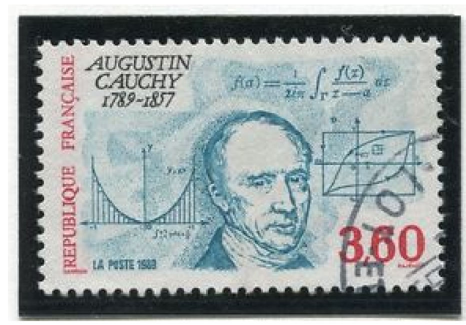
Exercices 5 | Nombres réels

Manipulation des inégalités sur les nombres réels, partie entière et bornes.



I. Inégalités

EXERCICE 1. **IND § SOL** *Minoration d'un produit*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs. Montrer que $\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$.

2. Soit $y_1, \ldots, y_n$ des réels supérieurs ou égaux à 1. Établir que $n + \prod_{k=1}^{n} y_k \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} y_k$.

EXERCICE 2. **IND § SOL** *Une équation à paramètre*

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_a) : $x^2 - ax = |x - a|$.

EXERCICE 3. **IND § SOL** *Une inéquation*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x-1} \geqslant x - 4$.

EXERCICE 4. **IND § SOL** ♪ *Une inégalité sans intérêt !*

Prouver que $\forall x, y \in \mathbb{R},\ 1 + |xy - 1| \leqslant \big([1 + |y-1|\big)(1 + |x - 1|)$.

EXERCICE 5. **IND § SOL** ♪ *Une minoration*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On se propose de démontrer de deux façons différentes l'inégalité :

$$(\star) \quad \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geqslant n^2$$

1. Démontrer $(\star)$ en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Justifier que, pour tout réel $x > 0$, on a $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$.

3. En déduire une nouvelle démonstration de $(\star)$.

EXERCICE 6. **IND § SOL** ♪ *Une fonction sous-additive*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$.

1. Vérifier que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2. En déduire au moyen de l'inégalité triangulaire que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ \ f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$.

EXERCICE 7. **IND § SOL** ♪ *La troisième inégalité de Cauchy*

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ et $\beta_1, \ldots, \beta_n$ des réels strictement positifs. Montrer que

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right) \leqslant \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{\beta_1 + \cdots + \beta_n} \leqslant \max_{1 \leqslant j \leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)$$

2. Soient $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = p_m \mathrm{X}^m + \cdots + p_1 \mathrm{X} + p_0$ un polynôme à coefficients strictement positifs. Établir que, pour tout $0 < x \leqslant y$,

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m \leqslant \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{P}(y)} \leqslant 1$$

EXERCICE 8. **IND** § **SOL** ♪ *Majoration d'un produit*

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $\pi_n := \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$.

1. a. Établir que, pour tout $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k^2} \leqslant \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.

b. En déduire que $\ln \pi_n \leqslant 2$ puis $\pi_n \leqslant e^2$ pour tout entier naturel n non nul.

2. a. Établir que, pour tout $k \geqslant 2$, $1 + \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$.

b. En déduire que $\pi_n \leqslant 4$ pour tout entier naturel n non nul.

EXERCICE 9. **IND** § **SOL** ♫ *Variations sur l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$. Après avoir développé $\sum_{1 \leqslant k, \ell \leqslant n} (a_k b_\ell - a_\ell b_k)^2$, donner une nouvelle démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Soit $\mu \in]0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\mu^k \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\mu^2}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_{n-1} \geqslant a_n > 0$ et

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell \leqslant \sum_{\ell=1}^{k} b_\ell$$

On pose $\Delta_0 := 0$ et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\Delta_k := \sum_{\ell=1}^{k} (b_\ell - a_\ell)$.

a. Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} a_i (b_i - a_i) = a_n \Delta_n + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) \Delta_i$.

b. En déduire que $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ puis que $\sum_{k=1}^{n} a_i^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_i^2$.

EXERCICE 10. **IND** § **SOL** ♫ *Moyenne et écart-type*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels tels que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$.

1. Établir que $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2$.

2. Soit $b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels. On pose $\mu = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} b_i$, $\sigma = \sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(b_i-\mu)^2}$ et $\sigma' = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|b_i-\mu|$.
Démontrer que $\sigma \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2}}\,\sigma'$.

EXERCICE 11. IND § SOL ♪♪♪ *L'inégalité arithmético-géométrique*

On se propose de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique, ie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n,\ \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_i$$

1. Soit x et y dans $\mathbb{R}_+$ tels que $xy = 1$. Établir que $x + y \geqslant 2$.

2. Soit x et y dans $\mathbb{R}_+$ tels que $x \leqslant 1 \leqslant y$. Démontrer que $xy + 1 \leqslant x + y$.

3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+$ tels que $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 1$ et $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$.
Démontrer que $a_1 + a_n \geqslant 1 + a_1 a_n$.

4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $a_1, \ldots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+$. Démontrer que $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 1 \implies a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n$.

5. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

EXERCICE 12. IND § SOL ♪♪ *Technique*

Soit $n \geqslant 2$. Prouver que $\dfrac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{k}{n-k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\dfrac{k}{(n-k)^2}$.

EXERCICE 13. IND § SOL ♪♪ *Une nouvelle preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

Dans cet exercice, on propose *une nouvelle démonstration* de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

1. Démontrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et tous x et y dans $\mathbb{R}_+^*$, on a $(a+b)^2 \leqslant (x+y)\left(\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{y}\right)$.

2. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et tous réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$:

$$\frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + \cdots + x_n} \leqslant \frac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n}$$

3. En déduire une nouvelle démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{2n},\ \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\beta_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i^2\right)$$

EXERCICE 14. IND § SOL ♪♪ *À nouveau Cauchy-Schwarz*

Cet exercice a pour objectif de donner une nouvelle démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on considère $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des réels positifs.

1. Démontrer que $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ a_k b_k \leqslant \dfrac{\mathrm{B}}{2\mathrm{A}} a_k^2 + \dfrac{\mathrm{A}}{2\mathrm{B}} b_k^2.$

2. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$

-» Cauchy-Schwarz

II. Partie entière

EXERCICE 15. IND § SOL ♪ *Une relation sur la partie entière*

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \dfrac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \dfrac{x}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$

EXERCICE 16. IND § SOL ♪ *Une propriété de la partie entière*

Prouver que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor.$

III. Bornes

EXERCICE 17. IND § SOL ♪ *Étude d'un ensemble*

L'ensemble $\mathrm{A} = \left\{ \dfrac{\sqrt{n}+m}{n+\sqrt{m}}\,;\,(n,m) \in \left(\mathbb{N}^*\right)^2 \right\}$ admet-il une borne inférieure ? supérieure ?

EXERCICE 18. IND § SOL ♪ *Un classique*

Existence et calcul de $\inf \mathrm{A}$ où $\mathrm{A} = \left\{ (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \cdots + \dfrac{1}{x_n}\right)\,;\,(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n \right\}.$

EXERCICE 19. IND § SOL ♪ *Bornes d'une somme de parties*

Soit A et B des parties non vides de $\mathbb{R}$. On définit $\mathrm{A}+\mathrm{B} := \{a+b\,;\,(a,b) \in \mathrm{A}\times\mathrm{B}\}$. Montrer que si A et B sont bornées, alors $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ l'est aussi et que $\inf(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \inf(\mathrm{A}) + \inf(\mathrm{B})$ et $\sup(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \sup(\mathrm{A}) + \sup(\mathrm{B})$.

EXERCICE 20. IND § SOL ♪ *Keep cool*

Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ est non vide et bornée et que $\sup(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \max\left(\sup(\mathrm{A}), \sup(\mathrm{B})\right)$ et $\inf(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \min\left(\inf(\mathrm{A}), \inf(\mathrm{B})\right)$.

EXERCICE 21. IND § SOL ♪ *Sur la crête*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction majorée.

1. Pour $y \in \mathbb{R}$, on note $f^*(y) := \sup\left\{ f(x)\,;\,x \leqslant y \right\}$. Justifier la définition de f^*.

2. Calculer $\sin^*$.

3. On suppose que f est croissante. Que dire de f^* ?

4. La fonction f^* est-elle monotone ?

5. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ majorée. Comparer $(f+g)^*$ et $f^* + g^*$. A-t-on $(f+g)^* = f^* + g^*$?

EXERCICE 22. IND § SOL *Parties adjacentes*

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall (a,b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B},\ a \leqslant b \quad \text{et} \quad \forall \varepsilon > 0,\ \exists (a,b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B},\ b - a < \varepsilon$$

Démontrer que $\sup \mathrm{A}$ et $\inf \mathrm{B}$ existent et vérifient $\sup \mathrm{A} = \inf \mathrm{B}$.

EXERCICE 23. IND § SOL *Sup des inf Vs. inf des sup*

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bornée.

1. Démontrer que $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}} \inf\limits_{y \in \mathbb{R}} f(x,y) \leqslant \inf\limits_{y \in \mathbb{R}} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x,y)$.

2. Donner un exemple de fonction pour laquelle cette inégalité est stricte.

EXERCICE 24. IND § SOL *Calcul d'une borne inférieure*

On pose $\Omega := \left\{ \cos(x) + \cos\left(\sqrt{2}x\right) ; x \in \mathbb{R} \right\}$.

1. Justifier que Ω admet une borne inférieure.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple d'entiers relatifs (a_n, b_n) tel que

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)^n = a_n + \sqrt{2} b_n$$

3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n est impair et b_n a la même parité que n.

4. Démontrer que $\cos\left(\sqrt{2} b_{2n+1} \pi\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} -1$.

5. En déduire la valeur de $\inf \Omega$.

EXERCICE 25. IND § SOL *D'après X-PC 2000*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante telle que $f(-1) > -1$ et $f(1) < 1$. On va montrer que f a un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = x_0$. On pose $\mathrm{A} = \left\{ x \in [-1,1] ; f(x) \geqslant x \right\}$.

1. Vérifier que A est stable par f.

2. Montrer que A admet une borne supérieure. On note $x_0 = \sup(\mathrm{A})$.

3. Établir que $x_0 \in \mathrm{A}$. En déduire que f admet un point fixe.

IV. Indications

INDICATION 1. Raisonner par récurrence sur n au 1. (par exemple). Le 2. est une application du 1.

Voir l'énoncé.

INDICATION 2. La rédaction *finale* doit prendre la forme d'une disjonction de cas : si a..., alors E_a admet pour solutions...

Voir l'énoncé.

INDICATION 3. Élever au carré avec les précautions d'usage.

Voir l'énoncé.

INDICATION 4. Il suffit d'appliquer judicieusement l'inégalité triangulaire.

Voir l'énoncé.

INDICATION 5. Au 3., on pourra scinder la somme « en trois paquets » selon les conditions d'indices suivantes : $i = j$, $i < j$ et $j < i$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 6. Au 2., utiliser le 1. et l'inégalité triangulaire.

Voir l'énoncé.

INDICATION 7. Remarquer que, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\min\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}\right) \leqslant \dfrac{\alpha_k}{\beta_k} \leqslant \max\limits_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\dfrac{\alpha_j}{\beta_j}\right)$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 8. Télescopage dans une somme au 1., dans un produit au 2.

Voir l'énoncé.

INDICATION 9.

Voir l'énoncé.

INDICATION 10. Développer la somme $\sum_{i=1}^{n}|a_i|$ au carré.

Voir l'énoncé.

INDICATION 11. Au 2., factoriser $x + y - xy - 1$. Raisonner par récurrence au 4.

Voir l'énoncé.

INDICATION 12. Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Voir l'énoncé.

INDICATION 13. Raisonner par récurrence au 2.

Voir l'énoncé.

INDICATION 14. Inégalité AG au 1.

Voir l'énoncé.

INDICATION 15. On peut par exemple discuter selon la parité de $\lfloor x \rfloor$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 16. On peut par exemple remarquer que $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor + \lfloor n\{x\} \rfloor$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 17. L'ensemble A n'est pas majoré.

Voir l'énoncé.

INDICATION 18. Pensez à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Voir l'énoncé.

INDICATION 19. Revenir à la caractérisation « epsilonesque ou utiliser des suites minimisantes (ou maximisantes).

Voir l'énoncé.

INDICATION 20. S'en tenir aux définitons.

Voir l'énoncé.

INDICATION 21. utiliser $\Omega_y := \left\{ f(x)\,;\, x \leqslant y \right\}$ pour $y \in \mathbb{R}$, notamment pour montrer que f^* est croissante.

Voir l'énoncé.

INDICATION 22. Commencer par justifier que $\sup A \leqslant \inf B$ puis raisonner par l'absurde (par exemple).

Voir l'énoncé.

INDICATION 23. Pour une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée et un réel M, $\sup A \leqslant M$ équivaut à $\forall a \in A,\ a \leqslant M$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 24.

Voir l'énoncé.

INDICATION 25. Utiliser la croissance de f au a.

Voir l'énoncé.

V. Solutions

SOLUTION 1.

1. Raisonnons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons HR(n) la proposition :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n, \quad \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$$

- ▷ HR(1) est clairement vérifiée.
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons HR(n) vérifiée. Soient des réels positifs $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Par HR($n$) et puisque $1 + x_{n+1} > 0$, on a

$$(1 + x_{n+1}) \prod_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geqslant (1 + x_{n+1}) \left(1 + \sum_{k=1}^{n} x_k \right) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k + x_{n+1} \times \sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k$$

car $x_{n+1} \times \sum_{k=1}^{n} x_k > 0$. Ainsi HR($n+1$) est vérifiée.

2. Posons, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $x_k = y_k - 1$. Ces réels sont positifs et l'on déduit du 1. que

$$\prod_{k=1}^{n} y_k \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} (y_k - 1) = 1 - n + \sum_{k=1}^{n} y_k$$

d'où $n + \prod_{k=1}^{n} y_k \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} y_k$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 2.

- ▷ *Résolution sur* $[a, +\infty[$. Pour $x \geqslant a$, (E_a) équivaut à $x^2 - (a+1)x + a = 0$, équation du second degré de discriminant $\Delta = (a+1)^2 - 4a = (a-1)^2$ et de racines a et 1.
- ▷ *Résolution sur* $]-\infty, a[$. Pour $x < a$, (E_a) équivaut à $x^2 - (a-1)x - a = 0$, équation du second degré de discriminant $\Delta = (a-1)^2 + 4a = (a+1)^2$ et de racines a et -1.

On en déduit la disjonction de cas suivante :

- ▷ Cas 1 : $a \geqslant 1$. On trouve deux solutions : a et -1.
- ▷ Cas 2 : $a \leqslant -1$. On trouve deux solutions : a et 1.
- ▷ Cas 3 : $-1 < a < 1$. On trouve trois solutions : a, -1 et 1.

COMMENTAIRE
Cette disjonction vient directement de la résolution initiale ; après celle-ci, on voit apparaître que le nombre de solutions dans $[a, +\infty[$ *(resp.* $]-\infty, a]$*) dépend de la position de a par rapport à* 1 *(resp.* -1*).*

Voir l'énoncé.

SOLUTION 3. Soit $x \in [1, +\infty[$. On effectue une disjonction de cas.

▷ Supposons $x \geqslant 4$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1} \geqslant x-4 &\iff x-1 \geqslant (x-4)^2\\ &\iff x^2-9x+17 \leqslant 0\\ &\iff \frac{9-\sqrt{13}}{2} \leqslant x \leqslant \frac{9+\sqrt{13}}{2}\\ &\iff 4 \leqslant x \leqslant \frac{9+\sqrt{13}}{2} \quad \text{car } \frac{9-\sqrt{13}}{2} < 4\end{aligned}$$

▷ Supposons $x < 4$. On a alors $\sqrt{x-1} > 0 > x-4$ donc x est solution de l'inéquation.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x-1} \geqslant x-4$ est donc l'intervalle $\left[1, \dfrac{9+\sqrt{13}}{2}\right]$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 4. En développant le membre de droite, on trouve que l'inégalité est équivalente à

$$|xy-1| \leqslant |x-1|+|y-1|+|x-1||y-1|.$$

On remarque alors que

$$xy-1 = (x-1)(y-1)+x-1+y-1,$$

et en appliquant l'inégalité triangulaire

$$|xy-1| \leqslant |x-1)(y-1)|+|x-1|+|y-1|,$$

d'où le résultat.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 5.

1. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$n^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i} \times \frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right)$$

2. Soit un réel $x > 0$. On a $x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$.

3. On a

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \frac{x_i}{x_j} = \sum_{i=1}^{n} 1 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{x_i}{x_j} + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \frac{x_i}{x_j} = n + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}\right) \geqslant n + \binom{n}{2} \times 2 = n+n(n-1) = n^2$$

car le nombre de couple (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$ et vérifiant $i<j$ est $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 6.

1. On remarque par exemple que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ f(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x}\cdot$

2. Comme f est croissante et $|x+y| \leqslant |x|+|y|$, on a

$$f(x+y) = f(|x+y|) \leqslant f(|x|+|y|) = \frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|} = \frac{|x|}{1+|x|+|y|} + \frac{|y|}{1+|x|+|y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 7.

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ et $\beta_1, \dots, \beta_n$ des réels strictement positifs.
Soit $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right) \leqslant \frac{\alpha_k}{\beta_k} \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)$$

d'où, puisque $\beta_k > 0$,

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)\cdot\beta_k \leqslant \alpha_k \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)\cdot\beta_k$$

En sommant ces inégalités pour $k \in [\![1, n]\!]$, on obtient :

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\alpha_k \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k\right)$$

Comme $\beta_1 + \cdots + \beta_n > 0$, on a

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right) \leqslant \frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{\beta_1+\cdots+\beta_n} \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)$$

2. Soient $m \in \mathbb{N}$, $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = p_m\mathrm{X}^m + \cdots + p_1\mathrm{X} + p_0$ un polynôme à coefficients strictement positifs et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < x \leqslant y$. Puisque $p_k x^k > 0$ et $p_k y^k > 0$ pour tout $k \in [\![0, m]\!]$, on déduit du a) que

$$\min_{0\leqslant k\leqslant m}\left(\frac{p_k x^k}{p_k y^k}\right) \leqslant \frac{p_m x^m + \cdots + p_1 x + p_0}{p_m y^m + \cdots + p_1 y + p_0} \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant m}\left(\frac{p_k x^k}{p_k y^k}\right)$$

ie

$$\min_{0\leqslant k\leqslant m}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^k\right) \leqslant \frac{p_m x^m + \cdots + p_1 x + p_0}{p_m y^m + \cdots + p_1 y + p_0} \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant m}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^k\right)$$

Comme $0 < x/y \leqslant 1$,

$$\min_{0\leqslant k\leqslant m}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^k\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^m \quad \text{et} \quad \max_{0\leqslant k\leqslant m}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^k\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^0 = 1$$

Ainsi

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m \leqslant \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{P}(y)} \leqslant 1$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 8.

1. a. Soit $k \geqslant 2$. On a $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2}$ car $k^2 > k(k-1) > 0$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, après télescopage :

$$\ln \pi_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n}$$

d'où $\ln p_n \leqslant 2$ puis $\pi_n \leqslant e^2$ par croissance du logarithme.

2. a. Soit $k \geqslant 2$. On a

$$\frac{k^2}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{k^2}} \quad \text{et} \quad \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{k^4} < 1$$

d'où $1 + \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, après télescopage :

$$\pi_n = \prod_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k^2}\right) \leqslant 2 \prod_{k=2}^{n} \frac{k \times k}{(k-1)(k+1)} = 2 \times \frac{n}{1} \times \frac{2}{n+1} = 4\frac{n}{n+1}$$

d'où $p_n \leqslant 4$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 9.

1. On a

$$\frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} (a_k b_\ell - a_\ell b_k)^2 = \frac{1}{2} \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} \left(a_k^2 b_\ell^2 + a_\ell^2 b_k^2 - 2a_k a_\ell b_k b_\ell\right) = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_k^2 b_\ell^2 - \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} a_k b_k a_\ell b_\ell$$
$$= \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2$$

Comme une somme de carrés de nombres réels est strictement positive, on déduit de cette relation que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \geqslant 0$$

On retrouve ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \mu^k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mu^{2k}} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}} \sqrt{\mu^2 \frac{1-\mu^{2n}}{1-\mu^2}} \leqslant \sqrt{\frac{(n+1)^2}{2}} \sqrt{\frac{1}{1-\mu^2}} = \frac{n+1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\mu^2}}$$

3. a. En utilisant les notations de l'énoncé et en remarquant que $\Delta_0 = 0$, on a

$$\delta := \sum_{i=1}^{n} a_i(b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\Delta_i - \Delta_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}\Delta_i = a_n \Delta_n + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})\Delta_i$$

Comme Δ_i et $a_i - a_{i+1}$ sont positifs pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ ainsi que a_n et Δ_n, on en déduit que $\delta \geqslant 0$ d'où $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

b. Par la question précédente et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^n a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2} \quad (\star)$$

- ▷ Si $\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} = 0$, alors l'inégalité à démontrer est triviale.
- ▷ Sinon, en divisant par $\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$ dans $(\star)$ on obtient $\sqrt{\sum_{k=1}^n a_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^n b_i^2}$ d'où $\sum_{k=1}^n a_i^2 \leqslant \sum_{k=1}^n b_i^2$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 10.

1. On a $\left(\sum_{i=1}^n |a_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |a_i a_j|$ d'où

$$\left(\sum_{i=1}^n |a_i|\right)^2 - 2\sum_{i=1}^n a_i^2 = -\sum_{i=1}^n a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |a_i a_j| \geqslant -\sum_{i=1}^n a_i^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j = -\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^2 = 0$$

d'où $\sum_{i=1}^n a_i^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n |a_i|\right)^2$.

2. On a $\sum_{i=1}^n (b_i - \mu) = n\mu - n\mu = 0$ d'où par la première question :

$$n\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (b_i - \mu)^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^n |b_i - \mu|\right)^2 = \frac{(n\sigma')^2}{2}$$

Ainsi $\sigma \leqslant \sqrt{\frac{n}{2}}\sigma'$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 11.

1. On a $x + y - 2 = x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2-2x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$.

2. On a $xy + 1 - (x+y) = (x-1)(y-1) \leqslant 0$ car $x \leqslant 1 \leqslant y$.

3. ▷ Démontrons par l'absurde que $a_1 \leqslant 1 \leqslant a_n$.

† Supposons que $a_1 > 1$. On a alors $1 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ d'où $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n > 1$. C'est absurde.

† Supposons que $a_n < 1$. On a alors $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n < 1$ d'où $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n < 1$. C'est absurde.

▷ Puisque $0 \leqslant a_1 \leqslant 1 \leqslant a_n$, on déduit du 2. que $a_1 + a_n \geqslant a_1 a_n + 1$.

4. Raisonnons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, notons HR$(n)$ la propriété suivante :

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 1 \implies a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n$$

▷ HR(2) a été démontrée au 2.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $n \geqslant 2$ et HR(n) vraie. Soit $a_1, \ldots, a_{n+1}$ dans $\mathbb{R}_+$ tels que $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{n+1} = 1$. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_{n+1}$. Par le 3., on a $a_1 + a_{n+1} \geqslant 1 + a_1 a_{n+1}$. Comme $a_1 \times \cdots \times a_n \times a_1 a_{n+1} = 1$, on déduit de HR($n$) que $a_2 + \cdots + a_n + a_1 a_{n+1} \geqslant n$ d'où

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=2}^{n} a_i\right) + a_1 + a_{n+1} \geqslant \left(\sum_{i=2}^{n} a_i\right) + 1 + a_1 a_{n+1} \geqslant n+1$$

d'où HR($n+1$).

5. L'inégalité arithmético-géométrique est évidente lorsque $n = 1$ ou si l'un des x_i est nul. Supposons $n \geqslant 2$ et soit $x_1, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$. En appliquant le 4. aux $a_i := \frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}$ pour $i \in [\![1, n]\!]$ (dont le produit vaut clairement 1), on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}} \sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n\,, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 12. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} \times \frac{\sqrt{k}}{n-k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} k \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} = \frac{n(n-1)}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 13.

1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et x, y dans $\mathbb{R}_+^*$. On a $(x+y)\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right) - (a+b)^2 = a^2 \frac{y}{x} + b^2 \frac{x}{y} - 2ab$. On a

$$a^2 \frac{y}{x} + b^2 \frac{x}{y} \geqslant 2\sqrt{\frac{a^2 y b^2 x}{xy}} = 2|ab| \geqslant 2ab \quad \text{(inégalité arithmético-géométrique)}$$

d'où $(a+b)^2 \leqslant (x+y)\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right)$.

2. On raisonne par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note HR(n) la proposition suivante : pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et tous réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$, on a

$$\frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + \cdots + x_n} \leqslant \frac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n}$$

▷ HR(1) est clairement vraie.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons HR(n) vraie. Soit $(a_1, \ldots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et des réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_{n+1}$. Par application de l'inégalité de la question 2 puis de HR(n), on obtient :

$$\frac{(a_1 + \cdots + a_{n+1})^2}{x_1 + \cdots + x_{n+1}} \leqslant \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + \cdots + x_n} + \frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}} \leqslant \frac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} + \frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}}$$

d'où HR($n+1$).

3. Soit $\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n$ des réels. Supposons dans un premier temps que les α_i sont tous non nuls. Pour $i \in [\![1,n]\!]$, posons $x_i = \alpha_i^2$ et $a_i = \alpha_i\beta_i$. On déduit de la question précédente que

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \leqslant \sum_{i=1}^n \beta_i^2$$

d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Revenons au cas général : en notant I l'ensemble des indices i tel que $\alpha_i \neq 0$, on obtient par ce qui précède :

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i\right)^2 = \sum_{i\in I}\alpha_i\beta_i \leqslant \sum_{i\in I}\beta_i^2\sum_{i\in I}\alpha_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^n\beta_i^2\sum_{i=1}^n\alpha_i^2$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 14.

1. Il suffit d'appliquer l'inégalité AG à $x = \dfrac{B}{A}a_k^2$ et $y = \dfrac{A}{2B}b_k^2$.

2. On peut supposer les a_i non tous nuls ainsi que les b_i non tous nuls (l'inégalité de Cauchy-Schwarz est évidente dans le cas contraire). Soit $A > 0$ et $B > 0$. En sommant les inégalités de la question précédente, on aboutit à

$$\sum_{k=1}^n a_kb_k \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}\sum_{i=1}^n a_i^2 + \frac{A}{B}\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

En choisissant $A := \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} > 0$ et $B := \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} > 0$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 15. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) := \left\lfloor \frac{x+1}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor - \lfloor x\rfloor$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x+1) &= \left\lfloor\frac{x+1+1}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor - \lfloor x+1\rfloor = \left\lfloor\frac{x}{2}+1\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor - \lfloor x\rfloor - 1 = \left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor + 1 + \left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor - \lfloor x\rfloor - 1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver que g est nulle sur $[0,1[$. Soit $x \in [0,1[$. On a $\frac{x}{2}$ et $\frac{x+1}{2}$ dans $[0,1[$, d'où $g(x) = 0$.

VARIANTE
On peut aussi écrire $x = n + \theta$ où $n := \lfloor x\rfloor$ et $\theta \in [0,1[$. On a $\frac{x}{2} = \frac{n}{2} + \frac{\theta}{2}$ et $\frac{x+1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{\theta+1}{2}$ d'où

$$\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor + \left\lfloor\frac{x+1}{2}\right\rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2}+\frac{n}{2} = n & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2}+\frac{n+1}{2} = n & \text{sinon} \end{cases}$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 16. Posons, pour tout réel x, $f(x) := \left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor - \lfloor x\rfloor$.

▷ La fonction f est 1-périodique car, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx+n \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor + n}{n} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + 1 \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

▷ Soit alors $x \in [0,1[$. On a $\lfloor x \rfloor = 0$ et $nx \in [0,n[$ d'où $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \in [0,1[$ et donc $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$ et finalement $f(x) = 0$.

▷ La fonction f est 1-périodique et nulle sur $[0,1[$, elle est donc nulle sur $\mathbb{R}$.

Variante

On peut aussi écrire $x = k + \theta$ avec $k := \lfloor x \rfloor$ et $\theta \in [0,1[$. On a alors $nx = kn + n\theta$ donc $\lfloor nx \rfloor = kn + \lfloor n\theta \rfloor$ et $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = k + \frac{\lfloor n\theta \rfloor}{n}\cdot$ Mais puisque $n\theta \in [0,n[$, on a $\frac{\lfloor n\theta \rfloor}{n} \in [0,1[$ d'où $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = k = \lfloor x \rfloor$.

Voir l'énoncé.

Solution 17.

▷ A est non vide et minoré par 0 donc admet une borne inférieure. Comme $\frac{\sqrt{n}+1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $\inf A = 0$.

▷ Comme $\frac{1+m}{1+\sqrt{m}} \xrightarrow[m\to+\infty]{} +\infty$, A n'admet pas de borne supérieure.

Voir l'énoncé.

Solution 18. L'ensemble A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0 donc inf A existe d'après la propriété de la borne inférieure. Pour $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \times \frac{1}{\sqrt{x_k}} \leqslant (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

avec égalité pour $(x_1, \dots, x_n) = (1, \dots, 1)$. Ainsi $\inf A = n$ (c'est même un minimum).

Voir l'énoncé.

Solution 19.

▷ Pour tout $(a,b) \in A \times B$, $\inf A \leqslant a \leqslant \sup A$ et $\inf B \leqslant b \leqslant \sup B$, d'où $\inf A + \inf B \leqslant a + b \leqslant \sup A + \sup B$, ce qui montre que $A + B$ est bornée et $\inf A + \inf B \leqslant \inf(A+B)$ et $\sup A + \sup B \geqslant \sup(A+B)$.

▷ Il nous reste à voir que ces deux inégalités sont des égalités. En voici trois démonstrations :

† Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un majorant de A, il existe $a \in A$ tel que $a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ De même, il existe $b \in B$ tel que $b > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Ainsi $a + b > \sup A + \sup B - \varepsilon$. En particulier $\sup A + \sup B - \varepsilon \leqslant \sup(A+B)$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B$ puis $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ par le premier point.

† Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites maximisantes de A et B. Comme $a_n + b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup A + \sup B$, on déduit du premier point que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$. On raisonne de même pour la borne inférieure.

† Soit $(a,b) \in A \times B$. On a $a + b \leqslant \sup(A+B)$. Ainsi $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ b \leqslant \sup(A+B) - a$. On en déduit que pour tout $a \in A$, $\sup B \leqslant \sup(A+B) - a$, ie $\forall a \in A,\ a \leqslant \sup(A+B) - \sup B$ d'où $\sup A \leqslant \sup(A+B) - \sup B$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 20. Soit $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. Alors, puisque $x \in \mathrm{A}$ ou $x \in \mathrm{B}$, on a $x \leqslant \max\left(\sup \mathrm{A}, \sup \mathrm{B}\right)$. Ainsi $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ est majoré et $\sup(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \leqslant \max\left(\sup \mathrm{A}, \sup \mathrm{B}\right)$. De plus, puisque A et B sont inclus dans $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, $\sup \mathrm{A} \leqslant \sup(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$ et $\sup \mathrm{B} \leqslant \sup(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})$. Ainsi $\sup(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \geqslant \max\left(\sup \mathrm{A}, \sup \mathrm{B}\right)$ et finalement $\sup(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \max\left(\sup \mathrm{A}, \sup \mathrm{B}\right)$. On prouve sans peine selon le même schéma la formule $\inf(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \min(\inf \mathrm{A}, \inf \mathrm{B})$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 21. Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $\Omega_y := \left\{f(x)\,;\, x \leqslant y\right\}$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme $f(y) \in \Omega_y$, l'ensemble Ω_y est non vide, il est de plus majoré car f est majorée. Ainsi $f^*(y)$ existe par la propriété de la borne supérieure.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\pi}{2} + n\pi \leqslant y$, on a $f^*(y) = 1$. Ainsi $\sin^*$ est la fonction constante égale à 1.
3. Pour $y \in \mathbb{R}$ et $x \leqslant y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$ d'où $f^*(y) = f(y)$. Ainsi $f^* = f$.
4. Soit $(y, y') \in \mathbb{R}^2$ tel que $y < y'$. Comme $\Omega_y \subset \Omega_{y'}$, on a $f(y) \leqslant f(y')$. La fonction f^* est croissante.
5. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \leqslant y$. Comme $(f+g)(x) = f(x)+g(x) \leqslant f^*(y)+g^*(y)$, on a $(f+g)^*(y) \leqslant f^*(y)+g^*(y)$. Ainsi $(f+g)^* \leqslant f^* + g^*$. Il n'y a pas égalité de façon universelle : pour $f := \sin$ et $g := -f$, on a $(f+g)^* = 0$ alors que $f^* = g^* = 1$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 22. Comme A et B sont non vides, il existe $(a_0, b_0) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

- ▷ Puisque A est non vide et majorée par b_0, A admet une borne supérieure. De même B est non vide et minorée par a_0 donc admet une borne inférieure.
- ▷ Soit $a \in \mathrm{A}$. Comme $\forall b \in \mathrm{B},\ a \leqslant b$, on a $a \leqslant \inf \mathrm{B}$. Puisque cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $a \in \mathrm{A}$, on a $\sup \mathrm{A} \leqslant \inf \mathrm{B}$.
- ▷ Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sup \mathrm{A} < \inf \mathrm{B}$. Posons $\varepsilon := \inf \mathrm{B} - \sup \mathrm{A}$ Il existe $(a, b) \in \mathrm{A} \times \mathrm{B}$ tel que $b - a < \varepsilon$. Ceci est absurde car $b - a \geqslant \inf \mathrm{B} - \sup \mathrm{A} = \varepsilon$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 23.

1. ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\forall y \in \mathbb{R},\ f(x, y) \leqslant \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x, y)$ d'où $\inf\limits_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leqslant \inf\limits_{y \in \mathbb{R}} \sup\limits_{x \in \mathbb{R}} f(x, y)$.

   ▷ Puisque cette dernière inégalité est valable pour tout réel x, on en déduit que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}} f(x, y) \leqslant \inf_{y \in \mathbb{R}} \sup_{x \in \mathbb{R}} f(x, y)$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) := e^{-(x-y)^2}$.

▷ On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) = 0$ d'où $\sup_{x\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) = 0$.

▷ On a, pour $y \in \mathbb{R}$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y) = 1$ d'où $\inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) = 1$.

Ainsi $\sup_{x\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) < \inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 24.

1. L'ensemble Ω est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (enne contient 2) et minorée par -2 : elle admet donc une borne inférieure.

2. ▷ Soit $(a,b,a',b') \in \mathbb{Z}^4$ tels que $a+\sqrt{2}b = a'+\sqrt{2}b'$. On a alors $\sqrt{2}(b'-b) = a-a'$. Ceci impose que $b'=b$ car sinon on en déduirait que $\sqrt{2}$ serait rationnel. Ainsi $b' =' b$ puis $a'=a$. Ceci justifie l'unicité de (a_n,b_n) tel que $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = a_n+\sqrt{2}b_n$.

▷ Soit $n\in\mathbb{N}$. On déduit de la formule du binôme que :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}-1\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{2}^k(-1)^{n-k} = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}2^k(-1)^{n-2k} + \sqrt{2}\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}2^k(-1)^{n-2k-1}\\ &= a_n+\sqrt{2}b_n\end{aligned}$$

avec $a_n := \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}2^k(-1)^{n-2k} \in \mathbb{Z}$ et $b_n := \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}2^k(-1)^{n-2k-1} \in \mathbb{Z}$.

3. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$\begin{cases} a_n &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}2^k(-1)^{n-2k} = \binom{n}{0}2^0(-1)^n = 1\,[2]\\ b_n &= \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}2^k(-1)^{n-2k-1} = \binom{n}{1}2^0(-1)^{n-1} = n\,[2]\end{cases}$$

Ainsi a_n est impair et b_n a la même parité que n.

4. Soit $n\in\mathbb{N}$. Notons $u_n := \left(\sqrt{2}-1\right)^n$. Puisque a_{2n+1} est impair, on a

$$\cos\left(\sqrt{2}b_{2n+1}\pi\right) = \cos\left(\pi u_{2n+1}-\pi a_{2n+1}\right) = -\cos\left(\pi u_{2n+1}\right)$$

Comme $0<\sqrt{2}-1<1$, on a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'où $-\cos(\pi u_{2n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ par continuité du cosinus en 0. Ainsi $\cos\left(\sqrt{2}b_{2n+1}\pi\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$.

5. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\cos(b_{2n+1}\pi)+\cos\left(\sqrt{2}b_{2n+1}\pi\right)\in\Omega$. De plus, $\cos(b_{2n+1}\pi) = -1$ car b_{2n+1} est impair. Ainsi $\cos(b_{2n+1}\pi)+\cos\left(\sqrt{2}b_{2n+1}\pi\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2$. Puisque -2 est un minorant de Ω, on en déduit que $\inf\Omega = -2$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 25.

1. Soit $x\in A$. On a d'abors $-1\leqslant x\leqslant 1$ donc, par croissance de f, $-1 < f(-1) \leqslant f(x) \leqslant f(1) < 1$ d'où $f(x)\in[-1,1]$. Comme $f(x)\geqslant x$ et f croissante, on a $f(f(x))\geqslant f(x)$ et donc $f(x)\in A$. Ainsi, A est stable par f.

2. ▷ On a $A\subset\mathbb{R}$.

▷ Comme $f(-1) > -1$, $-1 \in \mathrm{A}$ donc $\mathrm{A} \neq \varnothing$.

▷ Comme $\mathrm{A} \subset [-1,1]$, A est majorée.

Ainsi, A admet une borne supérieure d'après la propriété de la borne supérieure.

3. Comme $x_0 = \sup(\mathrm{A})$, il existe $(a_n) \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f(a_n) \geqslant a_n$. De plus, $x_0 \geqslant a_n$ et donc, par croissance de f, $f(x_0) \geqslant f(a_n)$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_0) \geqslant a_n$. On en déduit par passage à la limite que $f(x_0) \geqslant x_0$. Ainsi $x_0 \in \mathrm{A}$.

4. Comme $x_0 \in \mathrm{A}$, on déduit du a) que $f(x_0) \in \mathrm{A}$ et donc que $f(x_0) \leqslant \sup(\mathrm{A}) = x_0$. Comme $f(x_0) \geqslant x_0$, on en déduit que $f(x_0) = x_0$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 1.

1. Raisonnons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons HR(n) la proposition :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in (\mathbb{R}_+)^n\,, \quad \prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$$

▷ HR(1) est clairement vérifiée.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons HR(n) vérifiée. Soient des réels positifs $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}$. Par HR($n$) et puisque $1 + x_{n+1} > 0$, on a

$$(1+x_{n+1})\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geqslant (1+x_{n+1})\left(1+\sum_{k=1}^{n} x_k\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k + x_{n+1} \times \sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k$$

car $x_{n+1} \times \sum_{k=1}^{n} x_k > 0$. Ainsi HR($n+1$) est vérifiée.

2. Posons, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $x_k = y_k - 1$. Ces réels sont positifs et l'on déduit du 1. que

$$\prod_{k=1}^{n} y_k \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n}(y_k - 1) = 1 - n + \sum_{k=1}^{n} y_k$$

d'où $n + \prod_{k=1}^{n} y_k \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} y_k$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 2.

▷ *Résolution sur* $[a, +\infty[$. Pour $x \geqslant a$, (E_a) équivaut à $x^2 - (a+1)x + a = 0$, équation du second degré de discriminant $\Delta = (a+1)^2 - 4a = (a-1)^2$ et de racines a et 1.

▷ *Résolution sur* $]-\infty, a[$. Pour $x < a$, (E_a) équivaut à $x^2 - (a-1)x - a = 0$, équation du second degré de discriminant $\Delta = (a-1)^2 + 4a = (a+1)^2$ et de racines a et -1.

On en déduit la disjonction de cas suivante :

▷ Cas 1 : $a \geqslant 1$. On trouve deux solutions : a et -1.

▷ Cas 2 : $a \leqslant -1$. On trouve deux solutions : a et 1.

▷ Cas 3 : $-1 < a < 1$. On trouve trois solutions : a, -1 et 1.

COMMENTAIRE
Cette disjonction vient directement de la résolution initiale ; après celle-ci, on voit apparaître que le nombre de solutions dans $[a,+\infty[$ (resp. $]-\infty,a]$) dépend de la position de a par rapport à 1 (resp. -1).

Voir l'énoncé.

SOLUTION 3. Soit $x\in[1,+\infty[$. On effectue une disjonction de cas.

▷ Supposons $x\geqslant 4$. On a

$$\begin{aligned}\sqrt{x-1}\geqslant x-4 &\iff x-1\geqslant (x-4)^2\\ &\iff x^2-9x+17\leqslant 0\\ &\iff \frac{9-\sqrt{13}}{2}\leqslant x\leqslant \frac{9+\sqrt{13}}{2}\\ &\iff 4\leqslant x\leqslant \frac{9+\sqrt{13}}{2}\quad\text{car } \frac{9-\sqrt{13}}{2}<4\end{aligned}$$

▷ Supposons $x<4$. On a alors $\sqrt{x-1}>0>x-4$ donc x est solution de l'inéquation.

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\sqrt{x-1}\geqslant x-4$ est donc l'intervalle $\left[1,\frac{9+\sqrt{13}}{2}\right]$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 4. En développant le membre de droite, on trouve que l'inégalité est équivalente à

$$|xy-1|\leqslant|x-1|+|y-1|+|x-1||y-1|.$$

On remarque alors que

$$xy-1=(x-1)(y-1)+x-1+y-1,$$

et en appliquant l'inégalité triangulaire

$$|xy-1|\leqslant|x-1)(y-1)|+|x-1|+|y-1|,$$

d'où le résultat.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 5.

1. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$n^2=\left(\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\times\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2\leqslant\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\sum_{i=1}^n\frac{1}{x_i}\right)$$

2. Soit un réel $x>0$. On a $x+\frac{1}{x}-2=\frac{(x-1)^2}{x}\geqslant 0$.

3. On a

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\frac{x_i}{x_j} = \sum_{i=1}^{n}1+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{x_i}{x_j}+\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}\frac{x_i}{x_j} = n+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left(\frac{x_i}{x_j}+\frac{x_j}{x_i}\right)\geqslant n+\binom{n}{2}\times 2 = n+n(n-1) = n^2$$

car le nombre de couple (i,j) appartenant à $[\![1,n]\!]^2$ et vérifiant $i<j$ est $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$.

Voir l'énoncé.

Solution 6.

1. On remarque par exemple que $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(x)=1-\dfrac{1}{1+x}$.

2. Comme f est croissante et $|x+y|\leqslant|x|+|y|$, on a

$$f(x+y)=f(|x+y|)\leqslant f(|x|+|y|)=\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}=\frac{|x|}{1+|x|+|y|}+\frac{|y|}{1+|x|+|y|}\leqslant\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}$$

Voir l'énoncé.

Solution 7.

1. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ et $\beta_1,\dots,\beta_n$ des réels strictement positifs.
Soit $k\in[\![1,n]\!]$, on a

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)\leqslant\frac{\alpha_k}{\beta_k}\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)$$

d'où, puisque $\beta_k>0$,

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)\cdot\beta_k\leqslant\alpha_k\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)\cdot\beta_k$$

En sommant ces inégalités pour $k\in[\![1,n]\!]$, on obtient :

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{n}\beta_k\right)$$

Comme $\beta_1+\cdots+\beta_n>0$, on a

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)\leqslant\frac{\alpha_1+\cdots+\alpha_n}{\beta_1+\cdots+\beta_n}\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left(\frac{\alpha_j}{\beta_j}\right)$$

2. Soient $m\in\mathbb{N}$, $\mathrm{P}(\mathrm{X})=p_m\mathrm{X}^m+\cdots+p_1\mathrm{X}+p_0$ un polynôme à coefficients strictement positifs et $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $0<x\leqslant y$. Puisque $p_kx^k>0$ et $p_ky^k>0$ pour tout $k\in[\![0,m]\!]$, on déduit du a) que

$$\min_{0\leqslant k\leqslant m}\left(\frac{p_kx^k}{p_ky^k}\right)\leqslant\frac{p_mx^m+\cdots+p_1x+p_0}{p_my^m+\cdots+p_1y+p_0}\leqslant\max_{0\leqslant k\leqslant m}\left(\frac{p_kx^k}{p_ky^k}\right)$$

ie

$$\min_{0\leqslant k\leqslant m}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^k\right)\leqslant\frac{p_mx^m+\cdots+p_1x+p_0}{p_my^m+\cdots+p_1y+p_0}\leqslant\max_{0\leqslant k\leqslant m}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^k\right)$$

Comme $0 < x/y \leqslant 1$,

$$\min_{0\leqslant k\leqslant m}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^k\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^m \quad \text{et} \quad \max_{0\leqslant k\leqslant m}\left(\left(\frac{x}{y}\right)^k\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^0 = 1$$

Ainsi

$$\left(\frac{x}{y}\right)^m \leqslant \frac{\mathrm{P}(x)}{\mathrm{P}(y)} \leqslant 1$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 8.

1. a. Soit $k \geqslant 2$. On a $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} \geqslant \frac{1}{k^2}$ car $k^2 > k(k-1) > 0$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, après télescopage :

$$\ln \pi_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \leqslant \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n}$$

d'où $\ln p_n \leqslant 2$ puis $\pi_n \leqslant e^2$ par croissance du logarithme.

2. a. Soit $k \geqslant 2$. On a

$$\frac{k^2}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{1-\frac{1}{k^2}} \quad \text{et} \quad \left(1+\frac{1}{k^2}\right)\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = 1 - \frac{1}{k^4} < 1$$

d'où $1 + \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{k^2}{(k-1)(k+1)}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, après télescopage :

$$\pi_n = \prod_{k=1}^n \ln\left(1+\frac{1}{k^2}\right) \leqslant 2\prod_{k=2}^n \frac{k\times k}{(k-1)(k+1)} = 2\times\frac{n}{1}\times\frac{2}{n+1} = 4\frac{n}{n+1}$$

d'où $p_n \leqslant 4$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 9.

1. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}(a_k b_\ell - a_\ell b_k)^2 &= \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}\left(a_k^2 b_\ell^2 + a_\ell^2 b_k^2 - 2a_k a_\ell b_k b_\ell\right) = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} a_k^2 b_\ell^2 - \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} a_k b_k a_\ell b_\ell \\ &= \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2\end{aligned}$$

Comme une somme de carrés de nombres réels est strictement positive, on déduit de cette relation que

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) - \left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 \geqslant 0$$

On retrouve ainsi l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

2. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}\mu^k \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} k}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} \mu^{2k}} = \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}\sqrt{\mu^2\frac{1-\mu^{2n}}{1-\mu^2}} \leqslant \sqrt{\frac{(n+1)^2}{2}}\sqrt{\frac{1}{1-\mu^2}} = \frac{n+1}{\sqrt{2}\sqrt{1-\mu^2}}$$

3. a. En utilisant les notations de l'énoncé et en remarquant que $\Delta_0 = 0$, on a

$$\delta := \sum_{i=1}^{n} a_i(b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i(\Delta_i - \Delta_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_i\Delta_i - \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1}\Delta_i = a_n\Delta_n + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1})\Delta_i$$

Comme Δ_i et $a_i - a_{i+1}$ sont positifs pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ ainsi que a_n et Δ_n, on en déduit que $\delta \geqslant 0$ d'où $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$.

b. Par la question précédente et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \quad (\star)$$

▷ Si $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} = 0$, alors l'inégalité à démontrer est triviale.

▷ Sinon, en divisant par $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$ dans $(\star)$ on obtient $\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_i^2} \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_i^2}$ d'où $\sum_{k=1}^{n} a_i^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} b_i^2$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 10.

1. On a $\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |a_i a_j|$ d'où

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2 - 2\sum_{i=1}^{n} a_i^2 = -\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |a_i a_j| \geqslant -\sum_{i=1}^{n} a_i^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j = -\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = 0$$

d'où $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|\right)^2$.

2. On a $\sum_{i=1}^{n} (b_i - \mu) = n\mu - n\mu = 0$ d'où par la première question :

$$n\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} (b_i - \mu)^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} |b_i - \mu|\right)^2 = \frac{(n\sigma')^2}{2}$$

Ainsi $\sigma \leqslant \sqrt{\frac{n}{2}}\sigma'$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 11.

1. On a $x + y - 2 = x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2-2x+1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geqslant 0$.

2. On a $xy + 1 - (x + y) = (x-1)(y-1) \leqslant 0$ car $x \leqslant 1 \leqslant y$.

3. ▷ Démontrons par l'absurde que $a_1 \leqslant 1 \leqslant a_n$.

† Supposons que $a_1 > 1$. On a alors $1 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ d'où $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n > 1$. C'est absurde.

† Supposons que $a_n < 1$. On a alors $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n < 1$ d'où $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n < 1$. C'est absurde.

▷ Puisque $0 \leqslant a_1 \leqslant 1 \leqslant a_n$, on déduit du 2. que $a_1 + a_n \geqslant a_1 a_n + 1$.

4. Raisonnons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, notons HR($n$) la propriété suivante :

$$\forall (a_1, \ldots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^2\,,\ \ a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 1 \implies a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n$$

▷ HR(2) a été démontrée au 2.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $n \geqslant 2$ et HR(n) vraie. Soit a_1, …, a_{n+1} dans $\mathbb{R}_+$ tels que $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_{n+1} = 1$. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $a_1 \leqslant \cdots \leqslant a_{n+1}$. Par le 3., on a $a_1 + a_{n+1} \geqslant 1 + a_1 a_{n+1}$. Comme $a_1 \times \cdots \times a_n \times a_1 a_{n+1} = 1$, on déduit de HR($n$) que $a_2 + \cdots + a_n + a_1 a_{n+1} \geqslant n$ d'où

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=2}^{n} a_i\right) + a_1 + a_{n+1} \geqslant \left(\sum_{i=2}^{n} a_i\right) + 1 + a_1 a_{n+1} \geqslant n+1$$

d'où HR($n+1$).

5. L'inégalité arithmético-géométrique est évidente lorsque $n = 1$ ou si l'un des x_i est nul. Supposons $n \geqslant 2$ et soit x_1, …, x_n dans $\mathbb{R}_+^*$. En appliquant le 4. aux $a_i := \frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ (dont le produit vaut clairement 1), on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}} \sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n\,, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 12. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} \times \frac{\sqrt{k}}{n-k}\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} k \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2} = \frac{n(n-1)}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{(n-k)^2}$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 13.

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et x, y dans $\mathbb{R}_+^*$. On a $(x+y)\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right) - (a+b)^2 = a^2\frac{y}{x} + b^2\frac{x}{y} - 2ab$. On a

$$a^2\frac{y}{x} + b^2\frac{x}{y} \geqslant 2\sqrt{\frac{a^2 y b^2 x}{xy}} = 2|ab| \geqslant 2ab \quad \text{(inégalité arithmético-géométrique)}$$

d'où $(a+b)^2 \leqslant (x+y)\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}\right)$.

2. On raisonne par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note HR(n) la proposition suivante : pour tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et tous réels strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$, on a

$$\frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + \cdots + x_n} \leqslant \frac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n}$$

- ▷ HR(1) est clairement vraie.
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons HR(n) vraie. Soit $(a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et des réels strictement positifs $x_1, \dots, x_{n+1}$. Par application de l'inégalité de la question 2 puis de HR(n), on obtient :

$$\frac{(a_1 + \cdots + a_{n+1})^2}{x_1 + \cdots + x_{n+1}} \leqslant \frac{(a_1 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + \cdots + x_n} + \frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}} \leqslant \frac{a_1^2}{x_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{x_n} + \frac{a_{n+1}^2}{x_{n+1}}$$

  d'où HR($n+1$).

3. Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ des réels. Supposons dans un premier temps que les α_i sont tous non nuls. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, posons $x_i = \alpha_i^2$ et $a_i = \alpha_i\beta_i$. On déduit de la question précédente que

$$\frac{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \leqslant \sum_{i=1}^n \beta_i^2$$

d'où l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Revenons au cas général : en notant I l'ensemble des indices i tel que $\alpha_i \neq 0$, on obtient par ce qui précède :

$$\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i\right)^2 = \sum_{i\in I} \alpha_i\beta_i \leqslant \sum_{i\in I} \beta_i^2 \sum_{i\in I} \alpha_i^2 \leqslant \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 14.

1. Il suffit d'appliquer l'inégalité AG à $x = \dfrac{B}{A} a_k^2$ et $y = \dfrac{A}{2B} b_k^2$.

2. On peut supposer les a_i non tous nuls ainsi que les b_i non tous nuls (l'inégalité de Cauchy-Schwarz est évidente dans le cas contraire). Soit $A > 0$ et $B > 0$. En sommant les inégalités de la question précédente, on aboutit à

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{B}{A}\sum_{i=1}^n a_i^2 + \frac{A}{B}\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

En choisissant $A := \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} > 0$ et $B := \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2} > 0$, on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 15. Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) := \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x+1) &= \left\lfloor \frac{x+1+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{x}{2} + 1 \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 \\ &= g(x) \end{aligned}$$

Il suffit donc de prouver que g est nulle sur $[0, 1[$. Soit $x \in [0, 1[$. On a $\frac{x}{2}$ et $\frac{x+1}{2}$ dans $[0, 1[$, d'où $g(x) = 0$.

Variante
On peut aussi écrire $x = n+\theta$ où $n := \lfloor x \rfloor$ et $\theta \in [0,1[$. On a $\frac{x}{2} = \frac{n}{2} + \frac{\theta}{2}$ et $\frac{x+1}{2} = \frac{n}{2} + \frac{\theta+1}{2}$ d'où

$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \begin{cases} \frac{n}{2} + \frac{n}{2} = n & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{n-1}{2} + \frac{n+1}{2} = n & \text{sinon} \end{cases}$$

Voir l'énoncé.

Solution 16. Posons, pour tout réel x, $f(x) := \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$.

▷ La fonction f est 1-périodique car, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f(x+1) &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx+n \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor + n}{n} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + 1 \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

▷ Soit alors $x \in [0,1[$. On a $\lfloor x \rfloor = 0$ et $nx \in [0,n[$ d'où $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \in [0,1[$ et donc $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$ et finalement $f(x) = 0$.

▷ La fonction f est 1-périodique et nulle sur $[0,1[$, elle est donc nulle sur $\mathbb{R}$.

Variante
On peut aussi écrire $x = k+\theta$ avec $k := \lfloor x \rfloor$ et $\theta \in [0,1[$. On a alors $nx = kn + n\theta$ donc $\lfloor nx \rfloor = kn + \lfloor n\theta \rfloor$ et $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} = k + \frac{\lfloor n\theta \rfloor}{n}$. Mais puisque $n\theta \in [0,n[$, on a $\frac{\lfloor n\theta \rfloor}{n} \in [0,1[$ d'où $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = k = \lfloor x \rfloor$.

Voir l'énoncé.

Solution 17.

▷ A est non vide et minoré par 0 donc admet une borne inférieure. Comme $\frac{\sqrt{n}+1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $\inf \mathrm{A} = 0$.

▷ Comme $\frac{1+m}{1+\sqrt{m}} \xrightarrow[m\to+\infty]{} +\infty$, A n'admet pas de borne supérieure.

Voir l'énoncé.

Solution 18. L'ensemble A est une partie non vide de $\mathbb{R}$ minorée par 0 donc $\inf \mathrm{A}$ existe d'après la propriété de la borne inférieure. Pour $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^n$, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \times \frac{1}{\sqrt{x_k}} \leqslant (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)$$

avec égalité pour $(x_1, \ldots, x_n) = (1, \ldots, 1)$. Ainsi $\inf \mathrm{A} = n$ (c'est même un minimum).

Voir l'énoncé.

Solution 19.

▷ Pour tout $(a,b) \in A \times B$, $\inf A \leqslant a \leqslant \sup A$ et $\inf B \leqslant b \leqslant \sup B$, d'où $\inf A + \inf B \leqslant a+b \leqslant \sup A + \sup B$, ce qui montre que $A+B$ est bornée et $\inf A + \inf B \leqslant \inf(A+B)$ et $\sup A + \sup B \geqslant \sup(A+B)$.

▷ Il nous reste à voir que ces deux inégalités sont des égalités. En voici trois démonstrations :

† Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\sup A - \frac{\varepsilon}{2}$ n'est pas un majorant de A, il existe $a \in A$ tel que $a > \sup A - \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ De même, il existe $b \in B$ tel que $b > \sup B - \frac{\varepsilon}{2}\cdot$ Ainsi $a+b > \sup A + \sup B - \varepsilon$. En particulier $\sup A + \sup B - \varepsilon \leqslant \sup(A+B)$ pour tout $\varepsilon > 0$, d'où $\sup(A+B) \leqslant \sup A + \sup B$ puis $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ par le premier point.

† Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites maximisantes de A et B. Comme $a_n + b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sup A + \sup B$, on déduit du premier point que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$. On raisonne de même pour la borne inférieure.

† Soit $(a,b) \in A \times B$. On a $a+b \leqslant \sup(A+B)$. Ainsi $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ b \leqslant \sup(A+B) - a$. On en déduit que pour tout $a \in A$, $\sup B \leqslant \sup(A+B) - a$, ie $\forall a \in A,\ a \leqslant \sup(A+B) - \sup B$ d'où $\sup A \leqslant \sup(A+B) - \sup B$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 20. Soit $x \in A \cup B$. Alors, puisque $x \in A$ ou $x \in B$, on a $x \leqslant \max(\sup A, \sup B)$. Ainsi $A \cup B$ est majoré et $\sup(A\cup B) \leqslant \max(\sup A, \sup B)$. De plus, puisque A et B sont inclus dans $A \cup B$, $\sup A \leqslant \sup(A \cup B)$ et $\sup B \leqslant \sup(A\cup B)$. Ainsi $\sup(A\cup B) \geqslant \max(\sup A, \sup B)$ et finalement $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$. On prouve sans peine selon le même schéma la formule $\inf(A\cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 21. Pour $y \in \mathbb{R}$, on pose $\Omega_y := \{f(x)\,;\, x \leqslant y\}$.

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme $f(y) \in \Omega_y$, l'ensemble Ω_y est non vide, il est de plus majoré car f est majorée. Ainsi $f^*(y)$ existe par la propriété de la borne supérieure.

2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{\pi}{2} + n\pi \leqslant y$, on a $f^*(y) = 1$. Ainsi $\sin^*$ est la fonction constante égale à 1.

3. Pour $y \in \mathbb{R}$ et $x \leqslant y$, on a $f(x) \leqslant f(y)$ d'où $f^*(y) = f(y)$. Ainsi $f^* = f$.

4. Soit $(y,y') \in \mathbb{R}^2$ tel que $y < y'$. Comme $\Omega_y \subset \Omega_{y'}$, on a $f(y) \leqslant f(y')$. La fonction f^* est croissante.

5. Soit $y \in \mathbb{R}$ et $x \leqslant y$. Comme $(f+g)(x) = f(x)+g(x) \leqslant f^*(y)+g^*(y)$, on a $(f+g)^*(y) \leqslant f^*(y)+g^*(y)$. Ainsi $(f+g)^* \leqslant f^* + g^*$. Il n'y a pas égalité de façon universelle : pour $f := \sin$ et $g := -f$, on a $(f+g)^* = 0$ alors que $f^* = g^* = 1$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 22. Comme A et B sont non vides, il existe $(a_0, b_0) \in A \times B$.

▷ Puisque A est non vide et majorée par b_0, A admet une borne supérieure. De même B est non vide et minorée par a_0 donc admet une borne inférieure.

▷ Soit $a \in A$. Comme $\forall b \in B,\ a \leqslant b$, on a $a \leqslant \inf B$. Puisque cette dernière inégalité est vérifiée pour tout $a \in A$, on a $\sup A \leqslant \inf B$.

▷ Raisonnons par l'absurde en supposant que $\sup A < \inf B$. Posons $\varepsilon := \inf B - \sup A$ Il existe $(a,b) \in A \times B$ tel que $b - a < \varepsilon$. Ceci est absurde car $b - a \geqslant \inf B - \sup A = \varepsilon$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 23.

1. ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\forall y \in \mathbb{R},\ f(x,y) \leqslant \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)$ d'où $\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) \leqslant \inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)$.

▷ Puisque cette dernière inégalité est valable pour tout réel x, on en déduit que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) \leqslant \inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)$$

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) := e^{-(x-y)^2}$.

▷ On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $\inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) = 0$ d'où $\sup_{x\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) = 0$.

▷ On a, pour $y \in \mathbb{R}$, $\sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y) = 1$ d'où $\inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) = 1$.

Ainsi $\sup_{x\in\mathbb{R}} \inf_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) < \inf_{y\in\mathbb{R}} \sup_{x\in\mathbb{R}} f(x,y)$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 24.

1. L'ensemble Ω est une partie de $\mathbb{R}$ non vide (enne contient 2) et minorée par -2 : elle admet donc une borne inférieure.

2. ▷ Soit $(a,b,a',b') \in \mathbb{Z}^4$ tels que $a+\sqrt{2}b = a'+\sqrt{2}b'$. On a alors $\sqrt{2}(b'-b) = a-a'$. Ceci impose que $b' = b$ car sinon on en déduirait que $\sqrt{2}$ serait rationnel. Ainsi $b' =' b$ puis $a' = a$. Ceci justifie l'unicité de (a_n, b_n) tel que $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = a_n + \sqrt{2}b_n$.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. On déduit de la formule du binôme que :

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}-1\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k (-1)^{n-k} = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} 2^k (-1)^{n-2k} + \sqrt{2} \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \binom{n}{2k+1} 2^k (-1)^{n-2k-1} \\ &= a_n + \sqrt{2}b_n\end{aligned}$$

avec $a_n := \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} 2^k (-1)^{n-2k} \in \mathbb{Z}$ et $b_n := \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \binom{n}{2k+1} 2^k (-1)^{n-2k-1} \in \mathbb{Z}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{cases} a_n &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n} \binom{n}{2k} 2^k (-1)^{n-2k} = \binom{n}{0} 2^0 (-1)^n = 1\,[2] \\ b_n &= \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n} \binom{n}{2k+1} 2^k (-1)^{n-2k-1} = \binom{n}{1} 2^0 (-1)^{n-1} = n\,[2] \end{cases}$$

Ainsi a_n est impair et b_n a la même parité que n.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $u_n := \left(\sqrt{2}-1\right)^n$. Puisque a_{2n+1} est impair, on a

$$\cos\left(\sqrt{2}b_{2n+1}\pi\right) = \cos(\pi u_{2n+1} - \pi a_{2n+1}) = -\cos(\pi u_{2n+1})$$

Comme $0 < \sqrt{2}-1 < 1$, on a $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ d'où $-\cos(\pi u_{2n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$ par continuité du cosinus en 0. Ainsi $\cos\left(\sqrt{2}b_{2n+1}\pi\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\cos(b_{2n+1}\pi) + \cos\left(\sqrt{2}b_{2n+1}\pi\right) \in \Omega$. De plus, $\cos(b_{2n+1}\pi) = -1$ car b_{2n+1} est impair. Ainsi $\cos(b_{2n+1}\pi) + \cos\left(\sqrt{2}b_{2n+1}\pi\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -2$. Puisque -2 est un minorant de Ω, on en déduit que $\inf \Omega = -2$.

Voir l'énoncé.

Solution 25.

1. Soit $x \in \mathrm{A}$. On a d'abors $-1 \leqslant x \leqslant 1$ donc, par croissance de f, $-1 < f(-1) \leqslant f(x) \leqslant f(1) < 1$ d'où $f(x) \in [-1, 1]$. Comme $f(x) \geqslant x$ et f croissante, on a $f(f(x)) \geqslant f(x)$ et donc $f(x) \in \mathrm{A}$. Ainsi, A est stable par f.

2. ▷ On a $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}$.

▷ Comme $f(-1) > -1$, $-1 \in \mathrm{A}$ donc $\mathrm{A} \neq \varnothing$.

▷ Comme $\mathrm{A} \subset [-1, 1]$, A est majorée.

Ainsi, A admet une borne supérieure d'après la propriété de la borne supérieure.

3. Comme $x_0 = \sup(\mathrm{A})$, il existe $(a_n) \in \mathrm{A}^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x_0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $f(a_n) \geqslant a_n$. De plus, $x_0 \geqslant a_n$ et donc, par croissance de f, $f(x_0) \geqslant f(a_n)$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_0) \geqslant a_n$. On en déduit par passage à la limite que $f(x_0) \geqslant x_0$. Ainsi $x_0 \in \mathrm{A}$.

4. Comme $x_0 \in \mathrm{A}$, on déduit du a) que $f(x_0) \in \mathrm{A}$ et donc que $f(x_0) \leqslant \sup(\mathrm{A}) = x_0$. Comme $f(x_0) \geqslant x_0$, on en déduit que $f(x_0) = x_0$.

Voir l'énoncé.