

INTERROGATION N° 4

Mercredi 12 novembre 2025 (8–9h)

1

Une récurrence atypique

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels vérifiant

$$u_0 \geq 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n + (-1)^n}$$

1. Démontrer que $u_n \geq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$.

2

Une récurrence homographique

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$, on pose $f(x) := \frac{x-1}{x+3}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 := 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution ℓ .
2. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq \ell$. On pose $v_n := \frac{1}{u_n - \ell}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmétique puis en déduire l'expression de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3

Des inégalités

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réelles telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n - 1 \leq \frac{u_n}{2n+3}$$

Que peut-on en déduire sur $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$? INDICATION : Encadrer u_n .

4

Extension des opérations sur les limites

Soit $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels bornées et $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de limite nulle.

Que dire de $(b_n \varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

5*Définition de la convergence*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que

$$\forall (n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2, 0 \leq u_{n+m} \leq \frac{n+m}{nm}$$

En revenant à la définition, démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

6*Inégalités*

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite positive telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq \frac{u_n + u_{n+1}}{3}$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n := \max(u_n, u_{n+1})$.

1. Démontrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît puis démontrer que sa limite est nulle.
2. En déduire que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

7*Une limite*

Soit $a > 0$ et $b > 0$. Démontrer que $(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \max(a, b)$.

CORRIGÉ

1 ↻

1. On démontre la propriété par récurrence sur n .

⇒ Comme $u_0 \geq 1$, l'initialisation est acquise.

⇒ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang 0. On a

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n + (-1)^n} \geq \sqrt{1 + 1 + (-1)^n} \sqrt{1}$$

par la croissance de la racine carrée. D'où la propriété au rang $n + 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la question précédente et la croissance de la racine carrée, on a

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n + (-1)^n} \geq \sqrt{u_n^2 + 1 + (-1)^n} \sqrt{u_n^2} = u_n$$

Ainsi $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante. On déduit du théorème de la limite monotone que cette suite admet une limite ℓ appartenant à $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell \in \mathbb{R}$. Comme

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = \sqrt{u_{2n}^2 + u_{2n} + 1}$$

on obtient $\ell := \sqrt{\ell^2 + \ell + 1}$ par passage à la limite, d'où $\ell^2 = \ell^2 + \ell + 1$ i.e. $\ell = -1$ ce qui contredit la minoration obtenue à la question précédente. Ainsi $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.

2 ↻

1. L'équation $f(x) = x$ équivaut à $(x + 1)^2 = 0$, i.e. $x = -1$.

2. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = -1$. Puisque $u_0 = 0$, on a alors $n \neq 0$ et

$$-1 = \frac{u_{n-1} - 1}{u_{n-1} + 3}$$

d'où $u_{n-1} = -1$. On en déduit par une récurrence descendante facile que $u_n = u_{n-1} = \dots = u_1 = u_0 = -1$, ce qui est absurde.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1} + 1} = \frac{1}{\frac{u_n - 1}{u_n + 3} + 1} = \frac{1}{\frac{2u_n + 2}{u_n + 3}} = \frac{u_n + 1 + 2}{2(u_n + 1)} = \frac{1}{2} + v_n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $v_n = v_0 + \frac{n}{2} = \frac{n+2}{2}$ puis

$$u_n = \frac{2}{n+2} - 1 = \frac{-n}{n+2}$$

3 ↻

On déduit de l'inégalité donnée que

$$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n \leq \frac{2n+3}{2n+2}$$

Ainsi $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$ par le théorème d'encadrement.

4 ↻

Soit $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq M$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}, |b_n \varepsilon_n| \leq M|\varepsilon_n|$, on conclut par le théorème d'encadrement que $b_n \varepsilon_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

5 ↻

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, il existe un rang n_0 à partir duquel $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $n \geq n_0$, on a

$$0 \leq u_{n+n_0} \leq \frac{n+n_0}{nn_0} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n_0} \leq \varepsilon$$

Ainsi, $\forall n \geq 2n_0, 0 \leq u_n \leq \varepsilon$. On en conclut que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

6 ↻

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, il en est de même de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} \leq v_n$ par définition du maximum et

$$u_{n+2} \leq \frac{u_n + u_{n+1}}{3} \leq \frac{v_n + v_n}{3} = \frac{2}{3}v_n \leq v_n \text{ car } v_n \geq 0$$

On en déduit que $v_{n+1} = \max(u_{n+1}, u_{n+2}) \leq v_n$. Ainsi $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroît. Comme cette suite est minorée par 0, on déduit du théorème de la limite monotone qu'elle converge vers un réel positif ℓ . On a vu que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} \leq \frac{2}{3}v_n$$

En particulier, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} \leq \frac{2}{3}v_n$ et $u_{n+3} \leq \frac{2}{3}v_{n+1} \leq \frac{2}{3}v_n$ d'où

$$v_{n+2} \leq \frac{2}{3}v_n \quad (\star)$$

On en déduit $\ell \leq \frac{2}{3}\ell$ par passage à la limite dans $(\star)$. Comme $\ell \geq 0$, on en déduit que $\ell = 0$.

2. Comme $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on déduit du théorème d'encadrement que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

7 ↻

Quitte à permuter a et b , on peut supposer que $a \leq b$. On a donc

$$\frac{1}{n} \ln(a^n + b^n) = \frac{\ln b^n + \ln\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n\right)}{n} = \ln b + \frac{1}{n} \ln\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n\right)$$

Comme

$$0 \leq \frac{1}{n} \ln\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n\right) \leq \frac{\ln 2}{n}$$

on déduit du théorème d'encadrement que $\frac{1}{n} \ln\left(1 + \left(\frac{a}{b}\right)^n\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'où $\frac{1}{n} \ln(a^n + b^n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln b$ puis $(a^n + b^n)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} b$ par composition des limites.