = \frac{13700}{5040} = 2,71\cdots$$

avec deux décimales exactes. Comme u_7 est une valeur par défaut à 10^{-3}-près de ℓ dont le chiffre des centièmes est non nul, on sait que $\ell = 2,71\cdots$ avec deux décimales exactes. En fait, nous démontrerons que $\ell = e$ dans la suite du cours d'analyse. Ces encadrements de ℓ au moyen de la paire de suite adjacentes permettent également d'établir l'irrationnalité de ℓ par l'absurde. Supposons l'existence de (p,q), couple d'entiers naturels non nuls, tels que $\ell = \frac{p}{q}\cdot$ Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on a donc $qu_n < p < qv_n$, d'où en multipliant par $n!$,

$$qn!u_n < pn! < qn!u_n + 1$$

Comme $qn!u_n$ et $pn!$ sont des entiers, on en déduit une absurdité.

3.3. Combinaisons linéaires convexes et théorème de Cesàro

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, la moyenne arithmétique de n nombres réels $x_1, \ldots, x_n$ vérifie

$$\min(x_1,\ldots,x_n) \leqslant \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \leqslant \max(x_1,\ldots,x_n)$$

Si les x_i sont des valeurs approchées à ε-près d'un réel λ, alors il en sera donc de même de leur moyenne arithmétique $\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\cdot$ Cette propriété admet une version asymptotique connue sous le nom de théorème de Césàro.

Théorème 2.20. (de Cesàro).
Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\in\overline{\mathbb{R}}$, alors $\dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

La réciproque du théorème de Césáro est fausse. Un contre-exemple est donné par la suite de terme général $u_n := (-1)^n$; elle est clairement divergente mais $\frac{u_1+\cdots+u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

On peut généraliser ce théorème en introduisant des *poids* pour calculer la moyenne des termes u_1, $\ldots$, u_n. Sous les hypothèses $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell\in\overline{\mathbb{R}}$, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}_+^{\mathbb{N}}$ et $p_1+\cdots+p_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on peut conclure que

$$\frac{p_1u_1+\cdots+p_nu_n}{p_1+\cdots+p_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

en adaptant la démonstration.

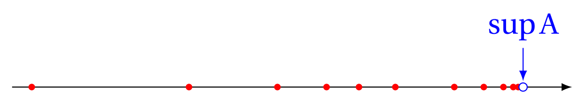
4. Suites et topologie de $\mathbb{R}$

De nombreuses propriétés topologiques admettent des caractérisations séquentielles.

4.1. Application au calcul d'une borne

La borne supérieure d'une partie A non vide et majorée de $\mathbb{R}$ est le plus petit des majorants de A.

Intuitivement, la borne supérieure de A est un majorant M de A tel qu'il existe des éléments de A arbitrairement proches de M : on peut s'approcher aussi près que l'on veut de M en restant dans A.



La notion de convergence est très adaptée pour décrire cette idée d'*approximations arbitrairement proches*.

Proposition 2.21. (Caractérisation séquentielle des bornes)
Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Un réel M est la borne supérieure de A *si et seulement si* M est un majorant de A et il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers M.

Cette caractérisation des bornes est qualifiée de séquentielle puisqu'elle fait référence aux suites. On adapte bien-sûr cette proposition au cas d'une borne inférieure $\big($↯ **2.7.**$\big)$.

Exemple 2.22. Deux illustrations classiques.
Bornes de $\mathrm{A} := \left\{\frac{2^n}{2^m+2^{n+m}}\,;\,(n,m)\in\mathbb{N}^2\right\}$. Pour A bornée et non vide, $\sup\limits_{(x,y)\in\mathrm{A}^2}|x-y| = \sup\mathrm{A}-\inf\mathrm{A}$.

4.2. Parties denses de $\mathbb{R}$

On rappelle qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est dite dense si tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ contient au moins un élément de A. Intuitivement, cela signifie que, pour tout réel x, on on peut trouver des éléments de A arbitrairement proches de A. Comme pour les bornes, cette propriété admet une caractérisation séquentielle très intéressante.

Proposition 2.23. (Caractérisation séquentielle de la densité)
Une partie A de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ *si et seulement si* , pour tout réel x, il existe une suite d'éléments de A qui converge vers x.

On a vu que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et, ce qui est une propriété plus forte, l'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux est denses dans $\mathbb{R}$. On peut en redonner une démonstration au moyen des suites numériques. Soit x un nombre réel. On cherche à construire une suite de nombres décimaux $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x. Quitte à considérer la suite des opposés, on peut supposer que x est positif. L'écriture sous forme décimale de x va nous en fournir une sur un plateau :

$$x = a_m\cdots a_1\,,\,c_1c_2\cdots c_nc_{n+1}\cdots$$

L'idée est de construire la suite de terme général $u_n = a_m\cdots a_1\,,\,c_1c_2\cdots c_n$ et de prouver qu'elle converge vers x. Pour cela, on commence par *décaler* la virgule :

$$10^n x = a_m \cdots a_1 c_1 c_2 \cdots c_n \,, c_{n+1} \cdots$$

puis on supprime les chiffres après la virgule en extrayant la partie entière de ce nombre, et finalement on replace la virgule au bon endroit :

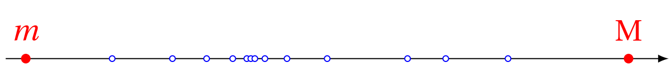
$$\lfloor 10^n x \rfloor = a_m \cdots a_1 c_1 c_2 \cdots c_n \quad \text{et} \quad \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n} = a_m \cdots a_0 \,, c_1 c_2 \cdots c_n$$

On va donc choisir $u_n := \frac{\lfloor 10^n \rfloor}{10^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut démontrer que cette suite converge vers x sans passer par le développement décimal de x – et il est même plus simple de suivre ce chemin. Pour tout entier naturel n, on déduit de l'encadrement de la partie entière que

$$\forall n \in \mathbb{N} \,, \; x - \frac{1}{10^n} < u_n \leqslant x$$

Et la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers x est donc clairement par le théorème d'encadrement.

4.3. Le théorème de Bolzano-Weierstrass



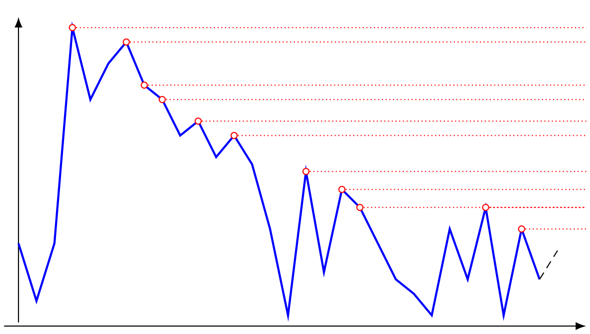
Comme on peut en avoir l'intuition géométrique, une suite bornée *s'accumule quelque part*, i.e. admet une suite extraite convergente.

Théorème 2.24. (Bolzano-Weierstrass)
Une suite de réels bornée admet une sous-suite convergente.

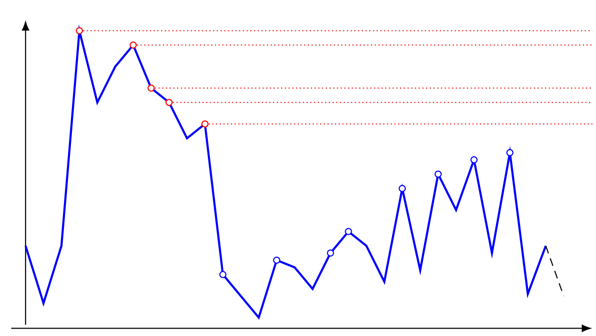
Une démonstration de ce théorème consiste à établir que l'on peut extraire de toute suite de nombre réels une suite monotone. Cette propriété est connue dans le monde anglo-saxon sous l'appellation de *Rising sun lemma*.

Lemme 2.25. (Rising sun lemma)
Toute suite de nombres réels admet une suite extraite monotone.

La démonstration requiert la définition d'un pic : on dit que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ présente un pic en un entier m si $\forall n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant m$, on a $u_m \geqslant u_n$. L'appellation de ce lemme, au pouvoir si évocateur que nous n'avons pas résisté à l'adopter dans ce cours en Français [4], vient du fait qu'un soleil situé en $+\infty$ sur l'axe des abscisses éclairant le graphe d'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ voit soit un nombre infini de pics, soit un nombre fini :



S'il y a une infinité de pics, alors « la suite extraite des pics » est décroissante.



Sinon, en partant du terme suivant le dernier pic, on construit une extraction croissante de la suite.

4. Lorsqu'elle est surnommée, cette propriété est plutôt qualifiée de lemme des Pics dans les ouvrages en Français.

4.4. Les suites de Cauchy

Àu delà de la définition, nous disposons d'une poignée de stratégies pour démontrer la convergence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: étudier sa monotonie, essayer de l'encadrer, l'écrire sous la forme d'une moyenne arithmétique afin d'appliquer l'un des grands théorèmes [5]. La notion de suite de Cauchy nous ouvre une quatrième voie.

Définition 2.26. Suites de Cauchy

Une suite de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite de Cauchy *si*

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \geqslant n_0\,,\ \forall m \geqslant n_0\,,\ |u_n - u_m| \leqslant \varepsilon$$

D'un point de vue intuitif, cette propriété *d'accumulation asymptotique des termes de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à sa convergence.

Théorème 2.27. (Convergence des suites de Cauchy).
Une suite converge si et seulement si elle est de Cauchy.

Ce théorème présente le même avantage démonstratif que celui de la limite monotone : nul besoin de conjecturer la limite de la suite pour établir sa convergence. Mais cet avantage est aussi un point faible, ce critère ne permettant pas d'expliciter la limite de la suite.

Nous n'utiliserons cette notion qu'à une seule reprise dans ce cours d'analyse, au moment de la construction de l'intégrale.

5. Modes de définition d'une suite numérique

Dans cette section, nous allons passer en revue les différentes manières de définir une suite numérique. Chacun de ces modes nécessitera des outils spécifiques pour l'étude des suites correspondantes. Nous commencerons par le cas (assez rare) où il est possible d'expliciter en fonction de n le terme général de la suite.

5.1. Suites arithmético-géométriques et Cie

Définition 2.28. Suites arithmétiques, suites géométriques

Soit $r \in \mathbb{R}$. Une suite (u_n) est dite :

- ▷ *arithmétique si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$;
- ▷ *géométique si* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = r\,u_n$.

5. C'est-à-dire les théorèmes de la limite monotone, d'encadrement et de Césaro.

Suites arithmétiques, suites géométriques (⚡ **2.8.** et **2.9.**)

Soit $r \in \mathbb{R}$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Il y a équivalence entre (a) et (b), et entre (c) et (d) :

a) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison r ;

b) $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_0 + nr.$

c) (u_n) est géométrique de raison r ;

d) $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = r^n u_0.$

Proposition 2.29. (Comportement asymptotique d'une suite géométrique)
Si $r \in]-1,1[$, alors $r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Si $r > 1$, $r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Si $r < -1$, (r^n) n'admet aucune limite.

Définition 2.30. Suites arithmético-géométriques
Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *est dite arithmético-géométrique si* $\exists (a,b) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$.

Calcul d'une suite arithmético-géométrique pour $a \neq 1$ (⚡ **2.10.**)

L'équation $\ell = a\ell + b$ admet une unique solution. On écrit alors $\begin{cases} u_{n+1} &= au_n + b \\ \ \ \ell &= a\ell + b \end{cases}$
et l'on forme la différence des deux lignes pour obtenir $u_{n+1} - \ell = a(u_n - \ell)$. La suite $(u_n - \ell)$ est donc géométrique. On peut ainsi la calculer puis exprimer u_n en fonction de n, a, b et u_0.

Dans le cas où $a = 1$, on retrouve la définition d'une suite arithmétique, déjà traité ci-dessus.

Considérons par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n^2$. On démontre par une récurrence facile que $u_n > 0$ pour indice n dans $\mathbb{N}$. Cette suite n'est pas arithmético-géométrique mais on peut *linéariser* cette relation de récurrence via un passage au logarithme :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln u_{n+1} = 2\ln u_n + \ln 2$$

L'unique solution de $x = 2x + \ln 2$ vaut $\ell := -\ln 2$ et on déduit que la suite de terme général $u_n + \ln 2$ est géométrique de raison 2 d'où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ln u_n = -\ln 2 + 2^n\big(\ln u_0 + \ln 2\big) \ \text{ et }\ u_n = 2^{2^n-1} u_0^{2^n}$$

5.2. Suites récurrentes linéaires d'ordre deux

Définition 2.31. Suites récurrentes linéaires d'ordre deux
Une suite (u_n) *est dite récurrente linéaire d'ordre deux si* $\exists (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

Calcul d'une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \star$ (⚡ 2.11.)

On commence par résoudre son équation caractéristique : $z^2 = az + b$.

- ▹ Lorsque cette équation admet deux racines distinctes z_1 et z_2, les suites vérifiant ($\star$) sont exactement les suites dont le terme général est de la forme $u_n = \lambda z_1^n + \mu z_2^n$.
- ▹ Lorsque l'équation caractéristique admet une racine double z_1, les suites vérifiant ($\star$) sont exactement les suites dont le terme général est de la forme $u_n = (\lambda n + \mu) z_1^n$.

où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ se calculent grâce aux conditions initiales u_0 et u_1 en résolvant un système linéaire.

L'exemple le plus célèbre de ce type de récurrence est certainement la suite de Fibonacci définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Comme l'équation caractéristique associée est $z^2 = z + 1$ de discriminant 5 et de racines $\phi := \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\phi}$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $u_n = \lambda\phi^n + \beta(-1/\phi)^n$. On déduit des conditions initiales $u_0 = 0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = 1 = \lambda\phi - \mu\phi$ que $\lambda = -\mu = \frac{1}{\sqrt{5}}$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

5.3. Suites définies explicitement

Il s'agit des suites (u_n) dont le terme général est donné explicitement en fonction de n.

Quelques idées pour l'étude qualitative de ce type de suite

- ▹ *Monotonie* : si $u_n = f(n)$, il suffit d'étudier les variations de f.
- ▹ *Comportement asymptotique* : opérations sur les limites, sinon, en cas de FI, on pourra regarder du côté des croissances comparées, etc.
- ▹ On peut aussi essayer d'encadrer le terme général, de faire apparaître un télescopage dans le cas d'une somme ou d'u produit.

Considérons la suite de terme général $u_n := \left(7\sin\frac{1}{n} + \frac{9}{10}\cos n\right)^n$. On conjecture que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ en remarquant que $7\sin\frac{1}{n} + \frac{9}{10}\cos n$ appartient à un intervalle de la forme $[-\lambda, \lambda]$ avec $0 < \lambda < 1$ pour n assez grand. La stratégie va donc être de trouver un λ qui convient en travaillant avec la valeur absolue et le théorème d'encadrement. Comme $7\sin\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe un rang à partir duquel $\left|7\sin\frac{1}{n}\right| < \frac{1}{20}$ i.e. à partir duquel

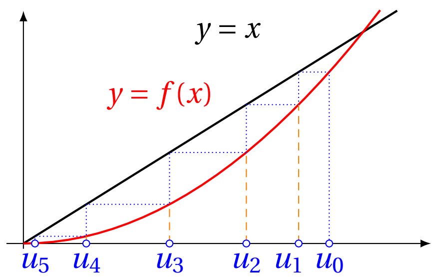
$$\left|7\sin\frac{1}{n} + \frac{9}{10}\cos n\right| \leqslant \left|7\sin\frac{1}{n}\right| + \frac{9}{10}|\cos n| \leqslant \frac{1}{20} + \frac{9}{10} = \frac{19}{20}$$

d'où $|u_n| \leqslant \left(\frac{19}{20}\right)^n$ à partir d'un certain rang. Comme $\left(\frac{19}{20}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on déduit du théorème d'encadrement que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

5.4. Suites récurrentes scalaires d'ordre un

Il s'agit d'étudier les suites définie par $u_0 \in \mathscr{D}$, et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$ est supposée au minimum continue. Il est éclairant de commencer par une étude graphique.

Étude graphique d'une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$



- ▷ On commence par tracer sur la même figure que le graphe de la fonction f l'*escalier d'itération* issu de la condition initiale u_0. Selon la position de u_0, on pourra trouver des comportements très différents.
- ▷ On émet une conjecture sur le comportement de la suite. ATTENTION : le comportemant de certaines suites peut s'avérer très sensible aux erreurs d'arrondis, il faudra donc être très prudent dans l'interprétation de la figure...

La suite est-elle bien définie ?

Dans certains cas, la suite n'ést pas définie pour certaines valeurs de u_0. On répond partiellement à la question en recherchant des intervalles $\mathrm{I} \subset \mathscr{D}$ les plus grands possibles stables par f ie vérifiant $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I}$. Pour tout $u_0 \in \mathrm{I}$, la suite sera bien définie et à valeurs dans I et

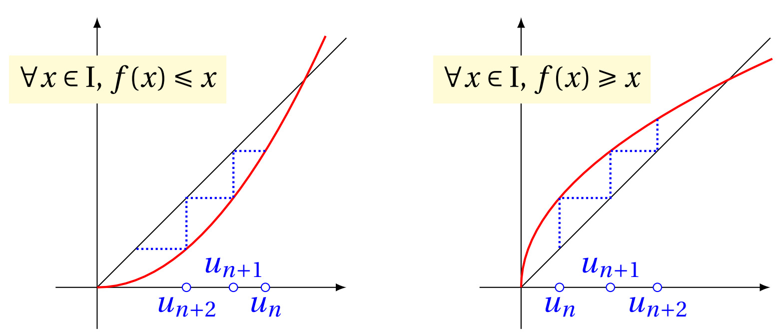
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = f^n(u_0) \ \text{ où } \ f^n \ \text{ désigne la } n\text{-ème itérée de } f$$

Considérons par exemple la relation de récurrence $u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$ n'est définie que sur $]-\infty, 1]$. Pour $u_0 < 0$, on peut calculer $u_1 := f(u_0)$. Comme $u_1 > 1$, $f(u_1)$ n'est pas définie : on ne peut appliquer la relation de récurrence qu'une seule fois. Posons $\mathrm{I} := [0,1]$. Comme $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{I} \subset]-\infty, 1]$, on peut appliquer à l'infini la relation de récurrence à partir de $u_0 \in \mathrm{I}$ et la suite ainsi définie est à valeurs dans I.

L'outil fondamental pour étudier le comportement de la suite est le théorème de la limite monotone.

La position du graphe de f par rapport à la première bissectrice est reliée au sens de variation de la suite (cf. la figure ci-contre).

On peut aussi exploiter le sens de variation de f (cf. les figures suivantes).



Sens de variation de la suite

Voici quelques pistes :

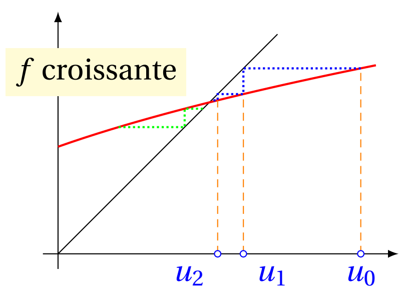
▷ *Étudier le signe de $f(x) - x$.*

Si $f(x) - x \geqslant 0$ (resp. $\leqslant 0$) sur un intervalle I stable par f, alors (u_n) est croissante (resp. décroissante) pour tout $u_0 \in \mathrm{I}$.

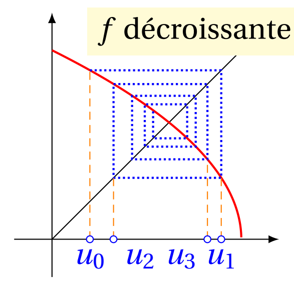
▷ *Exploiter la monotonie de f.*

† Si f est croissante sur un intervalle I stable par f, la suite est monotone pour toute condition initiale dans cet intervalle.

† Si f est décroissante sur un intervalle I stable par f, les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones de sens de variation contraires.



Si f est croissante sur un intervalle I stable par f, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone pour tout $u_0 \in \mathrm{I}$ (croissante ou décroissante cf. ci-contre). La dynamique dans le cas où f est décroissante est plus complexe.



On reprend les hypothèses précédentes : I est un intervalle stable par f et $u_0 \in \mathrm{I}$. Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $\ell \in \mathrm{I}$. Comme $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$ par continuité de f en ℓ, on a $f(\ell) = \ell$: ℓ est un point fixe de la fonction f.

Comportement asymptotique de la suite (↯ **2.12.**)

▷ *L'éventuelle limite est un point fixe de f* : on recherche les éventuelles limites de la suite en déterminant les points fixes de f, ie en résolvant l'équation $f(x) = x$.

▷ On étudie la convergence de la suite en essayant d'appliquer le théorème des suites monotones. On raisonnera parfois par l'absurde.

illustrons ces différentes méthodes au moyen de la suite définie par

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 8}{6} \quad \text{et} \quad u_0 \in \mathbb{R}_+$$

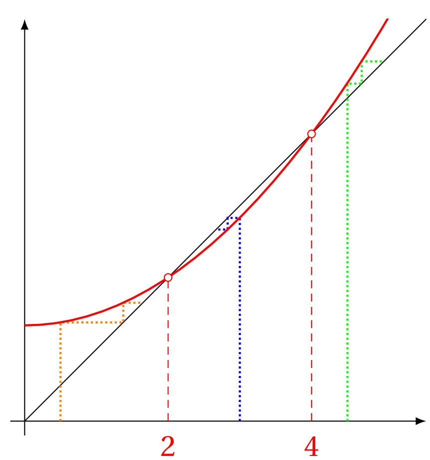
On conjecture que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

▷ strictement croissante de limite $+\infty$ si $u_0 > 4$;

▷ strictement décroissante de limite 2 si $2 < u_0 < 4$;

▷ strictement croissante de limite 2 si $0 \leqslant u_0 < 2$;

▷ constante si $u_0 = 2$ ou $u_0 = 4$.



On remarque que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{(x-2)(x-4)}{6}$ et l'on complète les tableaux suivants :

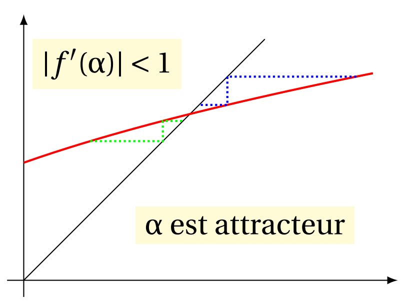
x	0		2		4		$+\infty$
$f(x)-x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

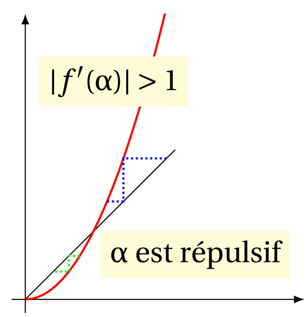
x	0		2		4		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{4}{3}$	$\nearrow$	2	$\nearrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Remarquons que f étant continue, les limites réelles potentielles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des points fixes de f, i.e. 2 ou 4. Il est clair que si u_0 est l'un des deux points fixes de f, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Étudions le cas où $u_0 \in]2,4[$. L'intervalle $]2,4[$ est stable par f et $f(x)-x<0$ pour x dans cet intervalle (cf. les variations de f), on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $]2,4[$ et strictement décroissante. Elle converge donc vers un réel ℓ par le théorème de la limite monotone. On a $\ell \neq 4$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et $u_0<4$. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. Supposons à présent que $u_0 \in [0,2[$. L'intervalle $[0,2[$ est stable par f et $f(x)-x>0$ pour x dans cet intervalle (cf. les variations de f), on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $[0,2[$ et strictement croissante. Elle converge donc vers un réel ℓ par le théorème de la limite monotone. On a $\ell \neq 4$ car $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. Terminons par le cas $u_0>4$. L'intervalle $]4,+\infty[$ est stable par f et $f(x)-x>0$ pour x dans cet intervalle, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $]4,+\infty[$ et strictement croissante. Elle n'est pas convergente car $[u_0,+\infty[$ ne contient aucun point fixe de f. On déduit du théorème de la limite monotone que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

La manière dont la courbe *traverse* la première bissectrice en un point fixe conditionne le comportement de la suite pour une condition initiale u_0 au voisinage de ce point fixe. Dans le cas où f est dérivable en l'un de ses points fixes α :

Si $|f'(\alpha)|<1$, alors α est dit *attracteur* : pour toute condition initiale au voisinage de α, la suite converge vers α.
Si $|f'(\alpha)|>1$, alors α est dit *répulsif* : pour toute condition initiale au voisinage de α mais distincte de α, la suite a tendance à s'éloigner de α.





Ces résultats seront justifiés un peu plus tard. Nous verrons dans le chapitre sur la dérivation que l'inégalité des accroissements finis permet parfois de conclure très vite.

5.5. Suites définies implicitement

Il s'agit des suites (u_n) dont le terme général est défini comme solution d'une équation $f_n(x)=0$.

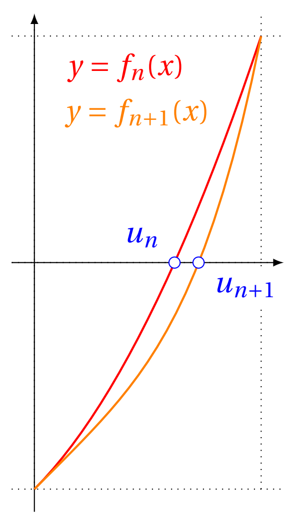
Quelques pistes pour l'étude de ce type de suites (↯ **2.13.**)

- ▷ Une étude graphique est possible.
- ▷ La notion de bijection permet souvent de justifier la féfinition de u_n.
- ▷ Le tableau de variation de f_n (et/ou f_{n+1}) permet le plus souvent de déterminer le sens de variation, de majorer et/ou de minorer de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- ▷ On utilisera souvent le théorème de la limite monotone dans ce cadre.
- ▷ On pourra, si l'on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, passer à la limite dans l'égalité $f_n(u_n)=0$ (avec les précautions d'usage, attention aux FI) afin de déterminer la valeur de $\lim u_n$.
- ▷ Encadrer u_n est souvent utile dans ce contexte.

Considérons par exemple la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n^n+u_n-1=0$ et $u_n \geqslant 0$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, notons $f_n : x \mapsto x^n+x-1$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Cette fonction est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ en tant que somme des fonctions $x\mapsto x^n$ (croissante) et $x\mapsto x-1$ (strictement croissante). De plus, $f_n(0)=-1$ et $f_n(1)=1$. Comme f_n est continue (en tant que fonction polynomiale), on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que f_n s'annule sur $]0,1[$ et par stricte croissance de f_n, le point où f_n s'annule est unique, on le note u_n.

x	0		u_n		1
$f_n(x)$	-1	↗	0	↗	1



On peut interpréter géométriquement la définition de la suite et conjecturer qu'elle est croissante : comme $f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$ pour $x\in[0,1]$, on déduit de la croissance de f_n et f_{n+1} que f_n s'annule *avant* f_{n+1}, i.e. $u_n\leqslant u_{n+1}$. La démonstration est facile : pour $x\in[0,1]$, on a $x^{n+1}\leqslant x^n$ d'où $f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$. En particulier

$$0 = f_{n+1}(u_{n+1}) \leqslant f_n(u_{n+1})$$

Comme f_n est strictement croissante sur $[0,1]$ et s'annule en u_n (cf. le tableau de variation de f_n), on en déduit que $u_n\leqslant u_{n+1}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante et majorée par 1, elle converge donc par le théorème de la limite monotone. Raisonnons par l'absurde en supposant que la limite ℓ de cette suite est strictement inférieure à 1. On a alors $u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où $u_n = 1-u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ par opération sur les limites. Ainsi $\ell=1$, ce qui est absurde.

On peut aussi revenir à la définition de la convergence. Soit $\varepsilon\in\,]0,1[$. On a

$$f_n(1-\varepsilon) = (1-\varepsilon)^n-\varepsilon \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\varepsilon<0$$

donc $f_n(1-\varepsilon)<0$ à partir d'un certain rang. Comme $1-\varepsilon\in[0,1]$ et f_n est strictement croissante sur $[0,1]$ en s'annulant en u_n, on en déduit que $1-\varepsilon<u_n\leqslant 1$ à partir d'un certain rang. On retrouve bien que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Il est souvent profitable d'écrire l'équation définissant u_n sous une forme équivalente. Par exemple, pour la suite ci-dessus :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{\ln u_n}{\ln(1-u_n)} = \frac{1}{n}$$

On note alors $\phi :]0,1[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\ln x}{\ln(1-x)}\cdot$ au moyen du théorème de la bijection, on peut démontrer que ϕ réalise une bijection strictement décroissante de $]0,1[$ sur $]0,+\infty[$. On déduit les variations de ϕ^{-1} de celles de ϕ en « inversant » le tableau de variation de ϕ.

x	0	1
$\phi(x)$	$+\infty$ ↘	0

x	0	$+\infty$
$\phi^{-1}(x)$	1 ↘	0

Ainsi l'expression $u_n = \phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$ est croissante (composée de deux expressions décroissantes). Comme $\phi^{-1}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

6. Relations de comparaison des suites numériques

Dans cette section, nous allons jeter les bases de l'analyse asymptotique des suites. Il s'agit essentiellement de créer des outils permettant de comparer, quand n tend vers $+\infty$, deux expressions u_n et v_n qui tendent vers $+\infty$ (resp. 0) : laquelle des deux temps *plus vite* que l'autre vers $+\infty$ (resp. 0) ? Le travail commence par la définition de trois relations binaires de comparaison asymptotique des suites (c'est-à-dire pour n tendant vers $+\infty$) qui nous permettront de lever des formes indéterminées.

6.1. La négligeabilité

Nous commençons par une formalisation mathématique de l'idée de négligeabilité.

Définition 2.32. Négligeabilité, notations o (Landau) et $\ll$ (Hardy) (↯ 2.14.)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de réels. On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est négligeable devant $(v_n)_{n\geqslant 0}$ si

- ▷ $\exists (\varepsilon_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *et* $u_n = v_n\varepsilon_n$ *à partir d'un certain rang.*
- ▷ *On note alors $u_n = o(v_n)$ (notation de Landau qui se lit « petit ô ») ou $u_n \ll v_n$ (notation de Hardy).*

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $u_n = o(v_n)$ équivaut à $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Considérons par exemple (α,β) dans $\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} n^\alpha \ll n^\beta &\iff \frac{n^\alpha}{n^\beta} \xrightarrow[\to+\infty]{} 0 \quad \left(\text{car } \frac{n^\alpha}{n^\beta} = n^{\alpha-\beta}\right) \\ &\iff \alpha < \beta \end{aligned}$$

La notation usuelle $u_n = o(v_n)$ est abusive. Puisque les expressions $\frac{n}{n^2}$ et $\frac{\sqrt{n}}{n^2}$ tendent vers 0 quand n tend vers l'infini, on a $n = o(n^2)$ et $\sqrt{n} = o(n^2)$ mais cet deux « $o(n^2)$ » ne sont pas égaux.

Dangers de la notation $o(v_n)$

En résumé, l'égalité $u_n = o(v_n)$ n'en est pas une, il faut la comprendre comme une relation binaire. En particulier, on explicitera tout « $o(v_n)$ » avant de l'utiliser dans un calcul. On reviendra à la définition en l'écrivant sous la forme $v_n\varepsilon_n$ à partir d'un certain rang avec ε_n qui tend vers 0.

Une manipulation raisonnée et efficace de la relation de négligeabilité nécessite l'apprentissage de quelques règles de calcul.

Proposition 2.33. (Composition à droite)
Soit $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\phi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Si $u_n = o(v_n)$, alors $u_{\phi(n)} = o\left(v_{\phi(n)}\right)$.

Par exemple, si $u_n = o(v_n)$, alors $u_{2n} = o(v_{2n})$. C'est bien un résultat sur la composition à droite, car en écrivant toute suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme une fonction $f : n \mapsto f_n$, le théorème précédent s'énonce ainsi : pour tout $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ de limite infinie en l'infini,

$$u = o(v) \implies u\circ\phi = o(v\circ\phi) \quad \text{(on a composé à droite } u \text{ et } v)$$

On prendra garde à la composition à gauche. Même sous des conditions simples portant sur la fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$, la relation $u = o(v)$ n'entraîne pas en général que $f\circ u = o(f\circ v)$. Par exemple, $n = o\left(n^2\right)$ mais $\ln n$ n'est pas un petit ô de $\ln n^2$ car $\ln n^2 = 2\ln n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 2.34. (Règles de calcul sur les suites négligeables)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites de nombres réels.

a) $\forall \mu \in \mathbb{R}^*,\ v_n = o(u_n) \iff v_n = o(\mu u_n)$
(absorption des constantes multiplicatives) ;

b) $\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ v_n = o(w_n) \end{cases} \implies u_n = o(w_n)$
(transitivité de o) ;

c) $\begin{cases} t_n = o(u_n) \\ w_n = o(u_n) \end{cases} \implies t_n + w_n = o(u_n)$
(la somme de deux o est un o) ;

d) $u_n = o(1)$ si et seulement si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;

e) $\forall \alpha > 0,\ u_n = o(v_n) \implies u_n^\alpha = o(v_n^\alpha)$;
(pour des suites à valeurs dans $\mathbb{R}_+$)

f) $\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ w_n = o(t_n) \end{cases} \implies u_n w_n = o(v_n t_n)$
(compatibilité de o avec le produit) ;

g) $u_n = o(v_n) \implies u_n w_n = o(v_n w_n)$
(compatibilité de o avec le produit).

Le (a) est une propriété de transitivité ; elle permet d'écrire $u_n \ll v_n \ll w_n$ sans qu'il y ait d'ambiguité : si $u_n \ll v_n$ et $v_n \ll w_n$, alors $u_n \ll w_n$. C'est pour ce type de raccourci que la notation de Hardy est plus intéressante que celle de Landau. Grâce à elle, on pourra écrire des *échelles de comparaison*, comme celle des puissances de n :

$$\cdots \ll \frac{1}{n^3} \ll \frac{1}{n^2} \ll \frac{1}{n} \ll 1 \ll n \ll n^2 \ll n^3 \ll \cdots$$

Une propriété brille par son absence : l'addition n'est pas compatible avec la relation de négligeabilité. C'est-à-dire que

$$\begin{cases} u_n = o(v_n) \\ a_n = o(b_n) \end{cases} \quad \text{n'implique pas} \quad u_n + a_n = o(v_n + b_n)$$

Par exemple $\sqrt{n} = o(n)$ et $\sqrt{n} = o(1-n)$ mais $2\sqrt{n} \neq o(1)$. La relation de négligeabilité permet de reformuler les croissances comparées des suites de référence.

Proposition 2.35. (Croissances comparées des suites usuelles).
Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}$ vérifiant $|a| > 1$, on a $\ln^\beta(n) \ll n^\alpha \ll a^n \ll n! \ll n^n$.

La démonstration repose sur le lemme de comparaison géométrique ci-contre (↯ **2.15.** et **2.16.**).

Lemme 2.36. (Comparaison géométrique).
Si $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0,1[$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

6.2. L'équivalence

‘ La relation suivante formalise l'idée de deux suites ayant *le même ordre de grandeur asymptotique*.

Définition 2.37. **Équivalence, notation ∼ (Landau)** (↯ **2.17.**)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de réels. On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est équivalente à $(v_n)_{\geqslant 0}$ si

▷ $\exists(\delta_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *telle que* $\delta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *et* $u_n = \delta_n v_n$ *à partir d'un certain rang.*

▷ *On note alors $u_n \sim v_n$ (notation de Landau).*

Si $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang, alors $u_n \sim v_n$ équivaut à $\dfrac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

On dit de deux suites équivalentes qu'elles ont « *le même ordre de grandeur* ». Un exemple typique est celui des suites polynomiales : pour $d \in \mathbb{N}$, $(a_0,\dots,a_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que $a_d \neq 0$, on a

$$a_0 + a_1 n + \cdots + a_d n^d \sim a_d n^d$$

Car $\dfrac{a_0 + a_1 n + \cdots + a_d n^d}{a_d n^d} = 1 + \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} a_i n^{i-d} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ par opérations sur les limites.

L'équivalence est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites de nombres réels $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (les propriétés de réflexivité et de symétrie sont évidentes).

Proposition 2.38. (Règles de calcul)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quatre suites de nombres réels.

a) $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \sim w_n \end{cases} \Longrightarrow u_n \sim w_n$ (transitivité de ∼)

b) $u_n \sim v_n \iff u_n = v_n + o(v_n)$

c) Si $u_n \sim v_n$, alors
$$w_n = o(u_n) \iff w_n = o(v_n)$$

d) $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ w_n \sim t_n \end{cases} \Longrightarrow u_n w_n \sim v_n t_n$
(compatibilité de ∼ avec ×) ;

e) $u_n \sim v_n \Longrightarrow u_n w_n \sim v_n w_n$
(compatibilité de ∼ avec ×) ;

f) $u_n \sim v_n \Longrightarrow \dfrac{1}{u_n} \sim \dfrac{1}{v_n}$;

g) $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ w_n \sim t_n \end{cases} \Longrightarrow \dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{t_n}$.

Les propriétés (d) et (g) peuvent se résumer ainsi : pour calculer un équivalent d'un produit (resp. d'un quotient), il suffit de former le produit (resp. le quotient) des équivalents. Comme pour la négligeabilité, il n'existe pas de résultat de ce type pour les sommes. La relation ∼ n'est pas compatible avec l'addition :

$$\begin{cases} u_n \sim v_n \\ a_n \sim b_n \end{cases} \quad \text{n'implique pas} \quad u_n + a_n = v_n + b_n$$

Par exemple $n+1 \sim n+1$ et $-n+\sqrt{n} \sim -n$ mais $1+\sqrt{n} \not\sim 1$. En particulier, on ne peut ajouter membre à membre des équivalences ni faire passer un terme de gauche à droite en le transformant en son opposé(mais c'est possible pour le produit) :

$$u_n \sim v_n \quad \text{n'implique pas} \quad u_n + a_n \sim v_n + a_n \qquad \Bigg| \qquad u_n + a_n \sim v_n \quad \text{n'implique pas} \quad u_n \sim v_n - a_n$$

Proposition 2.39. (Composition à droite dans des équivalents)
Pour $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\phi(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, $u_n \sim v_n \implies u_{\phi(n)} \sim v_{\phi(n)}$.

Ainsi $u_n \sim v_n \implies u_{2n+1} \sim v_{2n+1}$. Comme pour la négligeabilité, il n' y a pas de résultat général sur la composition à gauche dans des équivalents, c'est-à-dire que, pour une fonction $f : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$

$$u_n \sim v_n \quad \text{n'implique pas} \quad f(u_n) \sim f(v_n)$$

en toute généralité. Par exemple, $n+1 \sim n$ mais $e^{n+1} \not\sim e^n$ car $\frac{e^{n+1}}{e^n} = e$. Il existe cependant des cas où l'on peut composer à gauche.

Proposition 2.40. (Règles de composition à gauche dans des équivalents)
Pour des suites positives :

a) $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ u_n \sim v_n \implies u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$ pour des suites positives;

b) Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{1\}$ et $u_n \sim v_n$, alors $\ln u_n \sim \ln v_n$.

On reconnaît des compositions à gauche par $x \mapsto x^\alpha$ et $x \mapsto \ln x$. Des suites convergeant vers 1 sont équivalentes mais pas nécessairement leurs logarithmes :

$$1-\frac{1}{n} \sim 1+\frac{1}{n} \quad , \quad \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim -\frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n} \quad \text{(cf. les équivalents usuels un peu plus loin)}$$

Deux suites équivalentes ont des propriétés en commun.

Proposition 2.41.
Deux suites équivalentes sont du même signe à partir d'un certain rang.

En revanche, le sens de variation n'est pas conservé par équivalence. En eftet, $1-\frac{1}{n} \sim 1+\frac{1}{n}$ (car le quotient des deux expressions converge vers 1) mais l'expression de gauche est croissante alors que celle de droite décroît.

6.3. La domination

La dernière relation de comparaison, la domination, est moins importante dans un premier temps mais rend tout de même quelques précieux services [6].

Définition 2.42. Domination, notation O (Landau)

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites de réels. On dit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est dominée par $(v_n)_{n\geqslant 0}$ si

- ▷ $\exists (b_n)_{n\geqslant 0} \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ *bornée telle que $u_n = b_n v_n$ à partir d'un certain rang.*
- ▷ *On note alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$.*

Si $v_n \neq 0$ APCR, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ équivaut à $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant 0}$ est bornée.

6. Nous verrons son utilité dans le chapitre du cours d'analyse consacré aux séries numériques.

Comme dans le cas des « *petits ô* », il s'agit d'un abus de notation. Il ne s'agit pas d'une égalité mais d'une relation. Il est clair que $u_n = o(v_n)$ implique que $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ car une suite qui converge vers 0 est bornée. La réciproque est fausse, on a par exemple $2024n^2 + 1 = \mathrm{O}\left(n^2\right)$ mais $2024n^2 \neq o\left(n^2\right)$ car l'expression $\frac{2024n^2+1}{n^2}$ ne tend pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Proposition 2.43. (Règles de calcul)
Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$, $(w_n)_{n\geqslant 0}$ et $(t_n)_{n\geqslant 0}$ quatre suites de réels.

a) $\begin{cases} u_n &= \mathrm{O}(v_n) \\ v_n &= \mathrm{O}(w_n) \end{cases} \implies u_n = \mathrm{O}(w_n)$
(transitivité de O) ;

b) $u_n = \mathrm{O}(1)$ si et seulement si (u_n) est bornée ;

c) $\begin{cases} u_n &= \mathrm{O}(v_n) \\ w_n &= \mathrm{O}(t_n) \end{cases} \implies u_n w_n = \mathrm{O}(v_n t_n)$
(compatibilité de O avec $\times$) ;

d) $u_n = \mathrm{O}(v_n) \implies u_n w_n = \mathrm{O}(v_n w_n)$
(compatibilité de O avec $\times$).

6.4. Le principe du calcul asymptotique

Au delà du signe, une autre propriété est conservée par équivalence : l'existence et la valeur d'une limite.

Proposition 2.44. (Comportement asymptotique des suites équivalentes)
Soit $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Après avoir énoncé toutes les règles de calcul usuelles, nous pouvons à présent illustrer le calcul asymptotique par l'exemple des fractions rationnelles, i.e. les quotients de deux polynômes. Considérons $a_0, \ldots, a_p$ et $b_0, \ldots, b_q$ des nombres réels tels que a_p et b_q soient non nuls. On a

$$u_n := \frac{a_0 + a_1 n \cdots + a_p n^p}{b_0 + b_1 n \cdots + b_q n^q} \sim \frac{a_p n^p}{b_q n^q} = \frac{a_p}{b_q} n^{p-q}$$

par les règles de calcul sur les quotients d'équivalents. On est ramené à étudier la limite en $+\infty$ d'une expression beaucoup plus simple que le quotient initial.

▷ On en déduit que si $p > q$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varepsilon\infty$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ est le signe de $\frac{a_p}{b_q}$.

▷ De même, si $q > p$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et si $p = q$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{a_p}{b_q}$.

Ce type de calcul, qualifié d'asymptotique, est bien plus efficace que les méthodes standards.

Levée d'une forme indéterminée par des équivalents

On trouve une *chaîne d'équivalents* $a_n \sim b_n \sim \cdots \sim z_n$, jusqu'à aboutir à (z_n) de comportement connu, $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. On en conclut que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Dans les calculs, on aura intérêt à chercher les équivalents les plus simples possibles. Il est clair que l'équivalent le plus simple d'une suite convergente de limite non nulle est sa limite.

Proposition 2.45.
Pour $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}^*$, $u_n \sim \ell$ *si et seulement si* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

Équivalents usuels

Pour $(u_n)_{n\geqslant 0}$ convergeant vers 0 et f dérivable en 0 avec $f'(0)\neq 0$, on a $f(u_n)-f(0)\sim f'(0)\,u_n$.
On en déduit les cas usuels suivants :

a) $e^{u_n}-1\sim u_n$;

b) $\ln(1+u_n)\sim u_n$;

c) $\sin u_n\sim u_n$;

d) $\cos u_n - 1\sim -\dfrac{u_n^2}{2}$;

e) $\tan u_n\sim u_n$;

f) $(1+u_n)^\alpha-1\sim\alpha u_n$ (pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$).

Passons en revue brièvement les formes indéterminées usuelles.

Produits : formes indéterminées du type « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $0\times\infty$ » (⚡ **2.18.**)

Pour u_nv_n ou $\frac{u_n}{v_n}$: rechercher des équivalents *simples* de u_n et v_n.

On a

$$u_n := \frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)\times\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{e^{\frac{1}{n}}-1}\sim\frac{\frac{1}{n}\times\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}$$

ainsi $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. De même, $v_n := e^n\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{e^n}{n^2}$ d'où $v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ par croissances comparées.

Sommes : formes indéterminées du type « $+\infty-\infty$ »

Pour une somme u_n+v_n, on compare u_n et v_n. Si l'un des deux termes est négligeable devant l'autre, alors on sait conclure. Sinon, il faudra développer de nouveaux outils (les développements limités, cf. les chapitres ultérieurs du cours d'analyse).

On a $\ln n-\sqrt{n}+1\sim-\sqrt{n}$ car $\ln n+1=o\big(\sqrt{n}\big)$. Considérons $v_n := \sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}$. Ici, $\sqrt[3]{n+1}\sim\sqrt[3]{n}$, on ne peut donc pas procéder comme dans le calcul précédent. On remarque que :

$$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n} = n^{\frac{1}{3}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{3}}-1\right)\sim n^{\frac{1}{3}}\times\frac{1}{3n}=\frac{1}{3n^{\frac{2}{3}}}$$

d'où $v_n\to 0$.

Puissances : formes indéterminées du type « 0^0 » et « 1^∞ »

Pour $u_n^{v_n}$, on écrit $u_n^{v_n}=e^{v_n\ln u_n}$ et on s'intéresse au produit $v_n\ln u_n$.

Pour $a\in\mathbb{R}$, posons $u_n := \left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n$. Comme $1+\frac{a}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$, on a $1+\frac{a}{n}>0$ pour n assez grand. Ainsi,

$$\ln u_n = n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)\sim n\times\frac{a}{n}=a$$

On en déduit que $\ln u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}a$ puis $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^a$ pour continuité de l'exponentielle en a.

7. Extension au cas des suites à valeurs complexes

La définition de la convergence s'étend aux suites à valeurs complexes en remplaçant la valeur absolue par le module.

Proposition 2.46. (Convergence des suites complexes)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{C}$.

a) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ si et seulement si $\mathrm{Re}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(\ell)$ et $\mathrm{Im}(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}(\ell)$;

b) Si $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} r$, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n admet un argument θ_n et $\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \theta$, alors $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} re^{i\theta}$.

Attention, dans le cas où θ_n est un argument de z_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on ne peut conclure que $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Par exemple :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ e^{2i\pi(-1)^n} = 1$$

L'ensemble des résultats sur les opérations sur les suites convergentes s'étendent au cas complexe avec des démonstrations semblables au cas réel.

Proposition 2.47. (Suites géométriques complexes)
Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $|z| < 1$, alors $z^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et, si $|z| > 1$, alors $|z^n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Le cas où $|z| = 1$ est plus délicat et hors-programme : si z est une racine de l'unité, alors la suite $(z^n)_{n\geqslant 0}$ est périodique, sinon la suite est dense sur le cercle unité $\mathbb{U}$.

8. Tests

2.1. Les assertions suivantes sont-elles vraies ?

a) Le produit de deux suites croissantes est une suite croissante.

b) La produit de deux suites décroissantes est une suite décroissante.

2.2. Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_{n+1} - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Peut-on en conclure que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge ?

2.3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle dont tous les termes sont non nuls. Peut-on affirmer que si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ou $\frac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$?

2.4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Parmi les suites ci-dessous, supposées indexées par $\mathbb{N}$, trouver celles qui sont extraites d'une autre :

$$(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}},\ (u_{2n})_{n\in\mathbb{N}},\ (u_{3\times 2^n})_{n\in\mathbb{N}},\ \left(u_{3\times 2^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}},\ (u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}},\ \left(u_{2^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

2.5. Soit (u_n) une suite réelle et $(u_{\varphi(n)})$ une suite extraite de (u_n). Montrer que toute suite extraite de $(u_{\varphi(n)})$ est extraite de (u_n).

2.6. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ définies par $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$ sont adjacentes.

2.7. Soit a et b deux réels strictement positifs, les parties suivantes sont-elles majorées, minorées. Si oui, quelles sont leurs bornes supérieures, inférieures ? Admettent-elles un plus grand élément, un plus petit élément ?

a) $\{a + bn\,;\, n \in \mathbb{N}\}$;

b) $\left\{a + (-1)^n b\,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$;

c) $\left\{(-1)^n a + \dfrac{b}{n}\,;\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

2.8. Soit $\lambda > 0$, $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(e^{u_n} + \lambda)$. Calculer u_n en fonction de n et u_0.

2.9. Soit (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^3$. Calculer u_n en fonction de n et u_0.

2.10. Soit (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = 2u_n + 3^n$ et $v_n = \dfrac{u_n}{3^n}$.

a) Vérifier que (v_n) est arithmético-géométrique.

b) En déduire v_n puis u_n en fonction de n. Étudier la convergence de (u_n).

2.11. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $(u_0, u_1) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n)$. Exprimer u_n en fonction de n puis étudier la convergence de la suite.

2.12. Étudier les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ respectivement définies par :

a) $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n} \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}_+ \\ u_{n+1} = \dfrac{3}{16} + u_n^2 \end{cases}$

2.13. Soit $(u_n)_{n\geqslant 2}$ définie par $u_n^n - nu_n + 1 = 0$ et $u_n \in [0, 1]$.

a) Montrer que (u_n) est bien définie.

b) Étudier le sens de variation de (u_n), prouver qu'elle converge et calculer sa limite.

c) Vérifier que $\forall n \geqslant 2,\, 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{2}{n}$ et retrouver que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2.14. Est-il possible d'avoir $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(u_n)$ pour des suites non nulles APCR ?

2.15. Comparer $\exp(\exp n)$ et n^n.

2.16. Déterminer les limites en $+\infty$ des expressions suivantes :

a) $2^n n^{666} e^{-n}$; b) $2^n n^{666} e^{-n/2}$; c) $2^n \sin^2(n) e^{-n}$; d) $n(\ln(n))^{-\ln(n)}$.

2.17. Trouver une *condition nécessaire et suffisante* pour que $e^{u_n} \sim e^{v_n}$.

2.18. Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par $u_n = n^2 \sin\left(\dfrac{1}{n}\right) \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$.

9. Solutions des tests

2.1.

a) Non ; cex : $(-1/n)$ et (n^2).

b) Non ; cex : $(1/n^2)$ et $(-n)$.

2.2. Non : cex $u_n := \sqrt{n}$.

2.3. Non ; cex $((-1)^n/n)$.

2.4. $\left(u_{2^{n+1}}\right)$ est extraite de (u_{2^n}), qui est extraite de (u_{2n}) ; $\left(u_{3\times 2^{n+1}}\right)$ est extraite de $(u_{3\times 2^n})$ qui est extraite de (u_{3n}) ; $\left(u_{3\times 2^{n+1}}\right)$ est extraite de (u_{2n}).

2.5. Le résultat est une évidence. Formalisons : une suite extraite de $(u_{\varphi(n)}$ est de la forme $(u_{\varphi(\psi(n))} = u_{(\varphi\circ\psi)(n)}$ avec $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante. Comme $\varphi\circ\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante en tant que composée d'application strictement croissante, $(u_{\varphi(\psi(n))}$ est extraite de (u_n).

2.6. u est croissante, et $v-u$ tend clairement vers 0. De plus

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_{n+1} - v_n = \frac{-n^2-3n-1}{n^2(n+1)^3} < 0$$

donc v est décroissante.

2.7. Nous noterons A à chaque fois l'ensemble étudié.

a) A minorée par $a \in \mathrm{A}$ donc $\min(\mathrm{A}) = \inf(\mathrm{A}) = a$; A est clairement non majorée.

b) C'est un gag car $\mathrm{A} = \{a-b, a+b\}$: A est clairement bornée et $\inf(\mathrm{A}) = \min(\mathrm{A}) = a-b$ et $\max(\mathrm{A}) = \sup(\mathrm{A}) = a+b$;

c) A est minorée par $-a$ et $\inf(\mathrm{A}) = -a$ car

$$(-1)^{2n+1}a + \frac{b}{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -a$$

Comme $-a \notin \mathrm{A}$, A n'admet pas de plus petit élément ; A majorée par $\max(-a+b, a+(b/2))$ (regarder séparément les n pairs et les n impairs) et

$$\sup(\mathrm{A}) = \max(\mathrm{A}) = \begin{cases} -a+b & \text{si } 4a < b \\ a+(b/2) & \text{sinon} \end{cases}$$

2.8. La suite de terme général $v_n = e^{u_n}$ est arithmétique de raison λ. Ainsi,

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \ln\left(e^{u_0} + n\lambda\right)$$

2.9. Par une récurrence immédiate, $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\ln u_{n+1} = 3\ln u_n$. Ainsi, $\ln u_n = 3^n \ln u_0$ puis $u_n = u_0^{3^n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2.10.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2u_n + 3^n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{2u_n}{3^{n+1}} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}v_n + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc arithmético-géométrique.

b) Classiquement :

$$v_n = 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n (v_0 - 1) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

On déduit de ce qui précède que $u_n = 3^n v_n = 3^n - 2^n$ et donc

$$u_n = 3^n\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

2.11. Les racines de l'équation caractéristique

$$z^2 - \frac{1}{2}(z+1) = 0$$

sont 1 et $-\frac{1}{2}$,il existe donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \geqslant 0,\quad u_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

Puisque $u_0 = \lambda + \mu,\ u_1 = \lambda - \dfrac{\mu}{2}$, on aboutit à

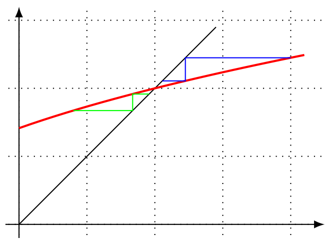
$$\lambda = \frac{u_0 + 2u_1}{3},\quad \mu = \frac{2u_0 - 2u_1}{3}$$

On a donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda = \dfrac{u_0+2u_1}{3}$.

2.12.

a) On applique la méthode vue en cours.

▹ *Une figure.*



On conjecture que la suite converge vers 2. Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $x \mapsto \sqrt{2+x}$. On prouve sans peine que 2 est le seul point fixe de f.

▹ *Définition de la suite.*
Comme $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$, la suite est définie pour tout $u_0 \in \mathbb{R}_+$.

▹ *Monotonie de la suite.*
La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$, intervalle stable par f.

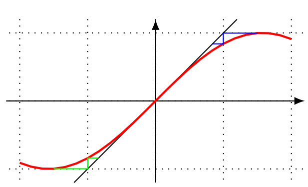
† Si $u_0 \leqslant 2$, on a $u_1 \geqslant u_0$ et on prouve par récurrence que $u_n \leqslant 2$ et $u_{n+1} \geqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc croissante et majorée par 2 : elle converge donc.

† Si $u_0 \geqslant 2$, on a $u_1 \leqslant u_0$ et on prouve par récurrence que $u_n \geqslant 2$ et $u_{n+1} \leqslant u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée par 2 : elle converge donc.

Comme f est continue, (u_n) converge nécessairement vers un point fixe de f. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

b) Idem.

▹ *Une figure*



On conjecture que la suite converge vers 0.

▹ *Définition de la suite.*
Aucun problème car le sinus est défini sur $\mathbb{R}$.

▹ *Monotonie de la suite.*
On a $u_1 = \sin(u_0) \in [-1,1]$.

† *Cas où* $u_1 \in [0,1]$. Puisque que $\forall x \in [0,1]$,

$$0 \leqslant \sin(x) \leqslant x \leqslant 1$$

l'intervalle $[0,1]$ est stable par la fonction sinus. Ainsi , la suite est décroissante minorée par 0 donc convergente.

† *Cas où* $u_1 \in [-1,0]$. Puisque que $\forall x \in [-1,0]$,

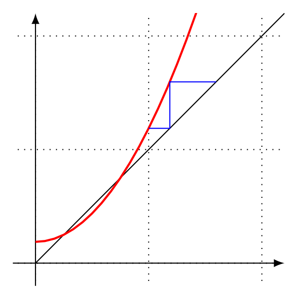
$$0 \geqslant \sin(x) \geqslant x \geqslant -1$$

l'intervalle $[-1,0]$ est stable par la fonction sinus. Ainsi, la suite est croissante majorée par 0 donc convergente.

▹ *Convergence de la suite.*
L'unique point fixe du sinus sur $\mathbb{R}$ étant 0 (étudiez $x \mapsto \sin(x) - x$), la suite converge vers 0.

c) Ibidem.

▹ *Une figure.*



On conjecture que la suite converge vers $1/4$ si $u_0 \in [0,3/4[$, est constante égale à $3/4$ si $u_0 = 3/4$ et diverge vers $+\infty$ si $u_0 > 3/4$.

▹ *Définition de la suite.*
Aucun problème car la fonction est définie sur $\mathbb{R}$.

▹ *Convergence de la suite.*
Notons f la fonction définissant la suite. Un calcul sans difficulté montre que f n'admet que deux points fixes , $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$. Comme f est continue, si la suite converge, sa limite est un point fixe de f.

† *Cas où* $u_0 \in [0,1/4]$. L'intervalle $[0,1/4]$ étant stable par f, la suite est à valeurs dans $[0,1/4]$. Sur cet intervalle, $f(x) \geqslant x$ donc la suite est croissante. Comme elle

est majorée, elle converge ; le seul point fixe de f sur cet intervalle étant $1/4$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/4$.

† *Cas où* $u_0 \in [1/4, 3/4[$. L'intervalle $[1/4, 3/4[$ étant stable par f, la suite est à valeurs dans $[1/4, 3/4[$. Sur cet intervalle, $f(x) \leqslant x$ donc la suite est décroissante. Comme elle est minorée, elle converge vers une limite appartenant à $[1/4, u_0] \subset [1/4, 3/4[$; le seul point fixe de f sur $[1/4, 3/4[$ étant $1/4$, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1/4$.

† *Cas où* $u_0 = 3/4$. La suite est clairement constante.

† *Cas où* $u_0 > 3/4$. L'intervalle $]3/4, +\infty[$ étant stable par f, la suite est à valeurs dans $]3/4, +\infty[$. Sur cet intervalle, $f(x) \geqslant x$ donc la suite est croissante. Elle ne peut converger car $]u_0, +\infty[$ ne contient aucun point fixe de f. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

2.13.

a) Étudions les variations de $\mathrm{P}_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{P}_n(x) = x^n - nx + 1$. La fonction polynôme P_n est continue sur $[0,1]$ or $\mathrm{P}_n(0) = 1$ et $\mathrm{P}_n(1) = 2 - n \leqslant 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet donc de conclure qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $\mathrm{P}_n(c) = 0$. P_n est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1[$,

$$\mathrm{P}'_n(x) = n(x^{n-1} - 1) < 0$$

La fonction polynôme P_n est donc strictement décroissante sur $[0,1]$, il existe donc une unique racine u_n de P_n sur $[0,1]$.

b) Pour tout $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{n+1}(u_n) &= \mathrm{P}_{n+1}(u_n) - \mathrm{P}_n(u_n) \\ &= -u_n - (1-u_n)u_n^n < 0 \end{aligned}$$

et d'après les variations de P_{n+1} sur $[0,1]$ étudiées à la question a), on a $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est donc décroissante. Comme elle est minorée par 0, elle converge vers un réel positif ℓ. Raisonnons par l'absurde en supposant $\ell > 0$. Comme $\forall n \geqslant 2$, $u_n^n = nu_n - 1$, on aurait $u_n^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ ce qui est absurde car $u_n^n \leqslant 1$ pour tout $n \geqslant 2$.

c) Pour tout $n \geqslant 2$, $nu_n - 1 = u_n^n \leqslant 1$, d'où

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{2}{n}$$

ainsi , d'après le théorème d'encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2.14. Raisonnons par l'absurde : si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(u_n)$, alors

$$1 = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{v_n}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

ce qui est manifestement absurde.

2.15. On a

$$\frac{\exp(\exp(n))}{n^n} = \exp\big(\exp(n) - n\ln(n)\big)$$

Par croissances comparées, $n \ln n \ll e^n$, donc

$$\exp(n) - n\ln(n) = \exp(n)\left(1 - \frac{n\ln(n)}{e^n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

ainsi

$$\frac{\exp(\exp(n))}{n^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

et donc $n^n \ll \exp(\exp(n))$.

2.16.

a) Comme

$$2^n n^{666} e^{-n} = n^{666} e^{(\ln(2)-1))n}$$

et $\ln(2) - 1 < 0$, on déduit des croissances comparées que :

$$2^n n^{666} e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

b) Comme

$$2^n n^{666} e^{-n/2} = n^{666} e^{(\ln(2)-1/2))n}$$

et $\ln(2) - 1/2 > 0$, on déduit des croissances comparées que :

$$2^n n^{666} e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

c) Comme

$$|2^n \sin^2(n) e^{-n}| \leqslant e^{(\ln(2)-1))n}$$

et $\ln(2) - 1 < 0$, on déduit des croissances comparées et du théorème des gendarmes que :

$$2^n \sin^2(n) e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

d) Comme

$$n(\ln(n))^{-\ln(n)} = e^{\ln(n)-\ln(n)\ln(\ln(n))}$$

on déduit des croissances comparées que :

$$n(\ln(n))^{-\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2.17. On a $e^{u_n} \sim e^{v_n}$ *si et seulement si* $e^{u_n-v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$, ce qui équivaut à $u_n - v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(1) = 0$ par continuité du logarithme en 1.

2.18. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = -\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

d'où

$$u_n = -n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

ainsi

$$u_n \sim -n^2\frac{1}{n}\frac{1}{n} = -1$$

donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.