Exercices 3 | Nombres complexes

Étude et applications des nombres complexes, équations algébriques (second degré et racines n-èmes de l'unité). Les nombres complexes sont de puissants intermédiaires de calculs en trigonométrie, en géométrie et sont incontournables pour l'étude des oscillations en physique (électronique et mécanique).

I. Calculs

Exercice 1. IND § SOL *Pour commencer en douceur*

On considère le nombre complexe $z = \left(1-\sqrt{3}\right) - i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

1. Déterminer le module et un argument de z^2.

2. En déduire z sous forme polaire.

3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{17\pi}{12}\right)$.

4. En utilisant ces résultats, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante d'inconnue réelle x :

$$(\mathrm{E}) \quad : \quad \left(1-\sqrt{3}\right)\cos(x) - \left(1+\sqrt{3}\right)\sin(x) = 2$$

Exercice 2. IND § SOL ♪ *Paramétrage de $\mathbb{U}$*

On note $\mathbb{U}$, l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1. Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Démontrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.

2. Vérifier que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i} \in \mathbb{U}$.

3. Réciproquement, déterminer les éléments de $\mathbb{U}$ pouvant s'écrire sous la forme $\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que, $\forall u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$, $\dfrac{z-u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. IND § SOL ♪ *Modules*

Déterminer les nombres complexes z tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $1+z$ aient le même module.

Exercice 4. IND § SOL ♪ *Une équation trigonométrique*

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $z_\theta = -\sin(2\theta) + 2i\cos^2(\theta)$.

1. Déterminer le module de z_θ.

2. Déterminer l'ensemble des nombres réels θ tels que $|z_\theta| = |z_\theta - 1|$.

II. Inégalités

Exercice 5. IND § SOL ♪ *Inégalités*

Prouver que $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ 1 \leqslant |z+z'| + |1+z| + |z'|$ et $|z+z'|^2 \leqslant \left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)$.

EXERCICE 6. IND § SOL ♪ *Partie réelle d'une fraction rationnelle*

Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $|z| \leqslant 1$. Établir que $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$.

EXERCICE 7. IND § SOL ♫ *Pour les amateurs*

Soit u un nombre complexe de module 1. Prouver que $|1+u| \geqslant 1$ ou $\left|1+u^2\right| \geqslant 1$.

EXERCICE 8. IND § SOL ♫ *L'inégalité triangulaire généralisée*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux.

1. Prouver que, pour tout $(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n,\ |z_1+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$.

2. Montrer que, pour tous z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}^*,\ |z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \iff \arg(z_1) = \arg(z_2)$.

3. Montrer que $\forall (z_1,\dots,z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n,\ |z_1+\cdots+z_n| = |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n| \iff \arg(z_1) = \cdots = \arg(z_n)$.

EXERCICE 9. IND § SOL ♫ *Une belle inégalité*

Soient $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_n$ des nombres complexes non nuls d'arguments respectifs $\theta_1, \dots, \theta_n$.
On suppose que $e^{i\theta_1} + \cdots + e^{i\theta_n} = 0$.

1. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |z_k - z|$. On pourra simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k}(z_k - z)$.

2. Montrer qu'il existe $m \in [\![1,n]\!]$ tel que $|z_m - z| \geqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |z_k|$.

EXERCICE 10. IND § SOL ♫♪ *Deux inégalités sur les modules*

1. Prouver que $\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ |a|+|b| \leqslant |a+b|+|a-b|$.

2. En déduire que pour tous z_1, z_2, z_3 et z_4 dans $\mathbb{C}$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} |z_i + z_j|$.

III. Équations atypiques

EXERCICE 11. IND § SOL ♪ *Autour de l'exponentielle*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = -1$ puis $e^z + e^{-z} = 2i$.

EXERCICE 12. IND § SOL ♪ *Lieux géométriques*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) = 0,\ \operatorname{Im}\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) = 0$ et $\operatorname{Re}\left(z^3\right) = \operatorname{Im}\left(z^3\right)$.

EXERCICE 13. IND § SOL ♪ *Divertissements*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2+8|z|-3=0$; **2.** $z+\overline{z}=|z|$; **3.** $z^5=16\overline{z}$; **4.** $2\overline{z}-3z=2+3i$;

EXERCICE 14. IND § SOL ♫ *Équation en z et $\overline{z}$*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\overline{z}(z-1)=z^2(\overline{z}-1)$.

IV. Équations du second degré ou s'y ramenant

EXERCICE 15. IND § SOL ♪ *Classique*

Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $\left(z^2+1\right)^2+\left(z^2-z-1\right)^2=0$.

EXERCICE 16. IND § SOL ♪ *Une équation atypique*

Soit a un réel, on considère l'équation **E** : $z+\overline{z}^2=a$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$.

1. Déterminer une condition *nécessaire et suffisante* portant sur a pour que **E** possède au moins une solution réelle.
2. Résoudre **E**. Discuter en fonction de a, et donner dans chaque cas le nombre de solutions, dire si elles sont réelles, conjuguées, etc... On présentera le résultat final dans un tableau.

EXERCICE 17. IND § SOL ♫ *Module des racines d'une équation*

1. Soient $(z,z')\in\mathbb{C}^2$ et u une racine carrée de zz'. Démontrer que $|z|+|z'|=\left|\frac{z+z'}{2}-u\right|+\left|\frac{z+z'}{2}+u\right|$.
2. Soit $m\in\mathbb{C}$. On note α et β les racinesde $z^2+2mz+1=0$. Établir que $|\alpha|+|\beta|=|m+1|+|m-1|$.

EXERCICE 18. IND § SOL ♫♪ *Conditions sur les racines*

Soit $(p,q)\in\mathbb{C}^2$, avec $q\neq 0$. Montrer que les racines de l'équation $z^2+pz+q=0$ ont le même module *si et seulement si* $p^2/(4q)\in[0,1]$.

V. Racines n-ièmes

EXERCICE 19. IND § SOL ♪ *Une petite équation atypique*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Trouver les complexes z tels que $z^n=\overline{z}^{n-1}$.

EXERCICE 20. IND § SOL ♪ *Racines septièmes de l'unité*

Soit ω une racine septième de l'unité distincte de 1. Simplifier $\dfrac{\omega}{1+\omega^2}+\dfrac{\omega^2}{1+\omega^4}+\dfrac{\omega^3}{1+\omega^6}$.

EXERCICE 21. IND § SOL ♪ *Quatre équations*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(z+i)^3+iz^3=0$;

2. $z^4-2z^3-z^2-2z+1=0$ en posant $Z=z+z^{-1}$;

3. $z^4+2-i\sqrt{12}=0$.

Exercice 22. IND § SOL ♪ *Lignes trigonométriques de* $\pi/5$

On pose $\omega=e^{\frac{2i\pi}{5}}$, $\alpha=\omega+\omega^4$ et $\beta=\omega^2+\omega^3$.
Déterminer une équation du second degré dont les racines sont α et β. En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 23. IND § SOL ♪ *Mines-Ponts PC-2014*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Résoudre $\left(z^2+1\right)^n-(z+i)^{2n}=0$ dans $\mathbb{C}$.

Exercice 24. IND § SOL ♪♪ *Questions enchaînées*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=1$. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n=1$.

2. Soit $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\theta\neq 0\,[2\pi/n]$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n=e^{in\theta}$.

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n+\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n=2\cos(n\theta)$.
On traitera le cas général, $\theta\in\mathbb{R}$ sans aucune restriction.

Exercice 25. IND § SOL ♪♪ *Une expression de* $\tan(\pi/5)$

En résolvant $(1-iz)^5-(1+iz)^5=0$ de deux manières différentes, calculer $\tan(\pi/5)$.

Exercice 26. IND § SOL ♪♪ *Étude de l'anneau* $\mathbb{Z}[j]$

On note $j=e^{2i\pi/3}$, $\mathbb{Z}[j]:=\left\{a+bj\,;(a,b)\in\mathbb{Z}^2\right\}$, $\mathbb{U}_6$ l'ensemble des racines sixièmes de l'unité et $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module égal à un. La question 2 est indépendante des autres.

1. Vérifier que $1+j+j^2=0$.

2. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est stable par l'addition et le produit, c'est-à-dire

$$\forall(u,v)\in\mathbb{Z}[j]^2,\ u+v\in\mathbb{Z}[j]\quad\text{et}\quad uv\in\mathbb{Z}[j]$$

3. Démontrer que $\forall u\in\mathbb{Z}[j]\,,\ |u|^2\in\mathbb{N}$.

4. Exprimer les éléments de $\mathbb{U}_6$ en fonction de j et en déduire que $\mathbb{U}_6\subset\mathbb{Z}[j]$.

5. On pose $\mathbb{Z}[j]^\times=\left\{u\in\mathbb{Z}[j]\,;\ \frac{1}{u}\in\mathbb{Z}[j]\right\}$.

a. Établir que $\mathbb{U}_6\subset\mathbb{Z}[j]^\times$.

b. Soit $u\in\mathbb{Z}[j]^\times$. Démontrer au moyen de la question 3 que $u\in\mathbb{U}$.

c. En déduire que $\mathbb{Z}[j]^\times=\mathbb{U}_6$.

VI. Application à la géométrie plane

EXERCICE 27. IND § SOL ♪ *Où sont les racines ?*

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R}$. Soit $t \in]-\pi, \pi[$. On considère l'équation donnée par

$$\mathbf{E} : z^2 - 2(\cos t + i \sin t)z - 2(\sin t - i \cos t)\sin t = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On note $z_1(t), z_2(t)$ les racines complexes de $\mathbf{E}$ et $M_1(t), M_2(t)$ leurs images respectives.

1. Quel est l'ensemble décrit par le milieu de $[M_1(t)M_2(t)]$ lorsque t décrit $]-\pi, \pi[$? On ne calculera explicitement ni $z_1(t)$ ni $z_2(t)$.
2. Calculer $z_1(t)$ et $z_2(t)$ en fonction de t.
3. Déterminer le module et un argument de $z_1(t)$ et $z_2(t)$.

EXERCICE 28. IND § SOL ♪ *Questions d'alignement*

Le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R}$.

1. Déterminer les nombres complexes z tels que les trois points d'affixes 1, z et iz soient alignés.
2. Déterminer les nombres complexes z tels que les trois points d'affixes z^2, $1-z$ et $\overline{z}$ soient alignés.

EXERCICE 29. IND § SOL ♪ *Quadrilatères*

Soit ABCD un quadrilatère convexe du plan $\mathscr{P}$. On construit à l'extérieur de chacun des côtés du quadrilatère des triangles rectangles isocèles APB, BQC, CRD et DSA. Démontrer que les droites (PR) et (QS) sont perpendiculaires et que les longueurs PR et QS sont égales.

EXERCICE 30. IND § SOL ♪ *$\mathbb{C}$ magnifique !*

Soient A, B, C et D quatre points du plan $\mathscr{P}$ tels que les triangles OAB et OCD soient des triangles isorectangles en O et directs. On note I le milieu de [BC]. Prouver par un calcul d'affixes que les droites (OI) et (AD) sont orthogonales et que AD = 2OI.

EXERCICE 31. IND § SOL ♪♪ *Sa majesté équilatérale*

Soient A, B, C trois points deux à deux distincts d'affixes a, b, c.

1. Prouver que ABC est un triangle équilatéral direct *si et seulement si* $a + jb + j^2c = 0$, et équilatéral indirect *si et seulement si* $a + jc + j^2b = 0$.
2. Prouver que ABC est un triangle équilatéral *si et seulement si* $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

VII. Indications

Indication 1. On trouve $z^2 = 8e^{5i\pi/6}$.

Voir l'énoncé.

Indication 2. Écrire (par exemple) les éléments de $\mathbb{U}$ sous forme exponentielle e^{it} avec $t \in \mathbb{R}$.

Voir l'énoncé.

Indication 3. Montrer que les solutions sont nécessairement dans $\mathbb{U}$ puis les rechercher sous forme polaire. On trouve $\{ j\,,\, j^2 \}$. Une solution purement géométrique est possible.

Voir l'énoncé.

Indication 4. Au 1., on trouve $z_\theta = 2\cos(\theta)e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$. Au 2., élever au carré les modules.

Voir l'énoncé.

Indication 5. Appliquer judicieusement l'inégalité triangulaire.

Voir l'énoncé.

Indication 6. Écrire z sous forme algébrique.

Voir l'énoncé.

Indication 7. Écrire z sous forme trigonométrique.

Voir l'énoncé.

Indication 8. Raisonner par récurrence sur n au c.

Voir l'énoncé.

Indication 9. Au 1., il faut appliquer l'inégalité triangulaire.

Voir l'énoncé.

Indication 10. Au 1., appliquer deux fois l'inégalité triangulaire. Au 2., appliquer à plusieurs reprises l'inégalité du 1. et l'inégalité triangulaire.

Voir l'énoncé.

Indication 11. Écrire z sous forme algébrique pour la première équation. Pour la seconde, poser $y = e^z$ et se ramener à une équation du second degré en y.

Voir l'énoncé.

Indication 12. Rechercher les solutions sous forme : algébrique aux 1. et 2., polaire au 3. On trouve un cercle privé d'un point au 1., une droite privée d'un point au 2. et la réunion de trois droites au 3.

Voir l'énoncé.

INDICATION 13. Chercher les solutions : sous forme polaire aux 2. et 3., sous forme algébrique aux 1. et 4.

Voir l'énoncé.

INDICATION 14. S'intéresser au module de chacun des deux membres.

Voir l'énoncé.

INDICATION 15. Penser à $\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2=(\mathrm{A}+i\mathrm{B})(\mathrm{A}-i\mathrm{B})$. On trouve $\left\{\frac{-1-i}{2}, \frac{-1+i}{2}-1-i, -1+i\right\}$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 16. Se ramener à une équation du second degré à la première question. Poser $z=x+iy$ avec $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ au 2.

Voir l'énoncé.

INDICATION 17. Prouver l'égalité des carrés au 1. Le 2. est une application du a.

Voir l'énoncé.

INDICATION 18. Le cas où $p=0$ est trivial. Dans le cas où $p\neq 0$, poser $\lambda = p^2/(4q)$. Le discriminant de l'équation est alors $p^2(1-1/\lambda)$ et il est facile d'exprimer ses racines carrées en fonction de p et λ.

Voir l'énoncé.

INDICATION 19. Quel est le module d'une solution non nulle ?

Voir l'énoncé.

INDICATION 20. Exploiter la périodicité des puissances de ω ainsi que la relation $1+\omega+\cdots+\omega^6=0$. On trouve -2.

Voir l'énoncé.

INDICATION 21. On aboutit à une équation du second degré en Z au 2. On trouve :

1. $\left\{\frac{1-i}{2}, -\frac{1+i\left(2+\sqrt{3}\right)}{2\left(2+\sqrt{3}\right)}, -\frac{1+i\left(2-\sqrt{3}\right)}{2\left(2-\sqrt{3}\right)}\right\}$.

2. $\left\{j, j^2, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

3. $\left\{-\sqrt{2}e^{i\pi/6}, \sqrt{2}e^{i\pi/6}, -i\sqrt{2}e^{i\pi/6}, i\sqrt{2}e^{i\pi/6}\right\}$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 22. Calculer la somme et le produit de α et β.

Voir l'énoncé.

INDICATION 23. On trouve $\{-i\} \cup \left\{-\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) ; k \in [\![1, n-1]\!]\right\}$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 24. À la première équation du 1., on trouve les $-i\,\text{cotan}(k\pi/n)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$. On résout alors la seconde équation sans calcul, ou presque. Au 3., se ramener à une équation algébrique du second degré. On verra alors apparaître naturellement le lien avec le 2.

Voir l'énoncé.

INDICATION 25. Première piste : en développant par la formule du binôme, on aboutit à une équation du second degré en z^2 (c'est ce qu'on appelle une équation bicarrée). Deuxième piste : en posant $Z = (1 - iz)/(1 + iz)$, on est ramené à $Z^5 = 1$. On trouve donc les solutions sous deux formes différentes et, après identification, on obtient l'expression de $\tan(\pi/5)$ au moyen de radicaux : $\tan(\pi/5) = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 26. Voir l'énoncé.

INDICATION 27. Il faudra discuter sur t au 3.

Voir l'énoncé.

INDICATION 28. Appliquer la CNS d'alignement. On trouve :

1. Le cercle de centre d'affixe $\frac{1-i}{2}$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. La réunion des deux droites verticales définies par $\text{Re}\, z = \pm 1/2$ et de l'axe des abscisses.

Voir l'énoncé.

INDICATION 29. Travaillez dans un repère orthonormé direct quelconque du plan en utilisant des rotations pour trouver les affixes de P, Q, R, S en fonction de celles de A, B, C, D.

Voir l'énoncé.

INDICATION 30. Travailler dans un rond et effectuer des calculs d'affixes.

Voir l'énoncé.

INDICATION 31. Traduire $(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = \pi/3\,[2\pi]$ et $AB = AC$ en $\dfrac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$. Se souvenir que $1 + j + j^2 = 0$.

Voir l'énoncé.

VIII. Solutions

SOLUTION 1.

1. On a $z^2 = 4\cdot\left(-\sqrt{3}+i\right) = 8\cdot e^{5i\pi/6}$ ainsi $\left|z^2\right| = 8$ et $\frac{5\pi}{6}$ est un argument de z^2.

2. On déduit de la question précédente que $z = \pm 2\sqrt{2}\cdot e^{5i\pi/12}$ et comme $\mathrm{Re}(z) < 0$, on a $z = -2\sqrt{2}e^{5i\pi/12} = 2\sqrt{2}e^{17i\pi/12}$.

3. On en déduit que $\cos\frac{17\pi}{12} = \mathrm{Re}\left(\frac{z}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{17\pi}{12} = \mathrm{Im}\left(\frac{z}{2\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$.

4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on déduit de la question précédente que :

$$\begin{aligned}
x \text{ est solution de } \mathbf{E} &\iff \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)\cos(x) - \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right)\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\\
&\iff \cos\left(\frac{17\pi}{12}\right)\cos(x) + \sin\left(\frac{17\pi}{12}\right)\sin(x) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&\iff \cos\left(x - \frac{17\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&\iff x - \frac{17\pi}{12} = \pm\frac{\pi}{4}\ [2\pi]
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de **E** est donc $\left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 2.

1. Soit $z \in \mathbb{U}\setminus\{1\}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$. On $\frac{z+1}{z-1} = \frac{e^{i\theta}+1}{e^{i\theta}-1} = \frac{e^{i\theta/2}}{e^{i\theta/2}}\frac{2\cos(\theta/2)}{2i\sin(\theta/2)} = -i\,\mathrm{cotan}(\theta/2) \in i\mathbb{R}$.

> **VARIATIONS**
> *On peut aussi remarquer que* $\overline{z} = \frac{1}{z}$ *d'où* $\overline{\frac{z+1}{z-1}} = \frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-1} = \frac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1} = \frac{1+z}{1-z} = -\frac{z+1}{z-1}$ *donc* $\frac{z+1}{z-1} \in i\mathbb{R}$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Les nombres $1+\lambda i$ et $1-\lambda i$ étant conjugués, ils ont le même module et leur quotient est donc de module 1.

3. Réciproquement, supposons l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1+\lambda i}{1-\lambda i} = e^{i\theta}$. On a alors $1+\lambda i = (1-\lambda i)e^{i\theta}$ d'où $i\lambda(1+e^{i\theta}) = e^{i\theta} - 1$. Puisque $1+\lambda i \neq -(1-\lambda i)$, on a $e^{i\theta} \neq -1$ d'où $\lambda i = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1} = \frac{i\sin(\theta/2)}{\cos(\theta/2)}$ donc $\lambda \in \mathbb{R}$.

4. Soit $u \in \mathbb{U}\setminus\{1\}$. On a $\overline{u} = 1/u$ d'où $\overline{\frac{z-u\overline{z}}{1-u}} = \frac{\overline{z}-z/u}{1-1/u} = \frac{u\overline{z}-z}{u-1} = \frac{z-u\overline{z}}{1-u}$ donc $\frac{z-u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 3. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1+z| \iff \begin{cases} |z|^2 &= 1\\ |z+1| &= 1\end{cases} \iff \begin{cases} |z| &= 1\\ |z+1| &= 1\end{cases}$$

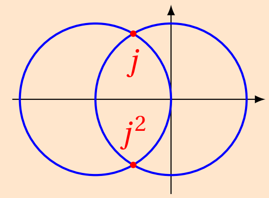
Les solutions sont les $z \in \mathbb{U}$ vérifiant $|z+1| = 1$. Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\left|1+e^{i\theta}\right|^2 = \left(1+e^{i\theta}\right)\left(1+e^{-i\theta}\right) = 2+2\cos\theta$ donc

$$\left|1+e^{i\theta}\right| = 1 \iff \cos\theta = -\frac{1}{2} \iff \theta = \pm\frac{2\pi}{3}\ [\pi]$$

On en déduit que les solutions de l'équation initiale sont $e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$ et $e^{-\frac{2i\pi}{3}} = j^2$.

UNE VERSION PLUS GÉOMÉTRIQUE

Comme l'équation équivaut à $|z| = |z+1| = 1$, un nombre z est solution si et seulement si son image M appartient à l'intersection des cercles de centres $\mathrm{O}(0)$ et $\mathrm{A}(-1)$, de rayons 1. Celle-ci « se voit bien » sur une figure, ce qui permet de trouver les solutions sans calcul. Cette approche plus géométrique est un peu moins rigoureuse, mais finalement tout aussi acceptable au concours.



Voir l'énoncé.

SOLUTION 4.

1. On a $z_\theta = -\sin(2\theta) + i\left(\cos(2\theta)+1\right) = i + ie^{2i\theta} = 2\cos(\theta)\,ie^{i\theta} = 2\cos(\theta)e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$.

2. On a

$$\begin{aligned}
|z_\theta| = |z_\theta - 1| &\iff |z_\theta|^2 = |z_\theta - 1|^2 \\
&\iff |z_\theta|^2 = |z_\theta|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z_\theta) + 1 \\
&\iff 2\,\mathrm{Re}(z_\theta) = 1 \\
&\iff \sin(2\theta) = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\
&\iff 2\theta = -\frac{\pi}{6}\ [2\pi] \ \text{ ou } \ 2\theta = \frac{7\pi}{6}\ [2\pi]
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{12} + k\pi\,;\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 5. Soit z et z' dans $\mathbb{C}$.

1. Par l'inégalité triangulaire :

$$1 = \left|1+z+z'-(z+z')\right| \leqslant |1+z| + |z'| + \left|-(z+z')\right| = |z+z'| + |1+z| + |z'|$$

2. On déduit l'inégalité du calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right) - |z+z'|^2 &= 1+|z|^2+|z'|^2+|zz'|^2-|z|^2-|z'|^2-\overline{z}z'-z\overline{z'} = 1+|zz'|^2-\overline{z}z'-z\overline{z'} \\
&= 1+\overline{z}z'z\overline{z'}-\overline{z}z'-z\overline{z'} = \left(1-z\overline{z'}\right)\left(1-\overline{z}z'\right) = \left|1-z'\overline{z}\right|^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

VARIANTE UTILISANT L'INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

On a $0 \leqslant |z+z'| \leqslant |z|+|z'|$. On conclut par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(|z|\times 1 + 1\times|z'|\right)^2 \leqslant \left(|z|^2+1\right)\left(1+|z'|^2\right)$$

On peut aussi conclure en remarquant que $\left(|z|+|z'|\right)^2 \leqslant \left(|z|^2+1\right)\left(1+|z'|^2\right)$ équivaut à $(1-|z||z'|)^2 \geqslant 0$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 6. Écrivons $z = x + iy$ avec x et y réels. On a facilement $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\cdot$ Ainsi

$$\begin{aligned}\frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} \geqslant \frac{1}{2} &\iff (1-x)^2 - 2(1-x) + y^2 \leqslant 0\\ &\iff (1-x-1)^2 - 1 + y^2 \leqslant 0\\ &\iff x^2 + y^2 \leqslant 1\\ &\iff |z| \leqslant 1\end{aligned}$$

D'où le résultat.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 7. Écrivons $u = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$. On a $1 + u = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $1 + u^2 = 2\cos(\theta)e^{i\theta}$. Posons alors $x = \cos\frac{\theta}{2}$, de sorte que $\left|1+u\right| = |2x|$ et $\left|1+u^2\right| = 2\left|2x^2-1\right|$. Supposons $|1+u| \geqslant 1$, ie $|x| < \frac{1}{2}\cdot$ On a alors $2x^2 - 1 < 2 \times \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$ puis $2\left(2x^2-1\right) < -1$ et donc $\left|1+u^2\right| \geqslant 1$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 8.

1. Raisonnons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, notons $\mathrm{HR}(n)$ la proposition suivante : pour tous nombres complexes $z_1, \dots, z_n$, on a $|z_1 + \ldots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|$.

- ▷ $\mathrm{HR}(2)$ est vraie, c'est l'inégalité triangulaire usuelle.
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie et soit $z_1, \ldots, z_{n+1}$ des nombres complexes. En appliquant l'inégalité triangulaire puis $\mathrm{HR}(n)$, on obtient :

$$|z_1 + \cdots + z_n + z_{n+1}| \leqslant |z_1 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + |z_{n+1}|$$

  d'où l'hypothèse au rang $n+1$.

2. Soit z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}^*$. En posant $u := \frac{z_1}{z_2}$, on a

$$\begin{aligned}|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\iff \frac{|z_1+z_2|}{|z_2|} = \frac{|z_1|+|z_2|}{|z_2|}\\ &\iff |u+1| = |u| + 1\\ &\iff |u+1|^2 = (|u|+1)^2\\ &\iff |u|^2 + 2 + 2\operatorname{Re} u = |u|^2 + 2|u| + 1\\ &\iff \operatorname{Re} u = |u|\\ &\iff u \in \mathbb{R}_+^*\\ &\iff \arg z_1 = \arg z_2\end{aligned}$$

3. Une des deux implications est immédiate.

▷ Soit $z_1, \dots, z_n$ dans $\mathbb{C}^*$ et ayant le même argument θ. Comme $z_1 + \cdots + z_n = (|z_1| + \cdots + |z_n|)\, e^{i\theta}$, on en déduit que $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$.

▷ Raisonnons par récurrence pour établir la réciproque. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, notons $\mathrm{HR}(n)$ la proposition suivante : pour tous nombres complexes non nuls $z_1, \dots, z_n$,

$$|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \implies \arg(z_1) = \arg(z_2) = \cdots = \arg(z_n)$$

† $\mathrm{HR}(2)$ est vraie d'après le 2..

† Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie et soit $z_1, \dots, z_{n+1}$ des nombres complexes tels que $|z_1 + \cdots + z_{n+1}| = |z_1 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| + |z_{n+1}|$. En appliquant l'inégalité triangulaire et le 1., on a

$$|z_1 + \cdots + z_{n+1}| \leqslant |z_1 + \cdots + z_n| + |z_{n+1}| \leqslant |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n| + |z_{n+1}| \ (\star)$$

Ainsi les deux inégalités apparaissant dans $(\star)$ sont en fait des égalités. En particulier, on en déduit que $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$ d'où $\arg(z_1) = \arg(z_2) = \cdots = \arg(z_n)$ par $\mathrm{HR}(n)$. Notons $\theta := \arg(z_1)$ et $z := z_1 + \cdots + z_n$. On a $|z + z_{n+1}| = |z| + |z_{n+1}|$. Comme $|z| = |z_1| + \cdots + |z_n| > 0$, on a $z \neq 0$ et puisque $z = (|z_1| + \cdots + |z_n|)\, e^{i\theta}$, on a $\theta = \arg z$. On déduit alors de $\mathrm{HR}(2)$ que $\theta = \arg z = \arg z_{n+1}$. Ainsi $\mathrm{HR}(n+1)$ est vraie.

VARIANTE POUR LE 3.

En notant r_k et ϕ_k le module et un argument de z_k pour tout k, on a

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 = \sum_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n} r_k r_\ell \cos(\phi_k - \phi_\ell)$$

On peut en déduire facilement que $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n| \iff \phi_1 = \phi_2 = \cdots = \phi_n\, [2\pi]$, *cf. les exercices sur les calculs algébriques pour le détail.*

Voir l'énoncé.

SOLUTION 9.

1. Puisque $\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k} = 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k}(z_k - z) = \sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k} z_k - \sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k} z = \sum_{k=1}^{n} |z_k| - \overline{\sum_{k=1}^{n} e^{i\theta_k}}\, z = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Par l'inégalité triangulaire, on a donc :

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k| = \left|\sum_{k=1}^{n} e^{-i\theta_k}(z_k - z)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left|e^{-i\theta_k}(z_k - z)\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k - z|$$

2. Raisonnons par l'absurde en supposant $m \in [\![1, n]\!]$ tel que $\forall m \in [\![1, n]\!]\,,\ \ |z_m - z| > \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |z_k|$. On en déduit par superposition de ces n inégalités :

$$\sum_{m=1}^{n} |z_m - z| > \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

ce qui est absurde par la question précédente.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 10.

1. Puisque $a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}$, on déduit de l'inégalité triangulaire que $|a| \leqslant \frac{|a+b|}{2} + \frac{|a-b|}{2}$.
On a donc aussi $|b| \leqslant \frac{|b+a|}{2} + \frac{|b-a|}{2}$ d'où $|a| + |b| \leqslant |a+b| + |a-b|$ en sommant les deux inégalités.

> **COMMENTAIRE**
> *On peut aussi établir que*
> $$(|a+b| + |a-b|)^2 = (|a| + |b|)^2 + (|a| - |b|)^2 + 2|a^2 - b^2|$$
> *pour résoudre cette question.*

2. D'après le 1., on a $|z_1| + |z_2| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2|$ et $|z_3| + |z_4| \leqslant |z_3 + z_4| + |z_3 - z_4|$ donc

$$\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leqslant |z_1 + z_2| + |z_1 - z_2| + |z_3 + z_4| + |z_3 - z_4|$$

Par le 1., on a $|z_1 - z_2| + |z_3 - z_4| \leqslant |z_1 + z_3 - (z_2 + z_4)| + |z_1 + z_4 - (z_2 + z_3)|$, on déduit alors de l'inégalité triangulaire que :

$$|z_1 + z_3 - (z_2 + z_4)| + |z_1 + z_4 - (z_2 + z_3)| \leqslant |z_1 + z_3| + |z_2 + z_4| + |z_1 + z_4| + |z_2 + z_3|$$

et donc $\sum_{k=1}^{4} |z_k| \leqslant |z_1 + z_3| + |z_2 + z_4| + |z_1 + z_4| + |z_2 + z_3| + |z_1 + z_2| + |z_3 + z_4|$, d'où le résultat.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 11.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z := x + iy$. On a

$$\begin{aligned} e^z = -1 &\iff e^x e^{iy} = e^{i\pi} \\ &\iff e^x = 1 \text{ et } y = \pi\,[2\pi] \\ &\iff x = 0 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z},\ y = \pi + 2k\pi \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{\, i(2k+1)\,;\, k \in \mathbb{Z}\}$.

2. En posant $\zeta = e^z$, l'équation est équivalente à $\zeta + \frac{1}{\zeta} = 2i$, ie $\zeta^2 - 2i\zeta + 1 = 0$, de solutions $\left(1 + \sqrt{2}\right) e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $\left(\sqrt{2} - 1\right) e^{-i\frac{\pi}{2}}$. En raisonnant comme au 1., on trouve que l'ensemble des solutions est égal à

$$\left\{ \ln\left(1 + \sqrt{2}\right) + i\frac{\pi}{2} + 2ik\pi\,;\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \ln\left(\sqrt{2} - 1\right) - i\frac{\pi}{2} + 2ik\pi\,;\, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

> **COMMENTAIRE**
> *Au 1., on a utilisé l'identification de deux formes trigonométriques : deux nombres complexes a et b non nuls (attention, cette hypothèse est essentielle) sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument modulo 2π (cf. le cours pour les justifications).*

Voir l'énoncé.

SOLUTION 12.

▷ Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z := x + iy$. On a

$$\frac{z-1}{z-i} = \frac{(z-1)\left(\overline{z}+i\right)}{|z-i|^2} = \frac{|z|^2 + iz - \overline{z} - i}{|z-i|^2} = \frac{x^2+y^2-x-y+i(x+y-1))}{|z-i|^2}$$

† L'équation $\mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$ est équivalente à $x^2 - x + y^2 - y = 0$, ie

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Le lieu des solutions est donc le cercle de centre d'affixe $\frac{1+i}{2}$ et de rayon $\sqrt{2}/2$, privé de i.

† L'équation $\mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0$ est équivalente à $x + y - 1 = 0$. Le lieu des solutions est la droite d'équation $x + y - 1 = 0$ privé du point d'affixe i.

COMMENTAIRE
Attention, dans les deux premières équations, il ne faut oublier que les équivalences sont obtenues sous l'hypothèse $z \neq i$. On peut également donner une démonstration moins calculatoire, plus géométrique. Notons $\mathrm{A}(1)$, $\mathrm{B}(i)$ et $\mathrm{M}(z)$ pour $z \neq i$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 &\iff \frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R}i \\ &\iff \mathbf{AM} \perp \mathbf{BM} \\ &\iff \mathrm{M} \in \mathscr{C} \end{aligned}$$

où $\mathscr{C}$ est le cercle de diamètre $[\mathrm{AB}]$.

De même :

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = 0 &\iff \frac{z-1}{z-i} \in \mathbb{R} \\ &\iff \mathbf{AM} \textit{ et } \mathbf{BM} \textit{ sont colinéaires} \\ &\iff \mathrm{M} \in (\mathrm{AB}) \end{aligned}$$

▷ On remarque que 0 est solution de la troisième équation. Soit $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Les parties réelle et imaginaire de $z^3 = \rho^3 e^{3i\theta}$ sont égales *si et seulement si* $3\theta = \frac{\pi}{4}\,[\pi]$, c'est-à-dire $\theta = \frac{\pi}{12}\left[\frac{\pi}{3}\right]$. Le lieu des solutions est donc la réunion des trois droites faisant un angle de $\pi/12$, $5\pi/12$ et $3\pi/4$ avec le demi-axe des abscisses positives.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 13. On notera à chaque fois E l'équation étudiée.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$. On a

$$\begin{aligned} z^2 + 8|z| - 3 = 0 &\iff x^2 - y^2 - 3 + 8\sqrt{x^2+y^2} + 2ixy = 0 \\ &\iff xy = 0 \text{ et } x^2 - y^2 - 3 + 8\sqrt{x^2+y^2} = 0 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ et } |y|^2 - 8|y| + 3 = 0 \\ \quad \text{ou} \\ y = 0 \text{ et } |x|^2 + 8|x| - 3 = 0 \end{array} \right. \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ et } |y| \in \left\{4 - \sqrt{13}, 4 + \sqrt{13}\right\} \\ \quad \text{ou} \\ y = 0 \text{ et } |x| = \sqrt{19} - 4 \end{array} \right. \end{aligned}$$

après des résolutions élémentaires d'équations du second degré.

On trouve donc six solutions : $-i\left(4-\sqrt{13}\right)$, $i\left(4-\sqrt{13}\right)$, $-i\left(4+\sqrt{13}\right)$, $i\left(4+\sqrt{13}\right)$, $\sqrt{19}-4$ et $4-\sqrt{19}$.

2. Le nombre 0 est clairement solution. Écrivons $z=\rho e^{i\theta}$ avec $\rho>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$. L'équation est équivalente à $\rho\left(\cos\theta-\frac{1}{2}\right)=0$, ie $\theta=\pm\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$. Le lieu des solutions est donc la reunion des deux demi-droites issues de O faisant un angle de $\pm\frac{\pi}{3}$ avec la demi-droite (Ox).

3. Il est clair que 0 est solution de E. Cherchons maintenant les autres solutions sous la forme $z=\rho e^{i\theta}$, avec $\rho>0$. On a

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de E} &\iff \rho^5 e^{5i\theta}=16\rho e^{-i\theta}\\ &\iff \rho^4 e^{6i\theta}=16\\ &\iff \rho=2 \text{ et } 6\theta=0\,[2\pi]\\ &\iff \rho=2 \text{ et } \theta=0\left[\frac{\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

Les solutions de E sont donc 0, 2, $2e^{i\frac{\pi}{3}}$, $2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et leurs opposés.

4. Écrivons $z=x+iy$ avec x et y réels. L'équation est équivalente à $(2x-3x)+i(-2y-3y)=2+3i$, c'est-à-dire $x=-2$ et $y=-\frac{3}{5}\cdot$ L'unique solution de l'équation est donc $-2-\frac{3}{5}i$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 14.

- ▷ Soit $z\in\mathbb{C}$ une solution de l'équation. On a alors $\left|\overline{z}(z-1)\right|=\left|z^2\left(\overline{z}-1\right)\right|$, d'où $|z|\times|z-1|=|z|^2|z-1|$ car $\overline{z}-1$ et son conjugué $z-1$ on le même module. Ainsi $|z|\,(|z|-1)\,|z-1|=0$, ie $z=0$, $z=1$ ou $|z|=1$
- ▷ Les nombres 0 et 1 étant des solutions évidentes de l'équation, il suffit de recherche les solutions de l'équation sur $\mathbb{U}$. Pour $z\in\mathbb{U}$, on a

$$\begin{aligned} \overline{z}(z-1)=z^2(\overline{z}-1) &\iff \frac{z-1}{z}=z^2\left(\frac{1}{z}-1\right)\\ &\iff z-1=z^2(1-z)\\ &\iff (z-1)\left(z^2+1\right)=0\\ &\iff z\in\{1,-i,i\} \end{aligned}$$

- ▷ Les solutions de l'équation sont donc 0, 1, $-i$ et i.

COMMENTAIRE
Le lecteur aura reconnu une Analyse-Synthèse. On peut aussi, dans la synthèse, écrire z sous forme trigonométrique.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 15. Soit z dans $\mathbb{C}$. On a

$$\begin{aligned} \left(z^2+1\right)^2+\left(z^2-z-1\right)^2 &= \left(z^2+1+i\left(z^2-z-1\right)\right)\left(z^2+1-i\left(z^2-z-1\right)\right)\\ &= \left((1+i)z^2-iz+1-i\right)\left((1-i)z^2+iz+1+i\right) \end{aligned}$$

On en déduit que z est solution de (E) *si et seulement si* $(1+i)z^2 - iz + 1 - i = 0$ ou $(1-i)z^2 + iz + 1 + i = 0$. Les discriminants de ces deux trinômes sont égaux à $-9 = (3i)^2$, d'où les solutions de (E) : $\frac{-1-i}{2}$, $\frac{-1+i}{2}$, $-1-i$ et $-1+i$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 16.

1. Puisqu'un nombre complexe z est réel *si et seulement si* $\overline{z} = z$, **E** admet au moins une solution réelle *si et seulement si* l'équation $x^2 + x = a$ d'inconnue réelle x admet au moins une solution. Or on sait que cette équation admet au moins une solution réelle *si et seulement si* son discriminant $\Delta = 1 + 4a$ est positif ou nul. Ainsi, **E** admet au moins une solution réelle *si et seulement si* $a \geqslant -\frac{1}{4}$.

2. On procède en deux temps.

▷ *Détermination des solutions réelles lorsque* $a \geqslant -1/4$: $z = x \in \mathbb{R}$ est une solution de **E** *si et seulement si* $x^2 + x - a = 0$. Comme le discriminant vaut $\Delta = 1 + 4a \geqslant 0$, on trouve deux solutions réelles $\frac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$.

▷ *Recherchons les solutions non réelles de* **E** sous la forme $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$ et y dans $\mathbb{R}^*$.

$$\begin{aligned} z + \overline{z}^2 = a &\iff (x+iy) + (x-iy)^2 = a \\ &\iff (x + x^2 - y^2) + iy(1-2x) = a \\ &\iff x + x^2 - y^2 = a \ \text{ et } \ y(1-2x) = 0 \\ &\iff x + x^2 - y^2 = a \ \text{ et } \ x = 1/2 \\ &\iff y^2 = 3/4 - a \ \text{ et } \ x = 1/2 \end{aligned}$$

après identification des parties réelles et imaginaires en se souvenant que $y \neq 0$. Comme l'équation $y^2 = 3/4 - a$ d'inconnue réelle y n'admet de solution non nulle que si $a < 3/4$, on en déduit la discussion suivante :

† Si $a \geqslant 3/4$, **E** n'admet aucune solution non réelle.

† Si $a < 3/4$, **E** admet deux solutions non réelles $\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{4} - a}$.

Résumons tout cela dans un tableau :

Valeurs de a	Solutions complexes de **E**
$a < -\frac{1}{4}$	2 solutions non réelles et conjuguées : $\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{4} - a}$
$a = -\frac{1}{4}$	Une solution réelle et 2 solutions non réelles et conjuguées : $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{4} - a}$
$-\frac{1}{4} < a < \frac{3}{4}$	2 solutions réelles et 2 solutions non réelles et conjuguées : $\frac{-1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$, $\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{4} - a}$
$a = \frac{3}{4}$	2 solutions réelles : $-\frac{3}{2}$, $\frac{1}{2}$
$a > \frac{3}{4}$	2 solutions réelles : $\frac{-1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 17.

1. Posons $a = \frac{z+z'}{2}$ et $\delta = |a-u| + |a+u|$. On a

$$\delta^2 = 2|a|^2 + 2|u|^2 + 2|a^2 - u^2|^2 = 2|a|^2 + 2|u|^2 + 2\left|\frac{(z-z')^2}{4}\right| = 2\left|\frac{z+z'}{2}\right|^2 + 2|zz'| + 2\left|\frac{(z-z')^2}{4}\right|$$
$$= \frac{4|z|^2 + 4|z'|^2 + 8|zz'|}{4} = \left(|z| + |z'|\right)^2$$

et comme $\delta \geqslant 0$ et $|z| + |z'| \geqslant 0$, on en déduit que $|z| + |z'| = \delta = \left|\frac{z+z'}{2} - u\right| + \left|\frac{z+z'}{2} + u\right|$.

2. D'après les relations coefficients-racines, on a $-m = \frac{\alpha+\beta}{2}$ et $\alpha\beta = 1$. En appliquant le résultat de la première question à $z = \alpha$ et $z' = \beta$ (on peut alors choisir $u = 1$), on obtient

$$|\alpha| + |\beta| = |-m-1| + |-m+1| = |m+1| + |m-1|$$

COMMENTAIRE
La relation $|a-u|^2 + |a+u|^2 = 2|a|^2 + 2|u|^2$ est appelée identité du parallélogramme (la somme des carrés des longueurs des diagonales d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses côtés). Elle se démontre par un simple développement :

$$|a-u|^2 + |a+u|^2 = (a-u)\left(\overline{a} - \overline{u}\right) + (a+u)\left(\overline{a} + \overline{u}\right) = 2a\overline{a} + 2u\overline{u}$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 18. Tout d'abord on peut supposer que $p \neq 0$ car lorsque $p = 0$, les racines sont opposées et donc de même module. Cela étant, posons $\lambda = \frac{p^2}{4q}$ ce qui revient à $q = \frac{p^2}{4\lambda}$. Le discriminant de l'équation est alors $p^2(1 - \frac{1}{\lambda})$ et ses racines s'écrivent $\frac{p}{2}(-1 \pm \mu)$ où μ est une racine carrée de $1 - \frac{1}{\lambda}$. Comme $p \neq 0$, elles sont de même module *si et seulement si* $-1 \pm \mu$ le sont. Ceci équivaut au fait que μ soit purement imaginaire (ou nul), ou encore à $1 - \frac{1}{\lambda} \in]-\infty, 0]$ et, enfin, à $\lambda \in]0, 1]$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 19. Notons E l'équation $z^n = \overline{z}^{n-1}$. Il est clair que 0 est solution de E. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ une solution de E. On a nécessairement $|z|^n = |z|^{n-1}$, d'où $|z| = 1$. Réciproquement, soit $z \in \mathbb{U}$. Le nombre z est solution de E si et seulement si $z^n = z^{1-n}$, ie $z^{2n-1} = 1$. Comme toutes les solutions de cette dernière équation sont de module 1, on en déduit que l'ensemble des solutions de E est $\mathbb{U}_{2n-1} \cup \{0\}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 20. Puisque $\omega \neq 1$, on a

$$\frac{\omega}{1+\omega^2}+\frac{\omega^2}{1+\omega^4} = \frac{\omega+\omega^2+\omega^4+\omega^5}{1+\omega^2+\omega^4+\omega^6} = \frac{\omega+\omega^2+\omega^4+\omega^5}{\frac{\omega^8-1}{\omega^2-1}}$$

De plus $\omega^7=1$ donc $\omega^8=\omega$ et $1+\omega+\ldots+\omega^6=0$, on a

$$\frac{\omega}{1+\omega^2}+\frac{\omega^2}{1+\omega^4} = (1+\omega)\left(-1-\omega^3-\omega^6\right) = -1+\omega^2+\omega^5$$

Puisque $\frac{\omega^3}{1+\omega^6}=\frac{\omega^3}{1+1/\omega}=\frac{\omega^4}{1+\omega}$, on obtient

$$\alpha = \frac{(1+\omega)\left(-1+\omega^2+\omega^5\right)+\omega^4}{1+\omega} = \frac{-1-\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4+\omega^5+\omega^6}{1+\omega} = \frac{-1-\omega-1-\omega}{1+\omega} = -2$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 21. On notera l'équation E à chaque fois.

1. Puisque 0 n'en est pas solution, on a

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de E} &\iff \left(\frac{z+i}{z}\right)^3 = -i = i^3 \\ &\iff \exists k\in[\![0,2]\!],\ \frac{z+i}{z} = i\,j^k \\ &\iff \exists k\in[\![0,2]\!],\ \left(i\,j^k-1\right)z = i \\ &\iff \exists k\in[\![0,2]\!],\ z = \frac{i}{i\,j^k-1}\ (\text{car } i\,j^k-1\neq 0) \end{aligned}$$

D'où les solutions : $\frac{1-i}{2}$, $-\frac{1+i\left(2+\sqrt{3}\right)}{2\left(2+\sqrt{3}\right)}$ et $-\frac{1+i\left(2-\sqrt{3}\right)}{2\left(2-\sqrt{3}\right)}$.

2. Il est clair que 0 n'est pas solution de (E). Pour tout nombre complexe z dans $\mathbb{C}^*$, en posant $Z=z+\dfrac{1}{z}$, on a que :

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de (E)} &\iff z^2\left(z^2-2z-1-\frac{2}{z}+\frac{1}{z^2}\right)=0 \\ &\iff Z^2-2Z-3=0 \\ &\iff (Z-3)(Z+1)=0 \end{aligned}$$

car $Z^2-2=z^2+\dfrac{1}{z^2}$. Ainsi, pour tout nombre complexe z dans $\mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} z \text{ est solution de (E)} &\iff Z=z+\frac{1}{z}=-1 \quad\text{ou}\quad Z=z+\frac{1}{z}=3 \\ &\iff z^2+z+1=0 \quad\text{ou}\quad z^2-3z+1=0 \end{aligned}$$

Les discriminants des trinômes précédents valent -3 et 5, d'où les solutions de l'équation (E), les solutions sont donc les nombres suivants : $j,\ j^2,\ \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

3. Comme $-2+i\sqrt{12}=4e^{\frac{2i\pi}{3}}$, on a

$$\begin{aligned}
z^4=-2+i\sqrt{12} &\iff \left(\frac{z}{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{6}}}\right)^4=1\\
&\iff \frac{z}{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{6}}}\in\{-1,1,-i,i\}\\
&\iff \left\{-\sqrt{2}e^{i\pi/6},\sqrt{2}e^{i\pi/6},-\sqrt{2}e^{2\pi/3},\sqrt{2}e^{2i\pi/3}\right\}
\end{aligned}$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 22.

1. Posons $\mathrm{S}=\alpha+\beta$ et $\mathrm{S}=\alpha\beta$. On sait que $\omega^5=1$ et $\sum_{k=0}^4\omega^k=0$. Ainsi $\mathrm{S}=-1$ et

$$\mathrm{P}=(\omega+\omega^4)(\omega^2+\omega^3)=\omega^3+\omega^4+\omega^6+\omega^7=\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=-1$$

Les nombres α et β sont solutions de l'équation $z^2-\mathrm{S}z+\mathrm{P}=0$ i.e. $z^2+z-1=0$.

2. Les solutions de $z^2+z-1=0$ sont $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Or $\alpha=\omega+\omega^4=\omega+\overline{\omega}=2\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\beta=\omega^2+\omega^3=\omega^2+\overline{\omega^2}=2\cos\frac{4\pi}{5}$. En particulier, $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$ et $\beta\in\mathbb{R}_-^*$. On en déduit que $\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$ et $\beta=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$.

3. On a $\cos\frac{\pi}{5}=\cos\left(\pi-\frac{4\pi}{5}\right)=-\cos\frac{4\pi}{5}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.
De plus, $\frac{\pi}{5}\in[0,\pi]$ donc $\sin\frac{\pi}{5}\geqslant 0$ d'où $\sin\frac{\pi}{5}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\pi}{5}}=\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 23.

▷ On remarque que $-i$ est solution de l'équation.

▷ Soit $z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\}$. On a

$$\begin{aligned}
\left(z^2+1\right)^n-(z+i)^{2n}=0 &\iff (z+i)^n\left((z-i)^n-(z+i)^n\right)=0\\
&\iff (z-i)^n-(z+i)^n=0\\
&\iff \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n=1\\
&\iff \exists k\in[\![0,n-1]\!],\ \frac{z-i}{z+i}=e^{2ik\pi/n}\\
&\iff \exists k\in[\![0,n-1]\!],\ \left(e^{2ik\pi/n}-1\right)z=-i\left(1+e^{2ik\pi/n}\right)
\end{aligned}$$

† Pour $k=0$, l'équation $\left(e^{2ik\pi/n}-1\right)z=-i\left(1+e^{2ik\pi/n}\right)=0$ n'admet aucune solution.

† Pour $k\in[\![1,n-1]\!]$, $\left(e^{2ik\pi/n}-1\right)z=-i\left(1+e^{2ik\pi/n}\right)=0$ admet une unique solution :

$$z=-i\frac{1+e^{2ik\pi/n}}{e^{2ik\pi/n}-1}=-\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation initiale $\{-i\} \cup \left\{-\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)\,;\, k \in [\![1, n-1]\!]\right\}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 24.

1. ▷ Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On a

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \iff \exists k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$$
$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) z = -\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$$

† Pour $k = 0$, l'équation $\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) z = -\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$ n'a aucune solution car s'écrit $0 = -2$.

† Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, l'équation $\left(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right) z = -\left(1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)$ admet une unique solution :

$$z = -\frac{1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}}} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)} = -i\,\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$$

Les solutions de l'équations sont donc les nombres $-i\,\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

COMMENTAIRE
Il y a $n-1$ *racines distinctes puisque la fonction cotangente est strictement decroissante sur l'intervalle* $]0, \pi[$.

▷ On remarque que z verifie l'equation *si et seulement si* $-iz$ est solution de l'equation précédente. Les racines sont donc les nombres $\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ où $k \in [\![1, n-1]\!]$.

2. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On a

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{in\theta} \iff \left(\frac{z+1}{z-1} e^{-i\theta}\right)^n = 1$$
$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} e^{i\theta}$$
$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ \left(1 - e^{\frac{2ik\pi + in\theta}{n}}\right) z = -\left(1 + e^{\frac{2ik\pi + in\theta}{n}}\right)$$
$$\iff \exists k \in [\![0, n-1]\!]\,,\ z = -\frac{1 + e^{\frac{2ik\pi + in\theta}{n}}}{1 - e^{\frac{2ik\pi + in\theta}{n}}} = \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\theta}{2}\right)}{i \sin\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\theta}{2}\right)} = -i\,\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n} + \frac{\theta}{2}\right)$$

La troisième équivalence étant justifiable ainsi : puisque $\theta \neq 0\ \left[\frac{2\pi}{n}\right]$, on a $n\theta \neq 0\ [2\pi]$ donc $e^{\frac{2ik\pi + in\theta}{n}} \neq 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

3. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, notons $A := \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$. L'equation est equivalente à $A + \frac{1}{A} = 2\cos(n\theta)$, ie $B^2 - 2\cos(n\theta)B + 1 = 0$. Ce dernier trinôme a pour discriminant $-4\sin^2(n\theta)$, ses racines sont donc $e^{\pm in\theta}$.

▷ Cas 1 : $n\theta = 0\,[2pi]$. L'équation initiale est équivalente à celle de la première question d'où les solutions :

$$-i\,\text{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{pour } k \in [\![1, n-1]\!]$$

▷ Cas 2 : $n\theta \neq 0\,[2\pi]$. L'équation initiale est équivalente à $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{in\theta}$ ou $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = e^{in\theta} = e^{-in\theta}$, on est ramené à l'équation du 2., d'où les solutions :

$$-i\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n} \pm \frac{\theta}{2}\right) \quad \text{pour } k \in [\![0, n-1]\!]$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 25.

▷ *Méthode 1.* Comme i n'est pas solution, z est solution *si et seulement si* $Z^5 = 1$, où $Z = \frac{1-iz}{1+iz}$. On en déduit (après des calculs classiques) les solutions de l'équation $-\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)$ où $k \in [\![0, 4]\!]$.

▷ *Méthode 2.* Par la formule du binôme, on obtient $(1-iz)^5 - (1+iz)^5 = iz(-2z^4 + 20z^2 - 10)$. En posant $Z = z^2$, on est donc amené à résoudre $-2Z^2 + 20Z - 10 = 0$, équation du second degré de discriminant $\Delta = 320 = (8\sqrt{5})^2$. On en d éduit les solutions de l'équation initiale : 0, $\pm\sqrt{5-2\sqrt{5}}$ et $\pm\sqrt{5+2\sqrt{5}}$.

▷ *Application au calcul de* $\tan(\pi/5)$. D'après les variations de la fonctions tangente, $-\tan(\pi/5)$ est la plus grande des racines strictement négative de l'équation. Ainsi $\tan(\pi/5) = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 26.

1. Comme $j \neq 1$, on a $1 + j + j^2 = \dfrac{j^3-1}{j-1} = 0$.

2. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$. On a $(a+jb)+(c+jd) = a+c+j(b+d) \in \mathbb{Z}[j]$ car $a+c$ et $b+d$ sont des entiers relatifs. De plus, on a

$$(a+jb)(c+jd) = ac+j^2bd+j(bc+ad) = ac-bd+j(bc+ad-bd) \in \mathbb{Z}[j] \quad \text{(on a utilisé la relation } j^2 = -j-1)$$

car $ac-bd$ et $bc+ad-bd$ sont des entiers relatifs. Ainsi $\mathbb{Z}[j]$ est stable par l'addition et le produit.

3. Soit $(a,b) \in \mathbb{Z}$. Comme le conjugué de $j = e^{2i\pi/3}$ est $e^{-2i\pi/3} = e^{4i\pi/3} = j^2$, on a

$$|a+bj|^2 = (a+bj)(a+bj^2) = a^2 + j^3b^2 + ab(j+j^2) = a^2 + b^2 - ab$$

car $j + j^2 = -1$. Ainsi $|a+bj|^2 \in \mathbb{Z}$ et puisque $|a+bj|^2 \geqslant 0$, on a $|a+bj|^2 \in \mathbb{N}$.

4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $z^6 = 1 \iff (z^3-1)(z^3+1) = 0 \iff z^3 = 1$ ou $(-z)^3 = 1$. Comme $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$, on en déduit que $\mathbb{U}_6 = \{-1, -j, -j^2, 1, j, j^2\}$. Puisque $j^2 = -1-j$, on a clairement $\mathbb{U}_6 \subset \mathbb{Z}[j]$.

5. On pose $\mathbb{Z}[j]^\times = \left\{u \in \mathbb{Z}[j]\,;\, \dfrac{1}{u} \in \mathbb{Z}[j]\right\}$.

a. Comme l'inverse d'une racine sixième de l'unité est une racine sixième de l'unité et $\mathbb{U}_6 \subset \mathbb{Z}[j]$, on a $\mathbb{U}_6 \subset \mathbb{Z}[j]^\times$.

b. Soit $u \in \mathbb{Z}[j]^\times$. D'après la question 3, on a $|u|^2 \in \mathbb{N}$ et $\left|\dfrac{1}{u}\right|^2 = \dfrac{1}{|u|^2} \in \mathbb{N}$. On en déduit que $|u|^2 = 1$, d'où $|u| = 1$, ie $u \in \mathbb{U}$.

c. Soit $u \in \mathbb{Z}[j]^\times$ et $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $u = a + jb$. Par la question précédente et le calcul effectué à la question 3, on a $a^2+b^2-ab=1$, ie $(a-b/2)^2+3b^2/4=1$. En particulier, $3b^2/4 \leqslant 1$, ie $|b| \leqslant 1$ car $b \in \mathbb{Z}$. Si $b=0$, alors $a=\pm 1$; si $b=1$, alors $a=0$ ou $a=1$; et si $b=-1$, alors $a=0$ ou $a=-1$. Ainsi, u est égal à ± 1, j, $1+j=-j^2$, $-j$ ou $-1-j=j^2$. Ainsi, $u \in \mathbb{U}_6$, d'où $\mathbb{Z}[j]^\times \subset \mathbb{U}_6$ puis $\mathbb{Z}[j]^\times = \mathbb{U}_6$ par la question 4.a.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 27.

1. D'après la relation coefficients-racines, on a $z_1(t)+z_2(t) = 2(\cos t + i \sin t) = 2e^{it}$ et donc l'affixe du milieu de $[M_1M2]$ vaut $\frac{z_1+z_2}{2} = e^{it}$. Lorsque t décrit $]-\pi,\pi[$, le milieu de $[M_1M2]$ décrit le cercle trigonométrique privé du point d'affixe -1.

2. Le discriminant du trinôme $z^2-2e^{it}z+2ie^{it}\sin t$ vaut $\Delta = 4e^{2it}-8ie^{it}\sin t = 4e^{it}\left(e^{it}-2i\sin t\right) = 4$. Ses racines sont donc les nombres $\frac{2e^{it}\pm 2}{2} = e^{it}\pm 1$.

3. On a $z_1(t) = e^{it}+1 = 2\cos\left(\frac{t}{2}\right))e^{i\frac{t}{2}}$ et $z_2(t) = e^{it}-1 = 2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{t}{2}} = 2\sin\left(\frac{t}{2}\right)e^{i\frac{t+\pi}{2}}$.

- ▷ Puisque $\frac{t}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, on a $|z_1(t)| = 2\cos\frac{t}{2}$ et $\arg z_1(t) = \frac{t}{2}\ [2\pi]$.
- ▷ Si $t=0$, alors $z_2=0$.
- ▷ Si $0<t<\pi$, alors $|z_2| = 2\sin(t/2)$ et $\arg(z_2(t)) = \frac{t+\pi}{2}$.
- ▷ Si $-\pi<t<0$, alors $|z_2| = -2\sin(t/2)$ et $\arg(z_2(t)) = \frac{t}{2}+\pi$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 28.

1. Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x+iy$. On a

$$\begin{aligned}
\text{Les points d'affixe } 1,\ z \text{ et } iz \text{ sont alignés} &\iff \frac{z-iz}{z-1} = \frac{z(1-i)}{z-1} \in \mathbb{R}\\
&\iff \frac{z(1-i)}{z-1} = \overline{\frac{z(1-i)}{z-1}} = \frac{\overline{z}(1+i)}{\overline{z}-1}\\
&\iff z(1-i)(\overline{z}-1) = \overline{z}(1+i)(z-1)\\
&\iff -2i|z|^2+(i-1)z+(1+i)\overline{z} = 0\\
&\iff x^2+y^2-x+y = 0\\
&\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Le nombre complexe 1 étant une solution évidente, le lieu des solutions est donc le cercle de centre d'affixe $\frac{1-i}{2}$ et de rayon $\sqrt{2}/2$.

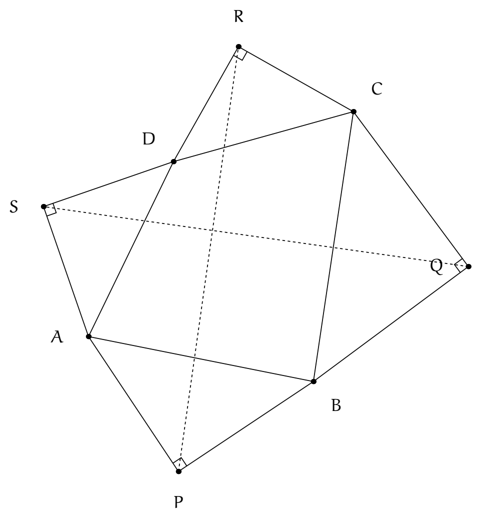
2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z+\overline{z} \neq 1$ et $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $z = x+iy$. On a

$$\begin{aligned}
\text{Les points d'affixe } z^2,\ 1-z \text{ et } \overline{z} \text{ sont alignés } &\iff \frac{z^2-\overline{z}}{1-z-\overline{z}} \in \mathbb{R} \\
&\iff z^2-\overline{z} \in \mathbb{R} \quad \text{car } 1-z-\overline{z} \in \mathbb{R} \\
&\iff x^2-y^2+2ixy-x+iy \in \mathbb{R} \\
&\iff y(2x+1) = 0 \\
&\iff y = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Si $z+\overline{z} = 2x = 1$, alors z est clairement solution car deux des trois points sont confondus. Le lieu des solutions est donc la réunion des deux droites verticales définies par $\operatorname{Re} z = \pm 1/2$ et de l'axe des abscisses.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 29. Notons a, b, c, d, p, q, r, s les affixes respectives des points A, B, C, D, P, Q, R, S.



D'après les constructions de l'énoncé,

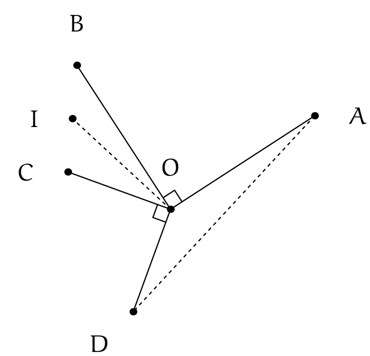
$$b-p = -i(a-p),\ c-q = -i(b-q),\ d-r = -i(c-r),\ a-s = -i(d-s)$$

Aiinsi $(i+1)(p-r) = (b-d)+i(a-c)$ et $(i+1)(q-s) = (c-a)+i(b-d)$ d'où $i(p-r) = (q-s)$. On en déduit que $(\mathrm{PR}) \perp (\mathrm{QS})$ et $\mathrm{PR} = \mathrm{QS}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 30.

Quitte à effectuer une homothétie (qui laisse invariants l'orthogonalité et les rapports de distances), on peut supposer que le repère $(\mathrm{O}, \mathbf{OA}, \mathbf{OB})$ est orthonormé. Dans ce repère notons c l'affixe du point C. Puisque D est l'image de C par le quart de tour direct de centre O, l'affixe de D est ic. On a donc $\mathrm{A}(1)$, $\mathrm{B}(i)$, $\mathrm{C}(c)$, $\mathrm{D}(ic)$ et $\mathrm{I}((i+c)/2)$. Ainsi **AD** est d'affixe $ic-1$ et **OI** est d'affixe $\frac{i+c}{2}$. Puisque $ic-1 = 2i \times \frac{i+c}{2}$, on a $\mathbf{AD} \perp \mathbf{OI}$ et $\mathrm{AD} = 2\mathrm{OI}$.



Voir l'énoncé.

SOLUTION 31.

1. On a

$$\begin{aligned}
\text{ABC est équilatéral direct} &\iff \text{AB} = \text{AC} \text{ et } (\mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\
&\iff \frac{c-a}{b-a} = e^{\frac{i\pi}{3}} = -j^2 \\
&\iff c - a + j^2(b-a) = 0 \\
&\iff a + j^2 b + c = 0 \ \ (\text{ car } 1 + j + j^2 = 0) \\
&\iff a + jb + j^2 c = 0 \ \ (\text{après multiplication par } j^2 \text{ qui est non nul})
\end{aligned}$$

De plus, ABC est équilatéral indirect *si et seulement si* ACB est équilatéral direct, ce qui équivaut aussi à $a + jc + j^2 b = 0$ par le point précédent.

UNE VARIANTE PLUS ABSTRAITE
Voici une preuve plus expéditive, faisant appel aux transformations complexes affines. Un triangle est équilatéral direct si et seulement si s'il se ramène par une similitude directe ou une translation au triangle équilatéral direct d'affixes $1,\ j,\ j^2$. *Or pour ce dernier la relation* $a + bj + cj^2 = 0$ *est vraie car* $1 + j \times j + j^2 \times j^2 = 0$. *Pour conclure il suffit alors de remarquer que la relation* $a + bj + cj^2 = 0$ *est invariante par une transformation de la forme* $(a, b, c) \mapsto (\alpha a + \beta, \alpha b + \beta, \alpha c + \beta)$ *où* $\alpha \neq 0$.

2. D'après ce qui précède, ABC est équilatéral *si et seulement si* $p := \left(a + j^2 b + jc\right)\left(a + jb + j^2 c\right)$ est nul. On conclut en remarquant que :

$$\begin{aligned}
p &= a^2 + jab + j^2 ac + j^2 ab + b^2 + jbc + jac + j^2 bc + c^2 \\
&= a^2 + b^2 + c^2 + (j + j^2)ab + (j + j^2)ac + (j + j^2)bc \\
&= a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc
\end{aligned}$$

COMMENTAIRE
L'utilisation de la relation bien connue $1 + j + j^2 = 0$ *permet d'alléger sensiblement les calculs.*

Voir l'énoncé.