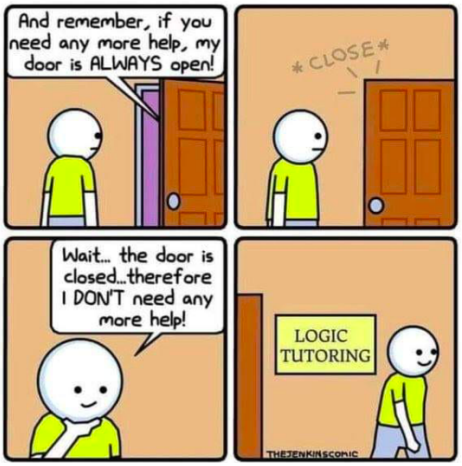
Exercices 1 | Logique et raisonnements mathématiques



1 Logique et raisonnements mathématiques 1
I Quantificateurs 2
II Disjonction de cas 3
III Raisonnement par récurrence 3
IV Analyse-synthèse 5
V Indications 6

I. Quantificateurs

EXERCICE 1. IND § SOL *Vocabulaire sur les fonctions*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrire à l'aide des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ les proposition suivantes :

1. f est la fonction nulle ;
2. f n'est pas constante ;
3. $f^2 = u$;
4. $f = u$ ou $f = -u$;
5. $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$;
6. f n'est pas nulle ;
7. f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$;
8. f est bornée.

Attention, aux numéros 3 et 4, u désigne la fonction constante égale à 1.

EXERCICE 2. IND § SOL *$\forall x \exists y$ Versus $\exists y \forall x$*

Soit $\mathscr{P}$ un prédicat à deux variables x et y. Déterminer laquelle des deux propriétés implique l'autre :

$$\forall x,\ \exists y,\ \mathscr{P}(x,y) \quad \text{et} \quad \exists y,\ \forall x,\ \mathscr{P}(x,y)$$

On justifiera sa réponse et, on déterminera un exemple de prédicat $\mathscr{P}$ sur $\mathbb{R}^2$, pour lequel l'implication réciproque est fausse.

EXERCICE 3. IND § SOL ♪ *Négations*

Écrire la négation des formules suivantes :

1. $x = y = z$;
2. $c \geqslant 1 \implies ab \geqslant c^2$;
3. $\exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m$ divise n ;
4. $\forall a \in \mathbb{Q},\ \exists u \in \mathbb{N},\ 10^u a \in \mathbb{Z}$;
5. $\exists a > 0,\ \forall \epsilon > 0,\ a \leqslant \epsilon$;
6. $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ 2^n \geqslant n^2$.
7. $\forall n \in \mathbb{Z},\ \big(n \geqslant 0$ ou $n \leqslant 0\big)$;
8. $\big(\forall n \in \mathbb{Z}, n \geqslant 0\big)$ ou $\big(\forall n \in \mathbb{Z},\ n \leqslant 0\big)$;
9. $\forall x \in \mathbb{R}, \big(\forall y \in \mathbb{R},\ xy = 0\big) \implies x = 0$;
10. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \big(xy = 0 \implies x = 0\big)$;
11. $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ n + m$ est pair ;
12. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant y$.

Parmi ces formules, trouver celles qui sont des énoncés et déterminer s'ils sont vrais.

EXERCICE 4. IND § SOL ♪ *Une équivalence*

Soit $u := (u_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\mathscr{P}_1(u) : \forall \epsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \epsilon \quad \text{et} \quad \mathscr{P}_2(u) : \forall \epsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n < \epsilon$$

Sont-elles équivalentes à $\mathscr{P}_3(u) : \exists n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 0$?

EXERCICE 5. IND § SOL ♪ *Une équivalence*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est strictement croissante si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \implies f(x) < f(y)$. Montrer que f est strictement croissante si et seulement si

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b \iff f(a) \leqslant f(b)$$

EXERCICE 6. IND § SOL ♪♪ *Détermination d'une CNS*

Déterminer, en fonction des réels a et b, une condition nécessaire et suffisante de chacune des propriétés suivantes :

1. $\forall x \in [0,1],\ ax+b \geqslant 0$; **2.** $\forall x \in]0,1[,\ ax+b \geqslant 0$.

II. Disjonction de cas

EXERCICE 7. IND § SOL *Un zeste d'arithmétique*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n+m$ soit impaire et nm soit pair.

EXERCICE 8. IND § SOL ♪ *Une infinité d'inéquations*

Déterminer les nombres réels x tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x^{n+2} \leqslant x^{n+1} + x^n$.

EXERCICE 9. IND § SOL ♪♪ *Un zeste d'arithmétique*

On a démontré dans ALG 1 le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$:

$$\forall b \in \mathbb{N}^*,\ \forall a \in \mathbb{N},\ \exists !(q,r) \in \mathbb{N}^2,\ a = bq + r \text{ et } 0 \leqslant r < b$$

En déduire son analogue dans $\mathbb{Z}$:

$$\forall b \in \mathbb{Z}^*,\ \forall a \in \mathbb{Z},\ \exists !(q,r) \in \mathbb{Z}^2,\ a = bq + r \text{ et } 0 \leqslant r < |b|$$

III. Raisonnement par récurrence

EXERCICE 10. IND § SOL ♪ *Raffinement de l'identité de Bezout*

Montrer que tout entier supérieur ou égal à 8 peut s'écrire $3a+5b$ pour certains a, b dans $\mathbb{N}$.

EXERCICE 11. IND § SOL ♪ *Une majoration de* $\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1 \times 3 \times \ldots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \ldots \times 2n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ puis justifier le titre de cet exercice.

EXERCICE 12. IND § SOL ♪♪ *Équation de Pell-Fermat*

L'utilisation de la formule du binôme est interdite dans cet exercice.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers naturels a_n et b_n tels que

$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\left(3-2\sqrt{2}\right)^n$ en fonction de a_n et b_n.

3. En déduire qu'il existe une infinité de couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x^2 - 2y^2 = 1$.

EXERCICE 13. IND § SOL ♪♪ *Technique de minoration a priori*

On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leqslant n$.

2. Déterminer des réels λ et μ strictement positifs tels que $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad a_n \geqslant \lambda n + \mu$.

EXERCICE 14. IND § SOL ♪♪♪ *L'inégalité arithmético-géométrique*

On se propose de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique, ie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n,\ \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_i$$

1. Soit x et y dans $\mathbb{R}_+$ tels que $xy = 1$. Établir que $x + y \geqslant 2$.

2. Soit x et y dans $\mathbb{R}_+$ tels que $x \leqslant 1 \leqslant y$. Démontrer que $xy + 1 \leqslant x + y$.

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+$ tels que $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 1$ et $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$.
Démontrer que $a_1 + a_n \geqslant 1 + a_1 a_n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+$. Démontrer que $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 1 \implies a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n$.

5. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

EXERCICE 15. IND § SOL ♪♪♪ *L'inégalité arithmético-géométrique – démonstration de Cauchy*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathscr{P}(n)$ la propriété suivante :

$$\mathscr{P}(n)\ :\ \forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n,\ \ x_1 x_2 \cdots x_n \leqslant \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n$$

1. Montrer $\mathscr{P}(2)$.

2. Montrer que $\forall n \in [\![2, +\infty[\![\ ,\ \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n-1)$. On pourra poser $x_n = \dfrac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}}{n-1}$.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(2n)$. On pourra appliquer $\mathscr{P}(n)$ à $(x_1, \ldots, x_n)$ puis $(x_{n+1}, \ldots, x_{2n})$ et conclure en utilisant judicieusement $\mathscr{P}(2)$.

4. Montrer $\mathscr{P}(n)$ pour tout entier $n \geqslant 2$.

IV. Analyse-synthèse

Exercice 16. IND § SOL

Déterminer les solutions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation suivante : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) + f(y) = 2f(x-y) + 1$.

Exercice 17. IND § SOL *Existe-t-il un logarithme sur $\mathbb{R}$?*

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$.

Exercice 18. IND § SOL ♪ *Une équation fonctionnelle*

Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) - f(x-y) = xy$.

Exercice 19. IND § SOL ♫ *Une équation fonctionnelle*

Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xf(x) + y^2 + f(xy) = f(x+y)^2 - f(x)f(y) \quad (\mathbf{E})$$

On procède par Analyse-synthèse.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant (**E**).

- **a.** Déterminer $f(0)$.
- **b.** Montrer que $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y)^2 = y^2$. Que peut-on en déduire sur f ?
- **c.** Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$.

2. Conclure.

Exercice 20. IND § SOL ♫ *CNS d'écriture comme somme et produit de deux réels*

Déterminer, en fonction des réels s et p, une condition nécessaire et suffisante de la propriété suivante :

$$\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 + x_2 = s \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = p$$

V. Indications

Indication 1. Ne pas confondre les propositions $f \neq 0$ et f n'est pas nulle.

Voir l'énoncé.

Indication 2. On pourra, par exemple, chercher un prédicat portant sur des inégalités.

Voir l'énoncé.

Indication 3. Seules les formules de 3 à 11 sont des énoncés et, parmi elles, seules 3,6,7 et 9 sont vraies.

Voir l'énoncé.

Indication 4. Une des deux implications entre $\mathscr{P}_1(u)$ et $\mathscr{P}_2(u)$ ne nécessite aucune démonstration.

Voir l'énoncé.

Indication 5. Procéder par double implication. Supposons f strictement croissante et fixons (a,b) dans $\mathbb{R}^2$. Il n'est pas difficile de vérifier que $a \leqslant b \implies f(a) \leqslant f(b)$ en faisant la disjonction de cas $a = b$ et $a < b$. Penser à la contraposition pour la réciproque.

Voir l'énoncé.

Indication 6. Les deux propriétés sont équivalentes. On pourra se forger une intuition géométrique au moyen de la fonction $x \mapsto ax + b$.

Voir l'énoncé.

Indication 7. Il n'est pas difficile de construire « un m qui convient » si on connaît la parité de n.

Voir l'énoncé.

Indication 8. On peut factoriser chacun de deux membres par x^n.

Voir l'énoncé.

Indication 9. On pourra se ramener au cas où $b > 0$ puis effectuer une disjonction suivant le signe de a.

Voir l'énoncé.

Indication 10. Trouver un entier non nul λ tel que si la propriété est vraie pour $n - \lambda$, alors elle est vraie pour n.

Voir l'énoncé.

Indication 11. Raisonner par récurrence.

Voir l'énoncé.

INDICATION 12. Conjecturer une formule au 2. après avoir examiné les « petites valeurs » de n. Attention à bien justifier l'infinité demandée au 3.

Voir l'énoncé.

INDICATION 13. Au 2., on pourra essayer de chercher λ et μ tels que la propriété soit héréditaire à partir d'un certain rang et correctement initialisée.

Voir l'énoncé.

INDICATION 14. Au 2., factoriser $x+y-xy-1$. Raisonner par récurrence au 4.

Voir l'énoncé.

INDICATION 15. Au 2., en faisant le choix de l'indication pour $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in (\mathbb{R}_+^*)^{n-1}$, déduire de $\mathscr{P}(n)$ que $x_1 x_2 \cdots x_n \leqslant x_n^n$ puis en conclure $\mathscr{P}(n-1)$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 16. Il n'y a aucune solution.

Voir l'énoncé.

INDICATION 17. On trouve une seule solution par analyse synthèse.

Voir l'énoncé.

INDICATION 18. Procéder par analyse synthèse. Essayer de calculer $f(x)$ en fonction de x et $f(0)$ dans l'analyse.

Voir l'énoncé.

INDICATION 19. Attention au 1.b., on a $f(y) = y$ ou $f(y) = -y$ mais a priori ce signe peut varier avec y.

Voir l'énoncé.

INDICATION 20. Effectuer une analyse synthèse. Si $x_1 + x_2 = s$ et $x_1 x_2 = p$, alors il n'est pas difficile de trouver un trinôme du second degré dont x_1 et x_2 sont les racines.

Voir l'énoncé.