

INTERROGATION N° 3

Lundi 3 novembre 2025 (13h – 14h)

1 _____ *Un trinôme du second degré à paramètre* _____

Déterminer l'ensemble $E := \{\alpha \in \mathbb{R}; \forall x \in \mathbb{R}, x^2 + \alpha \geq x\}$.

2 _____ *Une inéquation du second degré* _____

Résoudre l'inéquation $x^2 + \sqrt{2} \leq (1 + \sqrt{2})x$ d'inconnue réelle x .

3 _____ *Bornes* _____

On note $A := \left\{ \lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor ; x \in \mathbb{R}_+^* \right\}$.

L'ensemble A admet-il une borne inférieure ? une borne supérieure ? Les calculer le cas échéant.

4 _____ *Bornes d'un produit* _____

Pour deux parties A et B de $\mathbb{R}$, on note $AB := \{ab; (a, b) \in A \times B\}$.

1. On suppose dans cette question que A et B sont des parties non vides et majorées de $\mathbb{R}_+$.

Démontrer que AB est majorée et vérifie $\sup AB = \sup A \times \sup B$.

2. Donner des exemples de parties A et B non vides et majorées de $\mathbb{R}$ telles que AB ne soit pas majorée.

3. Donner des exemples de parties A et B non vides et majorées de $\mathbb{R}$ telles que AB soit majorée mais vérifie $\sup AB \neq \sup A \times \sup B$.

5 _____ *Partie entière* _____

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $[4x] = 4[x]$.

6*Décimales*

Déterminer les quatre premières décimales après la virgule de $\frac{11}{17}$.

7*Minoration d'une somme*

Soit $x_1, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{R}_+^*$ tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Démontrer que $\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$.

8*Une autre démonstration de l'irrationalité $\sqrt{2}$*

On pose $A := \{n \in \mathbb{N}^* ; n\sqrt{2} \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $\forall n \in A, n\sqrt{2} - n \in A$ puis en déduire que A est vide. Conclure.

9*L'inégalité arithmético-géométrique fff*

On se propose de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique, ie

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n, \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_i$$

1. Soit x et y dans $\mathbb{R}_+$ tels que $xy = 1$. Établir que $x + y \geq 2$.
2. Soit x et y dans $\mathbb{R}_+$ tels que $x \leq 1 \leq y$. Démontrer que $xy + 1 \leq x + y$.
3. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+$ tels que $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = 1$ et $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$.
Démontrer que $a_1 + a_n \geq 1 + a_1 a_n$.
4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+$. Démontrer que $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = 1 \implies a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$.
5. En déduire l'inégalité arithmético-géométrique.

CORRIGÉ

1 ↷

Le trinôme $x^2 - x + \alpha$ est à valeurs positives sur $\mathbb{R}$ *si et seulement si* son discriminant est négatif ou nul (sinon il prendrait des valeurs strictement négatives entre des racines). On en déduit que $E = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$.

2 ↷

Le trinôme $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}$ admet pour discriminant $\Delta = (1 + \sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} = (1 - \sqrt{2})^2$ et pour racines $x_1 := 1$ et $x_2 := \sqrt{2}$. L'ensemble des solutions est donc $[1, \sqrt{2}]$.

3 ↷

⇒ Comme $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$ pour tout $x > 1$, A n'est pas majorée donc n'admet pas de borne supérieure.

⇒ Comme $\lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \geq 0$ pour tout $x > 0$, A est minorée. Puisque $A \neq \emptyset$ (on a par exemple, $2 \in A$ en choisissant $x = 1$), A admet une borne inférieure.

⇒ Puisque

$$\inf_{x>1} \left(\lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \right) = \inf_{x>1} \lfloor x \rfloor = 1 \quad \text{et} \quad \inf_{x<1} \left(\lfloor x \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \right) = \inf_{x<1} \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = 1$$

et $\lfloor 1 \rfloor + \left\lfloor \frac{1}{1} \right\rfloor = 2$, on a $\inf A = 1$.

4 ↷

1. ⇒ Pour $(a, b) \in A \times B$, on a $0 \leq a \leq \sup A$ et $0 \leq b \leq \sup B$ d'où $ab \leq (\sup A)(\sup B)$. Ainsi AB est non vide et majorée donc admet une borne supérieure.

⇒ Par le critère séquentielle sur les bornes, il existe des suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in B^{\mathbb{N}}$ convergeant respectivement vers $\sup A$ et $\sup B$. Comme $a_n b_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (\sup A)(\sup B)$ et $(\sup A)(\sup B)$ est un majorant de Ab , on en déduit que $\sup AB = (\sup A)(\sup B)$.

2. Pour $A = B = \mathbb{R}_-$, on a $AB = \mathbb{R}_+$ donc AB n'est pas majorée.

3. Pour $A = B = [-2, 0]$, on a $AB = [0, 4]$. Ainsi $\sup A = \sup B = 0$ et $\sup AB = 2$ d'où $\sup AB \neq \sup A \times \sup B$.

5 ↷

Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $n := \lfloor x \rfloor$ et $\theta := x - n$. On a $4x = 4n + 4\theta$ d'où $\lfloor 4x \rfloor = 4n + \lfloor 4\theta \rfloor$ et $4\lfloor x \rfloor = 4n$. Ainsi

$$\begin{aligned} \lfloor 4x \rfloor = 4\lfloor x \rfloor &\iff \lfloor 4\theta + 4n \rfloor = 4n \\ &\iff \lfloor 4\theta \rfloor + 4n = 4n = 0 \\ &\iff \lfloor 4\theta \rfloor = 0 \\ &\iff \theta \in \left[0, \frac{1}{4}\right[\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[n, n + \frac{1}{4} \right[$.

6

En posant la division, on obtient $\frac{11}{17} = 0,6470\dots$

7

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz $n^2 = \left(\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \times \frac{1}{\sqrt{x_i}} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}$.

8

Soit $n \in A$.

⇒ On a $n\sqrt{2} \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, ainsi $n\sqrt{2} - n \in \mathbb{Z}$. Puisque $\sqrt{2} > 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n\sqrt{2} - n > 0$, d'où $n\sqrt{2} - n \in \mathbb{N}^*$.

⇒ On a $(n\sqrt{2} - n)\sqrt{2} = 2n - n\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$ car $n \in \mathbb{N}$ et $n\sqrt{2} \in \mathbb{N}$. Comme $2 > \sqrt{2}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2n - n\sqrt{2} > 0$ d'où $2n - n\sqrt{2} \in \mathbb{N}^*$.

On en déduit que $n\sqrt{2} - n \in A$. Raisonnons par l'absurde en supposant A non vide. Comme A est une partie de $\mathbb{N}^*$, elle admet un plus petit élément a . Par ce qui précède, $a\sqrt{2} - a \in A$. Comme $a\sqrt{2} - a < a$, on en déduit une absurdité. On en déduit que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

9

1. On a $x + y - 2 = x + \frac{1}{x} - 2 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} \geq 0$.

2. On a $xy + 1 - (x + y) = (x - 1)(y - 1) \leq 0$ car $x \leq 1 \leq y$.

3. ⇒ Démontrons par l'absurde que $a_1 \leq 1 \leq a_n$.

✗ Supposons que $a_1 > 1$. On a alors $1 < a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ d'où $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n > 1$. C'est absurde.

✗ Supposons que $a_n < 1$. On a alors $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n < 1$ d'où $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n < 1$. C'est absurde.

⇒ Puisque $0 \leq a_1 \leq 1 \leq a_n$, on déduit du 2. que $a_1 + a_n \geq a_1 a_n + 1$.

4. Raisonnons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, notons HR(n) la propriété suivante :

$$\forall (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbb{R}_+)^2, \quad a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n = 1 \implies a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq n$$

⇒ HR(2) a été démontrée au 2.

⇒ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $n \geq 2$ et HR(n) vraie. Soit $a_1, \dots, a_{n+1}$ dans $\mathbb{R}_+$ tels que $a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{n+1} = 1$. Quitte à renuméroter, on peut supposer que $a_1 \leq \dots \leq a_{n+1}$. Par le 3., on a $a_1 + a_{n+1} \geq 1 + a_1 a_{n+1}$. Comme $a_1 \times \dots \times a_n \times a_1 a_{n+1} = 1$, on déduit de HR(n) que $a_2 + \dots + a_n + a_1 a_{n+1} \geq n$ d'où

$$\sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=2}^n a_i \right) + a_1 + a_{n+1} \geq \left(\sum_{i=2}^n a_i \right) + 1 + a_1 a_{n+1} \geq n + 1$$

d'où HR($n + 1$).

5. L'inégalité arithmético-géométrique est évidente lorsque $n = 1$ ou si l'un des x_i est nul. Supposons $n \geq 2$ et soit $x_1, \dots, x_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$. En appliquant le 4. aux $a_i := \frac{x_i}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}}$ pour $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ (dont le produit vaut clairement 1), on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}} \sum_{i=1}^n x_i \geq n, \text{ c'est-à-dire } \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$