Exercices 4 | Sommes, produits et coefficients binomiaux

Une certaine aisance calculatoire avec les sommes et les produits est nécessaire au mathématicien débutant. Nous étudierons à cette occasion les coefficients binomiaux (sans insister sur les aspects combinatoires) et reviendrons sur les relations trigonométriques usuelles.

I. Techniques de calcul

EXERCICE 1. **IND § SOL** *Élémentaire*

Démontrer que $\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = (-1)^n \dfrac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

EXERCICE 2. **IND § SOL** ♪ *Sommes en vrac*

Simplifier les sommes pour $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k$; **2.** $\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{n+1-k}\right)$; **3.** $\sum_{k=2}^{n}\ln\left(\dfrac{k^2-1}{k^2}\right)$; **4.** $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k}{(k+1)!}$.

EXERCICE 3. **IND § SOL** ♪ *Majoration d'une somme double*

1. Démontrer que $\forall x \in]1,+\infty[,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{x^k} \leqslant \dfrac{x}{x-1}$.

2. En déduire un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{0\leqslant i,j\leqslant n} 2^{-i}3^{-j} \leqslant \mathrm{M}$.

EXERCICE 4. **IND § SOL** ♫ *Sommes partielles de la série harmonique alternée*

Démontrer de deux manières que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{2n}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$.

EXERCICE 5. **IND § SOL** ♫ *Une autre preuve de l'inégalité AG*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on pose $\mathrm{A}_k = \dfrac{a_1+\cdots+a_k}{k}$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^n \geqslant 1+n(x-1)$.

2. En déduire que $\forall k \in [\![2,n]\!],\ \dfrac{\mathrm{A}_k^k}{\mathrm{A}_{k-1}^{k-1}} \geqslant x_k$.

3. Établir l'inégalité AG générale : $\dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{x_1\cdots x_n}$.

EXERCICE 6. **IND § SOL** ♫ *Minoration d'un produit*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ de réels strictement positifs.

1. Justifier que $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{n-1}$. INDICATION : commencer par calculer $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_i a_j$.

2. En déduire, en utilisant l'inégalité AG, que $\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i+a_j) \geqslant \left(2^n \prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{n-1}{2}}$.

EXERCICE 7. IND § SOL ♪♪♪ *Formule d'Abel et deux applications*

Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels. Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose $S_n=\sum_{k=0}^{n} a_kb_k$, $A_n=\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $B_n=\sum_{k=0}^{n} b_k$.

1. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n=a_nB_n+\sum_{k=0}^{n-1}(a_k-a_{k+1})B_k$.

2. On suppose dans cette question que la suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$ est décroissante, à termes positifs et qu'il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|B_n|\leqslant M$. Établir que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|S_n|\leqslant Ma_0$.

3. Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $x\neq 0\,[2\pi]$. Montrer que $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant\dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$ puis $\left|\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}\right|\leqslant\dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$.

4. Une autre application de la première question : simplifier de $\sum_{k=0}^{n} k2^k$.

II. Sommes trigonométriques

EXERCICE 8. IND § SOL *Sommes binomiales*

Calculer les sommes suivantes pour $n\in\mathbb{N}$ et $(\theta,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}$:

1. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{kx}$; **2.** $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$; **3.** $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$.

EXERCICE 9. IND § SOL ♪ *Sommes trigonométriques*

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$, simplifier les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}\cos\left(\dfrac{k\pi}{3}\right)$; **2.** $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}\cos^k\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$; **3.** $\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^k}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2^k}\right)$; **4.** $\sum_{k=-n}^{n}e^{ik\theta}$.

EXERCICE 10. IND § SOL ♪♪ *Polynômes de Tchebychev*

Montrer qu'il existe un polynôme réel T_n tel que $\forall t\in\mathbb{R}$, $\cos(nt)=T_n(\cos t)$.

EXERCICE 11. IND § SOL ♪♪ *Une généralisation*

Soit $n\geqslant 1$. Simplifier la somme $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}\cos\left(\dfrac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right)$.

EXERCICE 12. IND § SOL ♪♪ *Posé à Centrale*

On pose pour $x \neq \pi/2\,[\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$. Simplifier $\mathrm{S}_n(x)$ puis résoudre $\mathrm{S}_n(x) = 0$.

EXERCICE 13. **IND § SOL** ♪♪♪ *Sommes de 3 en 3*

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{S}_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$, $\quad \mathrm{S}_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+1}$ et $\mathrm{S}_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{3n}{3k+2}$

1. Calculer $\mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 + \mathrm{S}_3$ et $\mathrm{S}_1 + j\mathrm{S}_2 + j^2\mathrm{S}_3$.

2. En déduire les valeurs de S_1, S_2 et S_3.

III. Sommes doubles

EXERCICE 14. **IND § SOL** *Une intervertion*

Démontrer l'égalité $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}-1} \sum_{k=n+1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \frac{(-1)^k}{k}$.

EXERCICE 15. **IND § SOL** ♪ *B.A.BA*

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \max(i,j)$; **2.** $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$; **3.** $\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} |i-j|$; **4.** $\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} i$;

EXERCICE 16. **IND § SOL** ♪ *Pascal*

Pour un entier naturel n non nul, simplifier la somme $\sum_{0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \binom{j}{i}$.

EXERCICE 17. **IND § SOL** ♪♪ *Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \ldots, z_n$ dans $\mathbb{C}^*$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note $z_k = \rho_k e^{i\theta_k}$ avec $(\rho_k, \theta_k) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

1. Établir que $\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right|^2 = \sum_{1 \leqslant k,\ell \leqslant n} \rho_k \rho_\ell \cos(\theta_k - \theta_\ell)$.

2. En déduire une CNS pour que $\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$. On donnera une interprétation géométrique.

EXERCICE 18. **IND § SOL** ♪♪ *Autour des sommes harmoniques*

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{H}_k := \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell}$.

1. Démontrer que $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{H}_k = n\mathrm{H}_n - n$ *sans raisonner par récurrence.*

2. Calculer $\nu_n := \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \frac{1}{j-i}$ en fonction de n et H_n.

3. Calculer $\mu_n := \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{H}_k$ en fonction de n et H_n.

EXERCICE 19. **IND § SOL** ♪♪♪ *Une identité polynomiale*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$ et $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

Montrer que $s(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(z+\omega^k\right)^n = n\left(z^n+1\right)$. En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 0$.

EXERCICE 20. **IND § SOL** ♪♪♪ *Sommes de Gauss*

Soit n un entier naturel impair. On pose $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ et $\mathrm{G} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}$.

1. Soit $r \in \mathbb{Z}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{rk}$ en fonction de r.

2. Montrer que l'application $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, définie par $\phi(k) = \omega^{k^2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, est n-périodique.

3. Soit $j \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+j)^2} = \mathrm{G}$.

4. Montrer que $\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}} = n$ et en déduire $|\mathrm{G}|$.

IV. Produits

EXERCICE 21. **IND § SOL** *Un produit de sommes*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\prod_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p} 2^{kp!}$.

EXERCICE 22. **IND § SOL** *Des complexes*

Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier $z_n := \prod_{\ell=0}^{n} \frac{1+\ell(\ell+1)+i}{1+\ell(\ell+1)-i}$ en remarquant que $\forall x \in \mathbb{R}$, $1+x(x+1)+i = (x+1-i)(x+i)$.

EXERCICE 23. **IND § SOL** ♪ *Produits en cascade*

Calculer les produits suivants :

1. $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$; **2.** $\displaystyle\prod_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} ij$; **3.** $\displaystyle\prod_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij$; **4.** $\displaystyle\prod_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} ij$; **5.** $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} ij$.

EXERCICE 24. **IND** § **SOL** ♪ *Une simplification*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Simplifier $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^j$.

EXERCICE 25. **IND** § **SOL** ♪ *Calcul d'un produit infini*

Pour tout $n\geqslant 2$, on pose $u_n=\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3-1}{k^3+1}$.

1. Trouver une suite d'entiers relatifs $(v_k)_{k\geqslant 1}$ telle que $\forall k\geqslant 2,\ \frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{v_k}{v_{k-1}}$.

2. En déduire une simplification de u_n puis le comportement de u_n lorsque n tend vers l'infini.

EXERCICE 26. **IND** § **SOL** ♪ *Calcul d'un produit trigonométrique*

Soit $a\in\,]0,\pi[$. Simplifier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$. On pourra, pour $x\neq 0\,[\pi]$, considérer $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)}$.

EXERCICE 27. **IND** § **SOL** ♪ *Extrait des écrits de Centrale PC 2024*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $z_1,\ldots,z_n$ dans $\mathbb{C}$. Démontrer que $\displaystyle\left|\prod_{k=1}^{n}(1+z_k)-1\right|\leqslant\prod_{k=1}^{n}\big(1+|z_k|\big)-1$.

EXERCICE 28. **IND** § **SOL** ♪♪ *Des produits*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Exprimer le produit $\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=n+1}}\sqrt{ij}$ au moyen de la factorielle.

2. Vérifier que $\forall (i,j)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ i+j-1\leqslant ij\leqslant\left(\dfrac{i+j}{2}\right)^2$.

3. En déduire que $n^{\frac{n}{2}}\leqslant n!\leqslant\left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$.

EXERCICE 29. **IND** § **SOL** ♪♪ *Produit des coefficients binomiaux*

On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n=\left(\dbinom{n}{0}\dbinom{n}{1}\cdots\dbinom{n}{n}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}$.

1. Montrer que $\displaystyle\prod_{p=0}^{n}p!=\prod_{p=1}^{n}p^{n-p+1}$ et en déduire que $\displaystyle\prod_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=\prod_{k=1}^{n}k^{2k-n-1}$.

2. Montrer que $\ln(u_n)=\displaystyle\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)\left(\ln\left(\frac{k}{n+1}\right)-1\right)$.

V. Coefficients binomiaux

Exercice 30. IND § SOL ♪ *Une curiosité binomiale*

Observez bien :

$$(1+\sqrt{2}) = \sqrt{1}+\sqrt{2};\ \ (1+\sqrt{2})^2 = 3+2\sqrt{2} = \sqrt{8}+\sqrt{9};\ \ (1+\sqrt{2})^3 = 7+5\sqrt{2} = \sqrt{49}+\sqrt{50}$$

Le but de l'exercice est de généraliser, de montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier naturel α_n tel que $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\alpha_n+1}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer qu'il existe deux entiers naturels a_n et b_n tels que :

$$\begin{cases} (1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2} \\ (1-\sqrt{2})^n = a_n - b_n\sqrt{2} \end{cases}$$

2. Établir alors que $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$, et en déduire le résultat attendu.

Exercice 31. IND § SOL ♪ *Des entiers cachés*

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n + \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2} \in \mathbb{N}$.

Exercice 32. IND § SOL ♪ *Une relation méconnue*

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^p \binom{n-1}{p}$.

Exercice 33. IND § SOL ♪ *Réveil binomial*

On pose $\mathrm{U}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}(-1)^k$ et $\mathrm{V}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}(-1)^k$. Simplifier $\mathrm{U}_n + i\mathrm{V}_n$ puis U_n et V_n.

Exercice 34. IND § SOL ♪♪ *Simplification d'une somme*

Simplifier la somme $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant n} (-3)^k \binom{n}{2k}$.

Exercice 35. IND § SOL ♪♪ *Formule de Vandermonde généralisée et une application*

1. Soient n, m et p trois entiers naturels, avec $p \leqslant m+n$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p}$.

On pourra considérer le polynôme $(1+x)^{m+n}$.

2. Dans cette question, n est un entier fixé, supérieur ou égal à 1.

a. Établir que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}^2 = n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k}\binom{n}{n-1-k}$.

b. En déduire une simplification de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$.

EXERCICE 36. IND § SOL ♪♪♪ *Formule d'inversion de Pascal*

1. Soit $(p,n)\in\mathbb{N}^2$ avec $p\leqslant n$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{p}=\begin{cases}0 \text{ si } p<n\\ 1 \text{ si } p=n\end{cases}$

2. Soit (u_n) et (v_n) des suites telles que $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_k$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}v_k$.

EXERCICE 37. IND § SOL ♪♪♪ *Les fondamentaux*

Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$ tel que $p\leqslant n$.

1. En utilisant le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X})=(1+\mathrm{X})^n$, calculer les sommes suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$; **b.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$; **c.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$; **d.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

2. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$;

3. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$ au moyen du triangle de Pascal.

VI. Indications

Indication 1. Raisonner par récurrence.

Voir l'énoncé.

Indication 2. En regroupant judicieusement les termes au 1., on trouve n. On trouve 0 au 2. Télescopage au 3. (décomposer le log en factorisant l'expression). Télescopage à nouveau au 4., on trouve $1-\dfrac{1}{(n+1)!}$.

Voir l'énoncé.

Indication 3.

Voir l'énoncé.

Indication 4. On peut envisager une récurrence mais on peut également sommer séparément sur les indices pairs et impairs.

Voir l'énoncé.

Indication 5. Étudier une fonction au 1. ou utiliser un argument de convexité.

Voir l'énoncé.

Indication 6.

Voir l'énoncé.

Indication 7. On trouve $2^{n+1}(n-1)+2$ au d. Utiliser des sommes d'exponentielles au c.

Voir l'énoncé.

Indication 8. Appliquer la formule du binôme.

Voir l'énoncé.

Indication 9. Sommes géométriques aux 1., 2. et 4., télescopage au 3.

Voir l'énoncé.

Indication 10. Remarquer que $\cos(nt)=\mathrm{Re}\left(\left(e^{it}\right)^n\right)$. Puis appliquer les formules de De Moivre et du binôme.

Voir l'énoncé.

Indication 11. L'expression est la partie réelle d'une somme géométrique d'exponentielles : après utilisation du formulaire puis passage à l'angle moitié, aboutir à $\mathrm{S}=1/2$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 12. Reconnaître en $S_n(x)$ la partie réelle d'une somme géométrique. Il faudra discuter sur x car la raison en dépend.

Voir l'énoncé.

INDICATION 13. Remarquer que $\forall k \in \mathbb{N},\ j^{3k} = 1, \quad j^{3k+1} = j, \quad j^{3k+2} = j^2$. On trouve $S_1 = \frac{8^n+2(-1)^n}{3},\ S_2 = \frac{8^n-(-1)^n}{3}$ et $S_3 = S_2$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 14. Effectuer une interversion.

Voir l'énoncé.

INDICATION 15. Formulaire au 2. On peut sommer sur les diagonales au 3.

Voir l'énoncé.

INDICATION 16. Sommer dans un ordre faisant apparaître la formule du binôme.

Voir l'énoncé.

INDICATION 17. En revenant à la définition du module, on obtient $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \rho_k\rho_\ell e^{i(\theta_k-\theta_\ell)}$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 18. On écrira σ_n sous la forme d'une somme double et on s'inspirera de la méthode du 1. au 3.

Voir l'énoncé.

INDICATION 19. Développer $\left(z+\omega^k\right)^n$ par la formule du binôme et intervertir les deux signes sommes. Évaluer en une valeur de z bien choisie afin d'obtenir la seconde relation.

Voir l'énoncé.

INDICATION 20.

1. Discuter sur sa raison ω^r afin d'appliquer la formule de la série géométrique. Si $r = 0\,[n]$, la somme vaut n ; sinon, elle vaut 0.
2. Simple vérification : $\forall k \in \mathbb{Z},\ \phi(k+n) = \phi(k)$.
3. On somme *sur une période* (cf. le 1.) donc le résultat est indépendant de j.
4. Partir de

$$G\overline{G} = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k+j)^2}\omega^{-j^2} = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{k^2}\omega^{2kj} = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k^2}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{2kj}$$

Voir l'énoncé.

INDICATION 21. Il y a une somme géométrique.

Voir l'énoncé.

INDICATION 22. Il y a télescopage.

Voir l'énoncé.

INDICATION 23. Les deux premiers produits se calculent directement; trouver des relations entre les différents produits afin de terminer les calculs.

Voir l'énoncé.

INDICATION 24. Remarquer que $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^j = \prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n} i^j$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 25. Appliquer la formule de factorisation de a^3-b^3 au 1. Il y a un télescopage au 2. : on trouve que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2}{3}$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 26. La premère relation est une invitation au télescopage.

Voir l'énoncé.

INDICATION 27. On peut donner une démonstration élémentaire par récurrence. On peut aussi utiliser une formule de développement par distributivité (mais c'est une voie plus technique).

Voir l'énoncé.

INDICATION 28. On trouve $n!$ au 1.

Voir l'énoncé.

INDICATION 29. Écrire la factorielle comme un produit. On peut déduire de cet exercice que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{e}$ mais c'est une autre histoire...

Voir l'énoncé.

INDICATION 30. Au 1., séparer les indices pairs des indices impairs dans la formule du binôme. Au 2., distinguer deux cas selon parité de n.

Voir l'énoncé.

INDICATION 31. Appliquer la formule du binôme et grouper les deux sommes.

Voir l'énoncé.

INDICATION 32. Faire apparaître un télescopage ou raisonner par récurrence.

Voir l'énoncé.

INDICATION 33. Reconnaître en $U_n + iV_n$ la formule du binome.

Voir l'énoncé.

INDICATION 34. Vérifier que $S_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(i\sqrt{3}\right)^k\right)$.

Voir l'énoncé.

INDICATION 35. Adapter le raisonnement vu en cours pour établir la formule de Vandermonde.

Voir l'énoncé.

INDICATION 36. Au 1., simplifier les quotients de factorielles et faire apparaître la formule du binôme. Au 2., on calculera le membre de droite en utilisant l'égalité du 1.

Voir l'énoncé.

INDICATION 37. Développer P au moyen de la formule du binome.

1. **a.** Dériver le polynôme. On trouve $n2^{n-1}$.

b. On trouve $n(n-1)2^{n-2}$.

c. Utiliser 1. et 2. On trouve $n(n+1)2^{n-2}$.

d. On trouve $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ en calculant une intégrale : remarquer que $\dfrac{1}{k+1} = \displaystyle\int_0^1 t^k \mathrm{d}t$.

2. Simplifier le produit des coefficient en revenant aux factorielles. On trouve $2^p\binom{n}{p}$.

3. On *voit* le résultat sur le triangle de Pascal et on peut formaliser par une récurrence sur n ou on exploite un télescopage. On trouve $\dbinom{n+1}{p+1}$.

Voir l'énoncé.

VII. Solutions

SOLUTION 1. Démontrons la formule par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

▷ Pour $n = 1$, les deux expressions valent -1.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la formule vraie au rang n. On a alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 = (-1)^n (n+1)\left(\frac{n}{2} - n - 1\right) = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

d'où la formule au rang $n+1$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 2.

1. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = \sum_{\ell=1}^{n} \left((-1)^{2\ell-1}(2\ell-1) + (-1)^{2\ell} 2\ell\right) = \sum_{\ell=1}^{n} 1 = n.$

2. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{\ell=1}^{n} \frac{1}{\ell} = 0$ en posant $\ell := n+1-k$.

3. On a $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \ln \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \times \frac{k+1}{k} = \ln \frac{n+1}{2n}$ après télescopage.

4. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) = 1 - \frac{1}{(n+1)!}$ par télescopage.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 3.

1. Sous ces hypothèses : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x^k} = \frac{1 - 1/x^{n+1}}{1 - 1/x} \leqslant \frac{1}{1 - 1/x} = \frac{x}{x-1}.$

2. Par le 1., on a $\displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{-i} 3^{-j} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} 2^{-i} \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} 3^{-j} \leqslant \frac{2 \times 3}{1 \times 2} = 3.$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 4.

▷ On a $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Comme

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1} - 1}{k} = \sum_{\ell=1}^{n} \frac{-2}{2\ell} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

on en déduit le résultat.

▷ On peut aussi établir la relation par récurrence.

† La propriété est vraie au rang $n=1$ car $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

† Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la relation vraie au rang n. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2n+2}\frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n+1+k}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n+1+k}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{n+1}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n+1+k}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2} = \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{n+1+k} \quad \text{d'où la relation au rang } n+1\end{aligned}$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 5.

1. Il suffit d'étudier les variations de $x \mapsto x^n-1-n(x-1)$.

2. On applique le 1. à $x=\mathrm{A}_k/\mathrm{A}_{k-1}$ et $n=k$:

$$\frac{\mathrm{A}_k^k}{\mathrm{A}_{k-1}^{k-1}} \geqslant \mathrm{A}_{k-1}\left(1+k\left(\frac{\mathrm{A}_k}{\mathrm{A}_{k-1}}-1\right)\right) = k\mathrm{A}_k-(k-1)\mathrm{A}_{k-1} = x_k$$

3. On obtient l'inégalité AG en multipliant membre à membre les inégalités du 2. pour k variant de 2 à n (il y a télescopage).

Voir l'énoncé.

SOLUTION 6.

1. On a

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_ia_j = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n} a_ia_j = \prod_{i=1}^{n}\left(a_i^n\prod_{j=1}^{n}a_j\right) = \left(\prod_{j=1}^{n}a_j\right)^n\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^n = \left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{2n}$$

Puisque $a_ia_j=a_ja_i$ pour tout i et j dans $[\![1,n]\!]$, on a

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_ia_j = \left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j\right)\left(\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}a_ia_j\right)\left(\prod_{i=1}^{n}a_i^2\right) = \left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j\right)^2\left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^2$$

d'où $\displaystyle\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j = \left(\prod_{i=1}^{n}a_i\right)^{n-1}$.

2. En appliquant l'inégalité AG, on obtient :

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_i+a_j) \geqslant \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}2\sqrt{a_ia_j} = 2^{n(n-1)/2}\sqrt{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j} = \left(2^n\prod_{k=1}^{n}a_k\right)^{\frac{n-1}{2}}$$

car le produit double comporte $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ termes.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 7.

1. Comme $b_k = B_k - B_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k (B_k - B_{k-1}) = a_0 b_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k B_k - \sum_{k=1}^{n} a_k B_{k-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k B_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} B_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \end{aligned}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question précédente et l'inégalité triangulaire, on a :

$$|S_n| \leqslant \underbrace{|a_n B_n|}_{=a_n|B_n|} + \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{|(a_k - a_{k+1}) B_k|}_{=(a_k-a_{k+1})|B_k|} \leqslant a_n M + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) M = a_0 M$$

par décroissance et positivité de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. ▷ Soit $x \neq 0\,[2\pi]$. Comme $e^{ix} \neq 1$, on a en notant $\sigma_n := \sum_{k=0}^{n} (e^{ix})^k$:

$$\sigma_n = \frac{e^{i(n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{inx/2} \frac{\sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \quad \text{et donc} \quad \sum_{k=1}^{n} \sin kx = \mathrm{Im}\,(\sigma_n) = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$$

d'où $\left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| = \frac{\left|\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}\right|}{|\sin \frac{x}{2}|} \leqslant \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$.

▷ D'après le point précédent, on peut appliquer les résultats de la question 2. aux suites définies par $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ b_k = \sin kx$, $a_0 = 1$ et $a_k = \frac{1}{k}$:

$$\forall x \neq 0\,[2\pi]\,, \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k} \right| \leqslant \frac{1}{|\sin\left(\frac{x}{2}\right)|}$$

4. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{m} 2^k = 2^{m+1} - 1$. On déduit de la question 1. que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k2^k &= n\left(2^{n+1} - 1\right) + \sum_{k=0}^{n-1} (k - (k+1))(2^{k+1} - 1) = n\left(2^{n+1} - 1\right) - \sum_{k=0}^{n-1} (2^{k+1} - 1) \\ &= n\left(2^{n+1} - 1\right) - 2 \times (2^n - 1) + n = (n-1)2^{n+1} + 2 \end{aligned}$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 8. On applique la formule du binôme.

1. On a $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kx} = (1 + e^x)^n$.

2. Les deux autres sommes sont les parties réelle et imaginaire de $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ik\theta} = \left(1 + e^{i\theta}\right)^n = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} e^{in\theta/2}$. Ainsi $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta) = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \cos \frac{n\theta}{2} \ldots$

3. ... et $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(k\theta) = 2^n \cos^n \frac{\theta}{2} \sin \frac{n\theta}{2}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 9. Nous noterons à chaque fois S_n la somme considérée.

1. On a $S_n = \text{Re}\left(\sum_{k=1}^{n}(e^{i\pi/3}/2)^k\right) = \text{Re}\left(\frac{e^{i\pi/3}}{2}\frac{1-e^{in\pi/3}/2^n}{1-e^{i\pi/3}/2}\right) = \frac{\sqrt{3}\sin(n\pi/3)}{3\times 2^n}$ car $\frac{e^{i\pi/3}}{2-e^{i\pi/3}} = \frac{i\sqrt{3}}{3}$.

2. La somme S_n est géométrique de raison $\cos(\pi/3)/2 = 1/4$, d'où $S_n = \frac{1}{4}\frac{1-4^{-n}}{3/4} = \frac{1-4^{-n}}{3}$.

3. Par la formule $\sin a \sin b = \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{2}$, on obtient

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{k-1}}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2^{k-2}}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) - \cos(2\pi)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{n-1}}\right) - 1\right)$$

4. La somme S_n est géométrique de raison $e^{i\theta}$.

▷ Cas 1 : $\theta = 0\,[2\pi]$. On a $S_n = 2n+1$.

▷ Cas 2 : $\theta \neq 0\,[2\pi]$. On a $S_n = e^{-in\theta}\frac{e^{i(2n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = \frac{\sin\frac{(2n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 10. Soit (n,t) dans $\mathbb{N}\times\mathbb{R}$. Par la formule de De Moivre, on a $\cos(nt) = \text{Re}\left((e^{it})^n\right)$, et par celle du binôme :

$$\cos(nt) = \text{Re}\left((\cos t + i\sin t)^n\right) = \text{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k\sin^k(t)\cos^{n-k}(t)\right) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}i^{2k}\sin^{2k}(t)\cos^{n-2k}(t)$$
$$= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}(-1)^k\cos^{n-2k}(t)\left(1-\cos^2 t\right)^k$$

Puisque pour tout entier k, $i^k \in \mathbb{R}$ si k est pair et $i^k \in \mathbb{R}i$ sinon. On a donc $\forall t \in \mathbb{R},\ T_n(\cos t) = \cos(nt)$, en posant $T_n(x) := \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}(-1)^k\left(1-x^2\right)^k x^{n-2k}$ pour tout réel x, expression clairement polynomiale en x.

COMMENTAIRE

On peut également prouver l'unicité d'un tel polynôme. On peut aussi rédiger une récurrence, l'hérédité reposant sur la relation

$$\forall (n,t)\in\mathbb{N}\times\mathbb{R},\ \cos((n+1)t) = 2\cos(t)\cos(nt) - \cos((n-1)t)$$

On obtient alors la relation de récurrence $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 11. La somme S_n est la partie réelle de la somme

$$U_n = \sum_{k=0}^{n-1} e^{(2k+1)i\pi/(2n+1)} = e^{i\pi/(2n+1)}\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{2i\pi/(2n+1)}\right)^k = e^{i\pi/(2n++1)}\times\frac{e^{ni\pi/(2n+1)}-1}{e^{2i\pi/(2n+1)}-1}$$
$$= e^{i\pi/(2n+1)}\times\frac{e^{ni\pi/(2n+1)}}{e^{i\pi/(2n+1)}}\times\frac{\sin(n\pi/(2n+1))}{\sin(\pi/(2n+1))} = e^{ni\pi/(2n+1)}\frac{\sin(n\pi/(2n+1))}{\sin(\pi/(2n+1))}$$

car $e^{i\pi/(2n+1)} \neq 1$. Puisque $\frac{2n\pi}{2n+1} + \frac{\pi}{2n+1} = \pi$, on a :

$$S_n = \frac{\cos(n\pi/(2n+1))\sin(n\pi/(2n+1))}{\sin(\pi/(2n+1))} = \frac{\sin(2n\pi/(2n+1))}{2\sin(\pi/(2n+1))} = \frac{1}{2}$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 12.

▷ Si $x = 0\,[\pi]$, alors $S_n(x) = n+1$.

▷ Si $x \neq 0\,[\pi]$ et $x \neq \frac{\pi}{2}\,[\pi]$, on a $\frac{e^{ix}}{\cos x} \neq 1$ et $S_n(x)$ est la partie réelle de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{e^{ix}}{\cos(x)}\right)^k = \frac{e^{i(n+1)x}/\cos^{n+1}x - 1}{e^{ix}/\cos x - 1} = \frac{e^{i(n+1)x} - \cos^{n+1}x}{i\sin x\cos^n x}$$

ainsi $S_n(x) = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x\cos^n x}$.

▷ La somme $S_n(x)$ s'annule lorsque $\sin(n+1)x = 0$ et $\sin x \neq 0$ et $\cos x \neq 0$. C'est-à-dire aux points $\frac{k\pi}{n+1}$ avec $k \in \mathbb{Z}$ non multiple de $n+1$ et vérifiant de plus $k \neq \frac{n+1}{2}\,[n+1]$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 13.

1. D'après la formule du binôme :

$$S_1 + S_2 + S_3 = \sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k} = (1+1)^{3n} = 2^{3n} = 8^n$$

$$S_1 + jS_2 + j^2S_3 = \sum_{k=0}^{3n}\binom{3n}{k}j^k = (1+j)^{3n} = \left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{3n} = (-1)^n$$

car $\forall k \in \mathbb{N},\ j^{3k+1} = \left(j^3\right)^k j = j$ et $j^{3k+2} = \left(j^3\right)^k j^2 = j^2$.

2. Comme les trois sommes sont réelles et $\overline{j} = j^2$, on a $0 = \operatorname{Im}\left(S_1 + jS_2 + j^2S_3\right) = (S_2 - S_3)\operatorname{Im} j$. Puisque $\operatorname{Im} j \neq 0$, on a $S_2 = S_3$. De plus, $(-1)^n = \operatorname{Re}\left(S_1 + jS_2 + j^2S_3\right) = S_1 - S_2$. Sachant que $S_1 + 2S_2 = 8^n$, on en déduit que $S_1 = \frac{8^n + 2(-1)^n}{3}$, $S_3 = S_2 = \frac{8^n - (-1)^n}{3}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 14. On a $\displaystyle\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=n+1}^{N}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{0\leqslant n<k\leqslant N}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k k}{k^2}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 15.

1. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{U}_n &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \max(i,j) + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \max(i,j) + \sum_{i=1}^{n} \max(i,i) = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j + \sum_{i=1}^{n} i \\
&= 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j + \sum_{i=1}^{n} i = 2\sum_{j=2}^{n} j(j-1) + \sum_{i=1}^{n} i = 2\sum_{j=1}^{n} j(j-1) + \sum_{i=1}^{n} i \\
&= 2\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}
\end{aligned}$$

2. C'est immédiat : $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3. On a

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n}(j-i)\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{(n-i)(n-i+1)}{2} = \sum_{i=0}^{n-1}\frac{i(i+1)}{2} = \frac{(n-1)n(2n-1)}{12} + \frac{n(n-1)}{4} = \frac{n(n^2-1)}{6}$$

4. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i &= \sum_{i=1}^{n-1}\left(i\sum_{j=i+1}^{n} 1\right) = \sum_{i=1}^{n-1} i(n-i) = n\sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 \\
&= \frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{n(n-1)(3n-(2n-1))}{6} = \frac{(n+1)n(n-1)}{6}
\end{aligned}$$

Voir l'énoncé.

Solution 16. On a $\displaystyle\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} = \sum_{j=0}^{n} 2^j = 2^{n+1}-1$ (binôme et sommes géométriques).

Voir l'énoncé.

Solution 17.

1. On a

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n}\rho_k e^{i\theta_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\rho_k e^{-i\theta_k}\right) = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}\rho_k\rho_\ell e^{i(\theta_k-\theta_\ell)} \\
&= \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n}\rho_k\rho_\ell\cos(\theta_k-\theta_\ell) \quad \text{(car cette somme est un nombre réel)}
\end{aligned}$$

2. Par la question précédente, on a

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| &\iff \left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \rho_k\right)^2 \\ &\iff \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \rho_k\rho_\ell \cos(\theta_k-\theta_\ell) = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \rho_k\rho_\ell \\ &\iff \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \rho_k\rho_\ell\,(1-\cos(\theta_k-\theta_\ell)) = 0 \\ &\iff \forall (k,\ell)\in [\![1,n]\!]^2,\ \cos(\theta_k-\theta_\ell) = 1 \\ &\iff \forall (k,\ell)\in [\![1,n]\!]^2,\ \theta_k-\theta_\ell = 0\,[2\pi]\end{aligned}$$

La quatrième équivalence estt justifiée par le fait qu'une somme de réels positifs est nulle *si et seulement si* tous ses termes sont nuls (on utilise ici que les ρ_k sont tous strictement positifs). L'interprétation géométrique est claire : l'inégalité triangulaire est une égalité *si et seulement si* les images des nombres complexes sont alignées sur une même demi-droite issue de l'origine.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 18. Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{H}_k := \sum_{\ell=1}^{k}\frac{1}{\ell}$.

1. On a

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{H}_k = \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{\ell=1}^{k}\frac{1}{\ell} = \sum_{1\leqslant\ell\leqslant k\leqslant n-1}\frac{1}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n-1}\sum_{k=\ell}^{n-1}\frac{1}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n-1}\frac{n-\ell}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n}\frac{n-\ell}{\ell} = n\mathrm{H}_n - n$$

2. On a

$$\nu_n = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\frac{1}{j-i} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}\frac{1}{j-i} = \sum_{i=1}^{n-1}\mathrm{H}_{n-i} = \sum_{k=1}^{n-1}\mathrm{H}_k = n\mathrm{H}_n - n \text{ (cf. la question précédente)}$$

3. On a

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{H}_k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k}\frac{k}{\ell} = \sum_{1\leqslant\ell\leqslant k\leqslant n}\frac{k}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=\ell}^{n}\frac{k}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n}\frac{(n+\ell)(n+1-\ell)}{2\ell} = \sum_{\ell=1}^{n}\frac{n(n+1)+\ell-\ell^2}{2\ell} \\ &= \frac{n(n+1)}{2}\mathrm{H}_n + \frac{n}{2} - \frac{n(n+1)}{4} = \frac{n(n+1)}{2}\mathrm{H}_n - \frac{n(n-1)}{4}\end{aligned}$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 19.

1. Deux cas se présentent :

- ▷ Cas 1 : m est un multiple de n. On a $\omega^m = 1$ donc $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{km} = n$.
- ▷ Cas 2 : m n'est pas multiple de n; On a $\omega^m \neq 1$ donc $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{km} = \frac{\omega^{nm}-1}{\omega^m-1} = 0$ car $\omega^n = 1$.

COMMENTAIRE
On a utilisé les équivalences suivantes : $1 = e^{2mi\pi/n} \iff 2\pi m/n = 0[2\pi] \iff m = 0\,[n]$. *La condition* $m = 0\,[n]$ *signifiant que* n *divise* m, *ie* m *est un multiple de* n.

2. Appliquons la formule du binôme :

$$s(z) = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n}\binom{\ell}{n}\omega^{\ell k}z^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{\ell}{n}\omega^{\ell k}z^{\ell} = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{\ell}{n}z^{\ell}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{\ell k} = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{\ell}{n}z^{\ell}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{\ell k} = n\left(z^n+1\right)$$

car, par la question 1., on a $\forall \ell [\![1, n-1]\!]$, $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{\ell k} = 0$ et pour $\ell = 0$ ou n, $\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{\ell k} = n$.

3. Posons $z := e^{i\pi/n}$. Puisque $z+\omega^k = e^{i\pi/n}+e^{2ik\pi/n} = 2\cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right)e^{(2k+1)i\pi/(2n)}$ et $\left(e^{(2k+1)i\pi/(2n)}\right)^n = (-1)^k i$, on déduit du 2. que

$$s(z) = 2^n i\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = n(-1+1) = 0$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) = 0$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 20.

1. Si k est un multiple de n, $\omega^r = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{rk} = n$.

Si k n'est pas un multiple de n, $\omega^r \neq 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{rk} = \frac{1-\omega^{rn}}{1-\omega^r} = 0$.

2. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\phi(k+n) = \omega^{(k+n)^2} = \omega^{k^2}\omega^{2kn}\omega^{n^2} = \omega^{k^2} = \phi(k)$.

3. On a $\mathrm{G} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\phi(k)$. Comme ϕ est n-périodique, la somme reste la même si on somme sur n entiers consécutifs. On a donc $\mathrm{G} = \displaystyle\sum_{k=j}^{j+n-1}\omega^{k^2} = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{(k+j)^2}$.

4. Puisque $\omega \in \mathbb{U}$, $\overline{\omega} = \dfrac{1}{\omega}$. On en déduit que $\overline{\mathrm{G}} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{-j^2}$.

$$\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}} = \mathrm{G}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{-j^2} = \sum_{j=0}^{n-1}\mathrm{G}\omega^{-j^2}$$

Mais en utilisant la question précédente

$$\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}} = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{(k+j)^2}\omega^{-j^2} = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k^2}\omega^{2kj} = \sum_{k=0}^{n-1}\omega^{k^2}\sum_{j=0}^{n-1}\omega^{2kj}$$

Puisque n est impair, $2k$ est un multiple de n *si et seulement si* k est lui-même un multiple de n. Or $k \in [\![0, n-1]\!]$ donc $2k$ est un multiple de n *si et seulement si* $k = 0$. En utilisant la première question, on en déduit que $\mathrm{G}\overline{\mathrm{G}} = n$ puis $|\mathrm{G}| = \sqrt{n}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 21. On a $\displaystyle\prod_{p=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{p}2^{kp!}=\prod_{p=0}^{n-1}\frac{\left(2^{p!}\right)^{p+1}-1}{2^{p!}-1}=\prod_{p=0}^{n-1}\frac{2^{(p+1)!}-1}{2^{p!}-1}=2^{n!}-1.$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 22. Posons $u_k=k+i$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. On a par télescopage :

$$z_n=\prod_{\ell=0}^{n}\frac{1+\ell(\ell+1)+i}{1+\ell(\ell+1)-i}=\prod_{k=0}^{n}\frac{\overline{u_{k+1}}u_k}{u_{k+1}\overline{u_k}}=\frac{u_0\overline{u_{n+1}}}{\overline{u_0}u_{n+1}}=-\frac{n+1-i}{n+1+i}=\frac{1-(n+1)^2+2i(n+1)}{(n+1)^2+1}$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 23. Notons V_n, W_n, X_n, Y_n et Z_n les différents produits.

▷ On a $\displaystyle V_n=\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{n}ij=\prod_{i=1}^{n}\left(i^n\prod_{j=1}^{n}j\right)=,\prod_{i=1}^{n}\left(n!i^n\right)=n!^n\left(\prod_{i=1}^{n}i\right)^n=n!^nn!^n=n!^{2n}.$

▷ On a $\displaystyle W_n=\frac{V_n}{\prod_{i=1}^{n}i^2}=\frac{n!^{2n}}{n!^2}=n!^{2n-2}.$

▷ On a $\displaystyle X_nY_n=V_n\left(\prod_{i=1}^{n}i\right)^2=V_nn!^2$ et $X_n=Y_n$ par symétrie, d'où $X_n=Y_n=n!^{n-1}n!^2=n!^{n+1}$.

▷ On a $\displaystyle Z_n=\frac{V_n}{\prod_{i=1}^{n}i^2}=\frac{X_n}{n!^2}=n!^{n-1}.$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 24. On a $\displaystyle\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n}i^j=\prod_{j=1}^{n}\prod_{i=1}^{n}i^j=\prod_{j=1}^{n}n!^j=n!^{\frac{n(n+1)}{2}}.$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 25.

1. En posant $v_k:=\frac{k^2+k+1}{k(k+1)}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, on a $\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}=\frac{v_k}{v_{k-1}}$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

2. Après télescopage : $u_n=\prod_{k=2}^{n}\frac{v_k}{v_{k-1}}=\frac{v_n}{v_1}=\frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ donc $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{2}{3}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 26. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $a\in]0,\pi[$. Puisque $a\in]0,\pi[$, pour $k\geqslant 1$, $\frac{a}{2^k}\in]0,\frac{\pi}{2}[$. Par suite, pour tout k compris entre 1 et n, $\cos(\frac{a}{2^k})>0$. On en déduit que la somme proposée est parfaitement définie. Ensuite, pour $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$, on a $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$ et donc, $\cos(x)=\frac{\sin(2x)}{2\sin(x)}$ ($\sin(x)$ étant non nul). Pour $x=\frac{a}{2^k}$, on obtient en particulier $\cos\left(\frac{a}{2^k}\right)=\frac{\sin\left(a/2^{k-1}\right)}{2\sin\left(a/2^k\right)}$ et donc,

$$\prod_{k=1}^{n} \cos\frac{a}{2^k} = \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{a}{2^k} = \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin\left(\frac{a}{2^{k-1}}\right)}{2\sin(a/2^k)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{2^{k-1}\sin(a/2^{k-1})}{2^k\sin(a/2^k)} = \frac{\sin(a)}{2^n\sin(a/2^n)}$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 27. La propriété est vraie au rang 1 car pour $z \in \mathbb{C}$, on a $|1+z-1|+1 = 1+|z|$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang n. Soit $z_1, \dots, z_{n+1}$ dans $\mathbb{C}$. On a

$$\left|p_n - 1\right| + 1 \leqslant q_n \quad \text{où} \quad p_n := \prod_{k=1}^{n}(1+z_k) \quad \text{et} \quad q_n := \prod_{k=1}^{n}\left(1+|z_k|\right)$$

En multipliant cette inégalité par le réel positif $|1+z_{n+1}|$ puis en appliquant l'inégalité triangulaire (q_n étant positif), on obtient :

$$\left|p_n - 1\right| \times |1+z_{n+1}| + |1+z_{n+1}| \leqslant q_n \times |1+z_{n+1}| \leqslant q_n \times \left(1+|z_{n+1}|\right)$$

Par l'inégalité triangulaire, on a également :

$$\left|(p_n-1)(1+z_{n+1}) + 1 + z_{n+1}\right| \leqslant \left|p_n - 1\right| \times |1+z_{n+1}| + |1+z_{n+1}|$$

Ainsi $\left|p_n(1+z_{n+1})\right| \leqslant q_n \times \left(1+|z_{n+1}|\right)$, d'où l'inégalité au rang $n+1$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 28.

1. On a $\displaystyle\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=n+1}} \sqrt{ij} = \sqrt{\prod_{i=1}^{n} i(n+1-i)} = \sqrt{\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)\left(\prod_{i=1}^{n}(n+1-i)\right)} = \sqrt{\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^2} = n!$.

2. Soit i et j dans $\mathbb{N}^*$. On a $\left(\frac{i+j}{2}\right)^2 - ij = \frac{(i-j)^2}{4} \geqslant 0$ et $ij - j = j(i-1) \geqslant i-1$ car $j \geqslant 1$ et $i-1 \geqslant 0$.

3. On a $\displaystyle\sqrt{\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=n+1}} (i+j-1))} \leqslant \sqrt{\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=n+1}} ij} \leqslant \sqrt{\prod_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=n+1}} \frac{i+j}{2}}$ d'où $n^{\frac{n}{2}} \leqslant n! \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 29.

1. On a

$$\prod_{p=0}^{n} p! = \prod_{p=1}^{n}\prod_{k=1}^{p} k = \prod_{1\leqslant k\leqslant p\leqslant n} k = \prod_{k=1}^{n}\prod_{p=k}^{n} k = \prod_{k=1}^{n} k^{n-k+1}$$

d'où

$$\prod_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = \prod_{p=0} \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!^{n+1}}{\prod_{p=0}^{n} p!(n-p)!} = \frac{\prod_{k=1}^{n} k^{n+1}}{\left(\prod_{k=1}^{n} k!\right)^2} = \frac{\prod_{k=1}^{n} k^{n+1}}{\prod_{k=1}^{n} k^{2n-2k+2}} = \prod_{k=1}^{n} k^{2k-n-1}$$

2. On déduit de la question précédente que :

$$\begin{aligned}\ln u_n &= \frac{1}{n(n+1)}\ln\prod_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = \frac{1}{n(n+1)}\ln\prod_{k=1}^{n}k^{2k-n-1} = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)\ln k\\ &= \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)\left(\ln\left(\frac{k}{n+1}\right)-1\right)\end{aligned}$$

car $-(1+\ln(n+1))\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1) = 0$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 30.

1. D'après la formule du binôme, on a, en distinguant les indices pairs des indices impairs :

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sqrt{2}^k &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}\sqrt{2}^{2k} + \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}\sqrt{2}^{2k+1}\\ &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}2^k + \sqrt{2}\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}2^k = a_n + b_n\sqrt{2}\end{aligned}$$

avec $a_n := \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}2^k \in \mathbb{N}$ et $b_n := \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}2^k \in \mathbb{N}$. en tant que sommes d'entiers naturels.
On vérifie que, toujours d'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned}(1-\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\binom{n}{k}\sqrt{2}^k &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}\sqrt{2}^{2k} - \sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}\sqrt{2}^{2k+1}\\ &= \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}2^k - \sqrt{2}\sum_{0\leqslant 2k+1\leqslant n}\binom{n}{2k+1}2^k = a_n - b_n\sqrt{2}\end{aligned}$$

2. Pour tout entier naturel n, on a

$$(-1)^n = (1-2)^n = ((1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}))^n = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n = (a_n+b_n\sqrt{2})(a_n-b_n\sqrt{2}) = a_n^2-2b_n^2$$

Posons alors

$$\alpha_n = \begin{cases} 2b_n^2 & \text{si } n \text{ est pair}\\ a_n^2 & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$$

On a $(1+\sqrt{2})^n = \sqrt{\alpha_n}+\sqrt{\alpha_n+1}$ car $a_n \geqslant 0$, $b_n \geqslant 0$ et $(1+\sqrt{2})^n = a_n+\sqrt{2}b_n = \sqrt{a_n^2}+\sqrt{2b_n^2}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 31. D'après la formule du binôme :

$$\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n+\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(\sqrt{5})^k+(-\sqrt{5})^k}{2} = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}5^p \in \mathbb{N}$$

UNE VARIANTE
Le lecteur connaissant les suites récurrentes linéaires d'ordre deux peut aussi remarquer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ *puis raisonner par récurrence (en notant* u_n *l'expression de l'énoncé).*

Voir l'énoncé.

SOLUTION 32. On fait apparaître un télescopage en utilisant la formule de Pascal :

$$\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k} = 1+\sum_{k=1}^{p}(-1)^k\left(\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}\right) = 1+\sum_{k=1}^{p}\left((-1)^k\binom{n-1}{k}-(-1)^{k-1}\binom{n-1}{k-1}\right)$$
$$= 1+(-1)^p\binom{n-1}{p}-1 = (-1)^p\binom{n-1}{p}$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 33. On a

$$\mathrm{U}_n+i\mathrm{V}_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}(-1)^k+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}(-1)^k i = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}i^{2k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}i^{2k+1} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}i^k$$
$$= (1+i)^{2n} = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{\frac{in\pi}{4}}$$

d'où $\mathrm{U}_n = \mathrm{Re}(\mathrm{U}_n+i\mathrm{V}_n) = \left(\sqrt{2}\right)^n\cos\frac{n\pi}{4}$ et $\mathrm{V}_n = \mathrm{Im}(\mathrm{U}_n+i\mathrm{V}_n) = \left(\sqrt{2}\right)^n\sin\frac{n\pi}{4}\cdot$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 34. Puisque pour tout k dans $\mathbb{N}$, $i^k \in \mathbb{R}$ si k est pair et $i^k \in \mathbb{R}i$ sinon, on a :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\left(i\sqrt{3}\right)^{2k}\binom{n}{2k} = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{p}\left(i\sqrt{3}\right)^k\right) = \mathrm{Re}\left(\left(1+i\sqrt{3}\right)^n\right) = \mathrm{Re}\left(2^n e^{i\frac{n\pi}{3}}\right) = 2^n\cos\frac{n\pi}{3}$$

COMMENTAIRE
On peut aussi remarquer que $\mathrm{S}_n = \frac{(1+i\sqrt{3})^n+(1-i\sqrt{3})^n}{2}\cdot$ *En effet :*

$$\left(1+i\sqrt{3}\right)^n+\left(1-i\sqrt{3}\right)^n = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n}{\ell}(i\sqrt{3})^\ell\left(1+(-1)^\ell\right) = \sum_{0\leqslant 2k\leqslant n}\binom{n}{2k}(-3)^k$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 35.

1. On a $(1+\mathrm{X})^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\mathrm{X}^k$ et $(1+\mathrm{X})^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathrm{X}^k$. Le coefficient de X^p dans le produit de $(1+\mathrm{X})^m$ par $(1+\mathrm{X})^n$ est donc égal à $\sum_{k=0}^{p}\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$. Puisque $(1+\mathrm{X})^m(1+\mathrm{X})^n = (1+\mathrm{X})^{m+n}$, ce coefficient est aussi égal à $\binom{m+n}{p}$, d'où la formule de Vandermonde.

2. On a classiquement :

$$\forall\, 1 \leqslant k \leqslant n, \quad k\binom{n}{k}^2 = k\binom{n}{k}\times\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k},$$

En faisant un décalage d'indice, on obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}\binom{n}{k} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{n}{k+1}.$$

On utilise ensuite que pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $\binom{n}{k+1} = \binom{n}{n-(k+1)} = \binom{n}{n-1-k}$, d'où la formule voulue.

3. On applique la formule de Vandermonde avec $m = n-1$ et $p = n-1$, qui sont des entiers positifs car $n \geqslant 1$, et qui satisfont bien $p \leqslant m+n = 2n-1$, ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\binom{n}{n-1-k} = n\binom{n-1+n}{n-1} = n\binom{2n-1}{n-1},$$

d'où la conclusion.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 36.

1. Après simplifications des différentes factorielles, on obtient $\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \binom{n}{p}\binom{n-p}{n-k}$ pour tout $k \in [\![p, n]\!]$ d'où :

$$\sum_{k=p}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{p} = \sum_{k=p}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{p}\binom{n-p}{n-k} = \binom{n}{p}\sum_{k=p}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-p}{n-k} = \binom{n}{p}\sum_{j=0}^{n-p}(-1)^{j}\binom{n-p}{j} = (1-1)^{n-p}$$

d'où la valeur 0 si $p < n$ et 1 si $p = n$.

2. On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}v_k &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u_p = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{p}u_p = \sum_{p=0}^{n}\left(\sum_{k=p}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\binom{k}{p}\right)u_p\\ &= u_n\end{aligned}$$

car tous les termes de la somme sont nuls, sauf le dernier (pour $p = n$), qui vaut u_n.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 37. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\mathrm{P}_n(x) = (1+x)^n$. On remarque que P_n est de classe $\mathscr{C}^\infty$. De plus, pour tout réel x :

$$\mathrm{P}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k\,,\ \mathrm{P}'_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}\,,\ \mathrm{P}''_n(x) = \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^{k-2} = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

Nous noterons $\mathrm{S}_1, \dots, \mathrm{S}_6$ les différentes sommes.

1. On a $\mathrm{S}_1 = \mathrm{P}'_n(1) = n2^{n-1}$.

2. De même, $\mathrm{S}_2 = \mathrm{P}''_n(1) = n(n-1)2^{n-2}$.

3. On a $\mathrm{S}_3 = \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_2 = n(n+1)2^{n-2}$.

4. Pour $k \in [\![0, p]\!]$, on a

$$\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} = \frac{n!}{k!(p-k)!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{p!}{k!(p-k)!} = \binom{n}{p}\binom{p}{k}$$

Ainsi, par la formule du binôme : $\mathrm{S}_4 = \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} = \binom{n}{p}(1+1)^p = 2^p\binom{n}{p}$.

5. On a, par linéarité de l'intégrale,

$$\mathrm{S}_5 = \sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n}{k}\int_0^1 t^k \mathrm{d}t\right) = \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} t^k\right)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{P}_n(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

6. Par la relation de Pascal $\forall (k,p) \in \mathbb{N}^2$, $\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}$, ainsi, par télescopage :

$$\mathrm{S}_6 = \sum_{k=p}^{n}\left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}\right) = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$$

VARIANTE

Pour les sommes des 1., 2., 3. et 5., on peut aussi utiliser la relation $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ (appelée président-comité – nous expliquerons prochainement ce surnom – valable pour k et n dans $\mathbb{N}^*$). Par exemple :

$$\mathrm{S}_1 = n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = n2^{n-1}$$

Voir l'énoncé.