

INTERROGATION N° 2

Samedi 27 septembre 2025 (8h – 9h)

1 _____ Paramètre rationnel du cercle _____

Soit $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Écrire sous forme trigonométrique le nombre $Z := \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}$.

2 _____ Couples de même cube _____

Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $a^3 = b^3$.

3 _____ Sous-ensembles remarquables du plan _____

Représenter dans le plan les ensembles $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$ respectivement définis par les inéquations suivantes :

$$|iz + 1| \leq 1, \operatorname{Re}(z + 1) \geq 0 \text{ et } 1 \leq |z + 1| \leq 2$$

4 _____ Couples définis par leur somme et leur produit _____

Déterminer les couples $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tels que $x + y = 1 + i$ et $xy = 2 - i$.

5 _____ Une équation bicarrée _____

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - 2 \cos(\theta) z^2 + 1 = 0$.

6 _____ Un triangle rectangle _____

Soit $a \in \mathbb{R}i$ non nul et $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que les points d'affixes a^n , a^{n+1} et a^{n+2} forment un triangle rectangle.

7*Une racine carrée*Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

1. Développer $(x + iy)^2$ pour $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = 4ab + 2i(a^2 - b^2)$.

8*Petits calculs f*Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$.

1. Développer $(a + i)(b + i)(c + i)$.
2. On suppose que $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ et $ab + bc + ca = 1$.

Démontrer que $(1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$ est le carré d'un nombre entier.**9***Une équation atypique*Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $1 - \overline{z} = |z|$.**10***Une inégalité*Démontrer que, pour tout z dans $\mathbb{C}$, $|z| \leq |z^2| + |z - 1|$.**11***Une équation autour de l'exponentielle*Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^{2z} + e^z + 1 = 0$.**12***Étude d'une application*On note $J : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $J(z) := z + \frac{1}{z}$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $J(z) = 1$.
2. Démontrer que $J\langle \mathbb{U} \rangle = [-2, 2]$.
3. Déterminer $J\langle \mathbb{C}^* \rangle$.

CORRIGÉ

1 ↻

On a $Z = \frac{\cos \theta + i \sin \theta}{\cos \theta - i \sin \theta} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$.

2 ↻

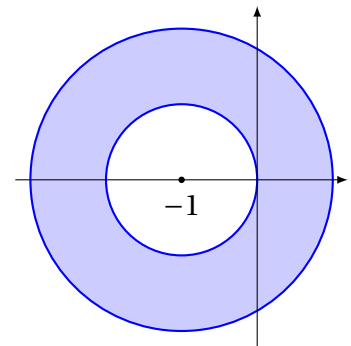
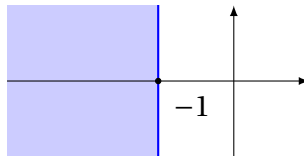
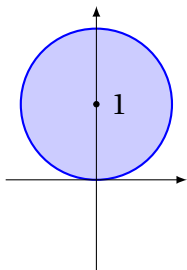
Si $b = 0$, alors $a^3 = b^3$ équivaut à $a = 0$. Soit (a, b) un couple d'éléments de $\mathbb{C}^*$. On a

$$\begin{aligned} a^3 = b^3 &\iff \left(\frac{a}{b}\right)^3 = 1 \\ &\iff \frac{a}{b} \in \{1, j, j^2\} \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\{(b, b\omega); (b, \omega) \in \mathbb{C} \times \mathbb{U}_3\}$ où $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\}$.

3 ↻

L'inégalité $|iz + 1| \leq 1$ équivaut à $|z - i| \leq 1$, $\operatorname{Re}(z + 1) \geq 0$ à $\operatorname{Re} z \geq -1$. On en déduit les représentations suivantes :



4 ↻

On sait d'après le cours sur les équations du second degré que

$$\begin{cases} x + y = 1 + i \\ xy = 2 - i \end{cases} \iff x \text{ et } y \text{ sont les racines du polynôme } X^2 - (1 + i)X + 2 - i$$

Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta = -8 + 6i = (3i + 1)^2$. On en déduit ses racines $1 + 2i$ et $-i$. Les solutions sont donc les couples $(1 + 2i, -i)$ et $(-i, 1 + 2i)$.

5 ↻

- ⇒ Un nombre complexe z vérifie $z^4 - 2\cos(\theta)z^2 + 1 = 0$ si et seulement si son carré z^2 est racine du polynôme $X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$.
- ⇒ Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta = 2\cos^2\theta - 4 = (2i\sin\theta)^2$; racines sont donc $e^{\pm i\theta}$.
- ⇒ Il reste à résoudre $z^2 = e^{\varepsilon i\theta}$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Cette équation équivaut à $z = \pm e^{\varepsilon i\frac{\theta}{2}}$.
- ⇒ L'ensemble des solutions est donc $\left\{ \varepsilon_1 e^{\varepsilon_2 i\frac{\theta}{2}}; (\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in \{-1, 1\}^2 \right\}$.

Équations bicarrées

Le changement de variable $Z := z^2$ permet de résoudre toutes les équations bicarrées, i.e. de la forme $az^4 + bz^2 + c = 0$.

6 ↻

On a

$$\frac{a^{n+2} - a^{n+1}}{a^n - a^{n+1}} = \frac{a^{n+1}}{a^n} \times \frac{a-1}{1-a} = -a \in \mathbb{R}i$$

d'où le triangle formé par les points d'affixes a^n , a^{n+1} et a^{n+2} est rectangle au point d'affixe a^{n+1} .

7 ↻

- On obtient $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$.
- On remarque par la question précédente que $4ab + 2i(a^2 - b^2) = -2i(b + ia)^2 = (1 - i)^2(b + ia)^2$. Ainsi

$$\begin{aligned} z^2 = 4ab + 2i(a^2 - b^2) &\iff z^2 = ((1 - i)(b + ia))^2 \\ &\iff z = \pm(1 - i)(b + ia) \end{aligned}$$

8 ↻

- On obtient $(a + i)(b + i)(c + i) = i^3 + i^2(a + b + c) + i(ab + bc + ca) + abc = abc - (a + b + c) + i(ab + bc + ca - 1)$.
- Sous l'hypothèse de l'énoncé, $z := (a + i)(b + i)(c + i)$ est l'entier relatif $abc - (a + b + c)$, son module au carré est donc le carré d'un entier. On conclut en remarquant que

$$|z|^2 = (1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$$

9 ↻

⇒ Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $1 - \bar{z} = |z|$. on en déduit que $\bar{z} \in \mathbb{R}$ donc $z \in \mathbb{R}$.

⇒ Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$1 - x = |x| \iff \begin{cases} 1 - x = x \text{ et } x \geq 0 \\ \text{ou } 1 - x = -x \text{ et } x \leq 0 \end{cases}$$

Ce qui équivaut à $x = \frac{1}{2}$. On en déduit que l'ensemble des solutions est $\{\frac{1}{2}\}$.

10



Soit $z \in \mathbb{C}$.

⇒ Supposons $|z| \geq 1$. On a $|z^2| \geq |z|$ d'où $|z| \leq |z^2| + |z - 1|$.

⇒ Supposons $|z| < 1$. On a $z = z(1 - z) + z^2$ d'où par l'inégalité triangulaire :

$$|z| \leq \underbrace{|z(1 - z)| + |z^2|}_{=|z| \times |1 - z| + |z^2|} \leq \underbrace{|z^2| + |z - 1|}_{\text{car } |z| \leq 1}$$

11



Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$e^{2z} + e^z + 1 = 0 \iff e^z \text{ est racine du polynôme } X^2 + X + 1$$

Ce polynôme admettant pour racines j et j^2 , on est amené à résoudre $e^z = j$ et $e^z = j^2$. Écrivons $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a résoudre plus généralement $e^z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} e^z = j &\iff e^x e^{iy} = e^{i\theta} \\ &\iff e^x = 1 \text{ et } y \equiv \theta [2\pi] \text{ (identification des formes polaires)} \\ &\iff x = 0 \text{ et } \exists k \in \mathbb{Z}, y = \theta + 2k\pi \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{ 1 + i(\theta + 2k\pi); (\theta, k) \in \left\{ \frac{2\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3} \right\} \times \mathbb{Z} \right\}$.

12



1. L'équation $J(z) = i$ équivaut à $z^2 - z + 1 = 0$. Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta = -3$ donc les solutions sont $e^{\pm \frac{i\pi}{3}}$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On a $J(e^{i\theta}) = 2 \cos \theta$. Puisque $\cos : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est surjective, on en déduit que $J(\mathbb{U}) = [-2, 2]$.
3. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ et z dans $\mathbb{C}^*$. L'équation $J(z) = \omega$ équivaut à $z^2 - \omega z + 1 = 0$. Cette équation admet deux racines z_1 et z_2 . Comme 0 n'est pas racine du polynôme $X^2 - 2 \cos \theta X + 1$, $z_1 \neq 0$ d'où $J(z_1) = z$. On en déduit que $J(\mathbb{C}^*) = \mathbb{C}$.