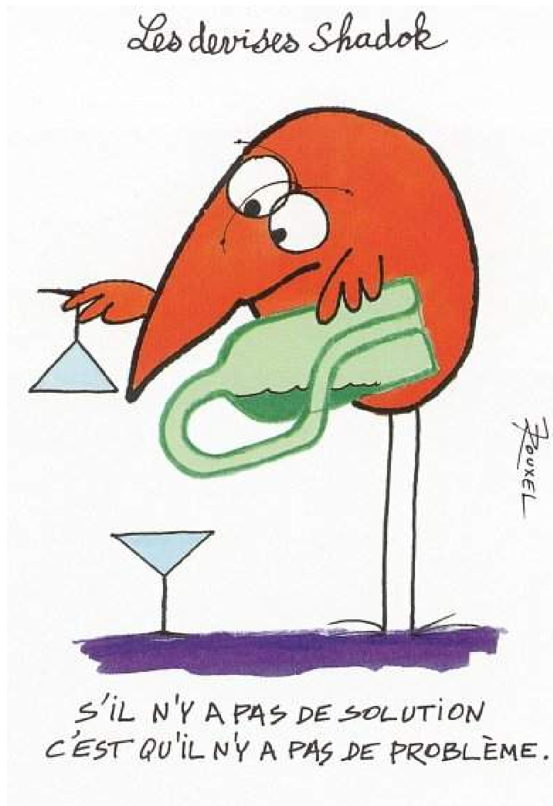
Exercices 2 | Ensembles, applications et relations

Dans ce TD, nous étudierons spécifiquement les ensembles, les applications et les relations binaires.



I. Ensembles

EXERCICE 1. **IND** § **SOL** *Quelques relations*

Soit X, Y et Z des ensembles. Montrer que :

1. $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$;

2. $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$;

3. $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$;

4. $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$.

EXERCICE 2. **IND** § **SOL** *Egalité d'ensembles*

Soit X, Y et Z trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que $(X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z}) = (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z)$.

EXERCICE 3. **IND** § **SOL** *Petit recouvrement*

Soit A, B, C, D des ensembles. Montrer que si $A \subset C$, $B \subset D$, $C \cap D = \varnothing$ et $A \cup B = C \cup D$, alors $A = C$ et $B = D$.

EXERCICE 4. **IND** § **SOL** *Ensemble des parties*

Soit X et Y deux ensembles. Déterminer une *cns* sur (X, Y) pour que $\mathscr{P}(X) \subset \mathscr{P}(Y)$.

EXERCICE 5. **IND** § **SOL** *Trois ensembles*

Soit A, B et C trois ensembles. Donner une *cns* pour que $A \cup B = B \cap C$.

EXERCICE 6. **IND** § **SOL** ♪ *Autour des produits cartésiens*

Soit Ω un ensemble et $E, F \in \mathscr{P}(\Omega)$ tels que $E \times F \subset (F \times \Omega) \cup (\Omega \times E)$. Montrer que $E \subset F$ ou $F \subset E$.

EXERCICE 7. **IND** § **SOL** ♪ *Inclusion de $A \times B$ dans $B \times C$*

Soit A, B et C trois ensembles non vides tels que $A \times B \subset B \times C$. Montrer que $A \subset C$.

EXERCICE 8. **IND** § **SOL** ♪ *Deux simplifications ensemblistes*

Soit E un ensemble, et A, B, C des parties de E. Simplifier les expressions suivantes :

1. $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$;

2. $A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

EXERCICE 9. **IND** § **SOL** ♪ *Équations élémentaires*

Soit E un ensemble, A et B des parties de E.

1. Discuter et résoudre l'équation $X \cap A = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

2. Idem avec l'équation $X \cup A = B$.

EXERCICE 10. IND § SOL ♪ *Une équation*

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Discuter et résoudre $(A\cap X)\cup\left(B\cap\overline{X}\right)=\varnothing$.

EXERCICE 11. IND § SOL ♪ *X MP-2007*

Soit A, B et C trois ensembles. Comparer $X=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A)$ et $Y=(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)$.

EXERCICE 12. IND § SOL ♪ *Opérations ensemblistes*

Soit $I\neq\varnothing$, $(A_i)_{i\in I}$ et $(B_i)_{i\in I}$ deux familles d'ensembles. Les relations suivantes sont-elles vraies ?

$$\bigcup_{i\in I}A_i\cap\bigcup_{i\in I}B_i=\bigcup_{i\in I}(A_i\cap B_i)\quad\text{et}\quad\bigcap_{i\in I}A_i\cup\bigcap_{i\in I}B_i=\bigcap_{i\in I}(A_i\cup B_i)$$

EXERCICE 13. IND § SOL ♪♪ *Dévissage d'une réunion croissante en réunion disjointe*

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ensembles croissante pour l'inclusion, ie telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ A_n\subset A_{n+1}$.
Construire une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ensembles deux à deux disjoints telle que $\forall n\in\mathbb{N},\ A_n=\displaystyle\bigsqcup_{i=0}^{n}B_i$.

EXERCICE 14. IND § SOL ♪♪♪ *Intersections et réunions*

Soit $(X_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de parties de E.

1. Comparer $\displaystyle\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}X_{i,j}$ et $\displaystyle\bigcup_{j\in J}\bigcap_{i\in I}X_{i,j}$.

2. Montrer que $\displaystyle\bigcap_{i\in I}\bigcup_{j\in J}X_{i,j}=\bigcup_{f\in\mathscr{F}(I,J)}\bigcap_{i\in I}X_{i,f(i)}$.

EXERCICE 15. IND § SOL ♪♪♪ *Dévissage d'une réunion*

Soit E un ensemble.

1. Soit A, B et C des parties de E. Montrer que $A\cup B\cup C=(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\cup(C\setminus A)\cup(A\cap B\cap C)$.

2. Soit n un entier au moins égal à 2, et $A_1,\dots,A_n$ des parties de E. Montrer que

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=(A_1\setminus A_2)\cup(A_2\setminus A_3)\cup\cdots\cup(A_{n-1}\setminus A_n)\cup(A_n\setminus A_1)\cup(A_1\cap\cdots\cap A_n)$$

II. Injectivité, surjectivité et bijectivité

EXERCICE 16. IND § SOL *Dans $\mathscr{P}(E)$*

Pour E non vide, A et B dans $\mathscr{P}(E)$, montrer que l'application suivante n'est pas surjective :

$$f:\begin{array}{rcl}\mathscr{P}(E)&\longrightarrow&\mathscr{P}(E)\times\mathscr{P}(E)\\ X&\longmapsto&(X\cup A,X\cup B)\end{array}$$

EXERCICE 17. IND § SOL ♪ *Une inéquation fonctionnelle*

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$.

EXERCICE 18. IND § SOL ♪ *Injections et surjections*

Soient A, B et C des ensembles, $f : A \to B$ et $g : B \to C$ deux applications. Démontrer que :

1. Si $g \circ f$ est surjective et g injective, alors f est surjective,

2. Si $g \circ f$ est injective et f surjective, alors g est injective.

EXERCICE 19. IND § SOL ♪ *Injectivité sur une réunion croissante*

Soit E et F des ensembles, $f : E \to F$ une application et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de E.

1. On suppose que f est injective sur deux parties A et B de E ; f est-elle injective sur $A \cup B$?

2. On suppose que $E = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N},\ f|_{A_n}$ est injective, alors f est injective sur E.

EXERCICE 20. IND § SOL ♪ *Composées bijectives*

Soit $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des bijections, alors f, g et h sont toutes trois des bijections.

EXERCICE 21. IND § SOL ♪ *Fonctions dominant le carré*

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ f(n) \geqslant n^2$.

1. L'application f est-elle surjective ?

2. Idem avec « *injective* »

EXERCICE 22. IND § SOL ♪ *Fonctions sur les parties*

Soit E un ensemble, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $\phi_A : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ définie par $\phi_A(X) = X \cap A$ pour tout $X \subset E$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de ϕ_A.

2. Idem avec « *surjectivité* ».

EXERCICE 23. IND § SOL ♪ *Fonctions à valeurs et variable entières*

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = 1 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. La fonction f est-elle injective ? surjective ?

2. Existe-t-il $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$?

3. Existe-t-il $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$?

EXERCICE 24. **IND** § **SOL** ♪♪ *Dans $\mathscr{P}(\mathrm{E})$, suite et fin*

Soit A et B deux parties d'un ensemble E et $f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathrm{A}) \times \mathscr{P}(\mathrm{B}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & (\mathrm{X} \cap \mathrm{A}, \mathrm{X} \cap \mathrm{B}) \end{array}$

Donner des *cns* sur A et B pour que f soit injective. Idem avec surjective puis bijective. Donner f^{-1} le cas échéant.

EXERCICE 25. **IND** § **SOL** ♪♪ *Injectivité et surjectivité des translations à gauche*

On considère des ensembles E, F et G non vides, une application ϕ de F dans G et Γ l'application de $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ dans $\mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathrm{G})$ définie par $f \mapsto \phi \circ f$.

1. Montrer que Γ est injective *si et seulement si* ϕ est injective.

2. Montrer que Γ est surjective *si et seulement si* ϕ est surjective.

EXERCICE 26. **IND** § **SOL** ♪♪♪ *Bijection de $\mathbb{N}$ sur lui-même*

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une application.

1. Montrer que, si f est bijective, alors $f(n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$.

2. Cette propriété est-elle vérifiée si f est injective ? surjective ?

EXERCICE 27. **IND** § **SOL** ♪♪♪ *Une équation fonctionnelle*

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) + f\big(f(n)\big) = 2n$. Montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

III. Images directes et images réciproques

EXERCICE 28. **IND** § **SOL** ♪ *Images directes et opérations*

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application, A et B deux parties de E.

1. Prouver que $f\langle \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \rangle = f\langle \mathrm{A} \rangle \cup f\langle \mathrm{B} \rangle$.

2. Montrer que $f\langle \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \rangle \subset f\langle \mathrm{A} \rangle \cap f\langle \mathrm{B} \rangle$. Y-a-t-il égalité en général ? Illustrer votre réponse par des exemples.

3. Prouver que $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \subset \mathrm{E},\ f\langle \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \rangle = f\langle \mathrm{A} \rangle \cap f\langle \mathrm{B} \rangle$ *si et seulement si* f est injective.

EXERCICE 29. **IND** § **SOL** ♪ *Images réciproques et opérations*

Soit des ensembles E, F, et $f \in \mathscr{F}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Montrer que pour tous sous-ensembles Y, Y_1 et Y_2 de F :

1. $\mathrm{Y}_1 \subset \mathrm{Y}_2 \implies f^{-1}\langle \mathrm{Y}_1 \rangle \subset f^{-1}\langle \mathrm{Y}_2 \rangle$;

2. $f^{-1}\langle \mathrm{Y}_1 \cap \mathrm{Y}_2 \rangle = f^{-1}\langle \mathrm{Y}_1 \rangle \cap f^{-1}\langle \mathrm{Y}_2 \rangle$;

3. $f^{-1}\langle \mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2 \rangle = f^{-1}\langle \mathrm{Y}_1 \rangle \cup f^{-1}\langle \mathrm{Y}_2 \rangle$;

4. $f\big(f^{-1}\langle \mathrm{Y} \rangle\big) = \mathrm{Y} \cap f\langle \mathrm{E} \rangle$;

5. $f^{-1}\langle \mathrm{Y}_1 \setminus \mathrm{Y}_2 \rangle = f^{-1}\langle \mathrm{Y}_1 \rangle \setminus f^{-1}\langle \mathrm{Y}_2 \rangle$.

EXERCICE 30. IND § SOL ♪ *Caractérisations de l'injectivité et de la surjectivité*

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application.

1. Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. Prouver que $\mathrm{A} \subset f^{-1}\left\langle f\langle \mathrm{A}\rangle\right\rangle$.

2. Prouver que f est injective *si et seulement si* pour toute partie A de E, $\mathrm{A} = f^{-1}\left\langle f\langle \mathrm{A}\rangle\right\rangle$.

3. Soit $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$. Prouver que $f\left\langle f^{-1}\langle \mathrm{B}\rangle\right\rangle \subset \mathrm{B}$.

4. Prouver que f est surjective *si et seulement si* pour toute partie B de F, $f\left\langle f^{-1}\langle \mathrm{B}\rangle\right\rangle = \mathrm{B}$.

IV. Relations binaires

EXERCICE 31. IND § SOL ♪ *L'ordre lexicographique*

On définit une relation binaire sur $\mathbb{N}^2$:

$$\text{pour tous } x = (x_1, y_1) \text{ et } y = (y_1, y_2) \text{ dans } \mathbb{N}^2,\ \text{ on dit que } \ x \preccurlyeq y \quad \text{si} \quad \begin{cases} x_1 < y_1 \\ \text{ou} \\ x_1 = y_1 \ \text{ et } \ x_2 \leqslant y_2 \end{cases}$$

1. Prouver que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$. L'ordre est-il total ?

2. On pose $\mathrm{A} = \left\{(p,p)\,;\, p \in \mathbb{N}\right\}$ et $\mathrm{B} = \left\{(2, 10^p)\,;\, p \in \mathbb{N}\right\}$. Les parties A et B de $\left(\mathbb{N}^2, \preccurlyeq\right)$ sont-elles majorées ? Possèdent-elles un plus grand élément ? Une borne supérieure ?

EXERCICE 32. IND § SOL ♪ *La relation d'inclusion*

Soit E un ensemble.

1. Montrer que la relation d'inclusion notée $\subset$ est un ordre sur $\mathscr{P}(\mathrm{E})$. L'ordre est-il total ?

2. On pose, pour tout $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^2$, $\sup(\mathrm{A},\mathrm{B}) := \sup\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$ et $\inf(\mathrm{A},\mathrm{B}) := \inf\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$.

a. Justifier ces définitions. On exprimera $\sup(\mathrm{A},\mathrm{B})$ et $\inf(\mathrm{A},\mathrm{B})$ en fonction des sous-ensembles A et B à l'aide de $\cup$ et $\cap$.

b. Montrer plus généralement que toute partie non vide $\mathscr{F}$ de $(\mathscr{P}(\mathrm{E}), \subset)$ admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on explicitera à l'aide de $\mathscr{F}$ en utilisant $\cap$ et $\cup$.

EXERCICE 33. IND § SOL ♪♪ *Conjugaison sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$*

Deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont dites *conjuguées* si $\exists \phi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bijective telle que $f = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$.

1. Montrer que la conjugaison est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2. Déterminer la classe d'équivalence de $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

3. Soit f une fonction constante. Déterminer la classe d'équivalence de f.

4. Les fonctions définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = ax^2$ où $a \in \mathbb{R}^*$, sont-elles conjuguées ?

5. Les fonctions sin et cos sont-elles conjuguées ?

V. Indications

INDICATION 1. Raisonner par double inclusion, ou bien utiliser les opérations ensemblistes $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, ou bien revenir aux opérateurs logiques.

Voir l'énoncé.

INDICATION 2. Vous pouvez utiliser les fonctions indicatrices ou raisonnez directement sur les ensembles.

Voir l'énoncé.

INDICATION 3. Prouver que $C \subset A$ en considérant $x \in C$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 4. La *cns* recherchée est $X \subset Y$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 5. Dessiner des patates.

Voir l'énoncé.

INDICATION 6. On pourra, par exemple, raisonner par l'absurde.

Voir l'énoncé.

INDICATION 7. Pour montrer qu'un élément a de A appartient à C, on pourra d'aider d'un élément b_0 de B.

Voir l'énoncé.

INDICATION 8. On trouve respectivement E et $A \cup B \cup C$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 9. Analyse-synthèse : il faut discuter sur A et B.

Voir l'énoncé.

INDICATION 10. L'équation est équivalente à $B \subset X \subset \overline{A}$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 11. On a $X = Y$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 12. Les deux relations sont fausses en général. Trouver un *cex* pour une paire I.

Voir l'énoncé.

INDICATION 13. Dessiner !

Voir l'énoncé.

INDICATION 14. Appliquer la distributivité de $\cap$ sur $\cup$ au 2.

Voir l'énoncé.

INDICATION 15. Raisonner par double inclusion.

Voir l'énoncé.

INDICATION 16. Intéressez-vous à $(\varnothing,\varnothing)$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 17. Raisonner par récurrence forte.

Voir l'énoncé.

INDICATION 18. Aucune astuce ici, revenir aux définitions.

Voir l'énoncé.

INDICATION 19. Réponse négative au 1., trouver un contre-exemple.

Voir l'énoncé.

INDICATION 20. Prouver *en premier* que g est bijective.

Voir l'énoncé.

INDICATION 21. Réponse négative au 1.

Voir l'énoncé.

INDICATION 22. En dessinant des « patates » on devine facilement les conditions demandées.

Voir l'énoncé.

INDICATION 23. La réponse à la question 3. est positive.

Voir l'énoncé.

INDICATION 24. Il faut dessiner de patates afin de se forger une intuition : on devine ainsi que $A\cup B = E$ est une *cns* d'injectivité.

Voir l'énoncé.

INDICATION 25. Pour l'implication $\Longrightarrow$ du 1., utiliser par exemple des fonctions constantes.

Voir l'énoncé.

Indication 26. Revenir à la défintion epsilonesque au a). Au b), la réponse est oui pour une injection, non pour une surjection (trouver un contre-exemple).

Voir l'énoncé.

Indication 27. Commencer par calculer $f(0)$, $f(1)$. Vérifier que f est injective.

Voir l'énoncé.

Indication 28. Pour prouver l'injectivité du 2., on partira de l'égalité $f(x) = f(x')$ et on utilisera $\mathrm{A} = \{x\}$ et $\mathrm{B} = \{x'\}$.

Voir l'énoncé.

Indication 29. Doubles inclusions ou raisonnement directs sont possibles.

Voir l'énoncé.

Indication 30. Remarquez que, pour $x \in \mathrm{E}$, $f^{-1}\left\langle\{f(x)\}\right\rangle$ est l'ensemble des antécédents de $f(x)$ par f.

Voir l'énoncé.

Indication 31. L'ordre est total.

Voir l'énoncé.

Indication 32. L'ordre n'est pas total.

Voir l'énoncé.

Indication 33. Raisonner par l'absurde au 5.

Voir l'énoncé.