

INTERROGATION N° 5

Lundi 17 novembre 2025 (13h – 14h)

1

Quizz sur les équivalents

Donner un exemple de suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes :

- | | |
|---|---|
| 1. On a $u_{n+1} \sim u_n$ et $u_{2n} \not\sim u_n$. | 3. $u_{n+1} \not\sim u_n$. |
| 2. $u_{n+1} \sim u_n$ et $u_{2n} \sim u_n$. | 4. $u_n \sim 1$ et $u_n^n \not\sim 1$. |

2

Une suite définie implicitement

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Démontrer que l'équation $e^x = n - x$ admet une unique solution x_n .
- Étudier le sens de variation de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire un équivalent de x_n .

3

Une suite récurrente

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}}$ (n racines carrées).

- Justifier que $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite récurrente d'ordre un.
- Déterminer l'unique point fixe ℓ de $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$.
- Représenter le graphe de f . Tracer quelques itérations de la suite sur votre figure.
- Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
- On se propose de démontrer d'une autre façon le résultat précédent. Établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \ell - u_{n+1} \leq \frac{\ell - u_n}{2}$$

puis conclure.

4*Un contre-exemple*

Donner un exemple de suite strictement décroissante vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$ avec croissante.

5*Une suite de racines*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que l'équation $x^3 = 1 - nx$ admet une seule solution sur $[0, +\infty[$ que l'on note x_n .
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et calculer sa limite ℓ .
4. Déterminer un équivalent de $x_n - \ell$.

CORRIGÉ

1 ↻

1. On a $n+1 \sim n$ et $2n \not\sim n$.
2. La suite constante égale à un convient clairement.
3. On a $(n+1)! \not\sim n!$ car $\frac{(n+1)!}{n!} = n+1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
4. On a $1 + \frac{1}{n} \sim 1$ mais $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \not\sim 1$ car

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim n \times \frac{1}{n} = 1$$

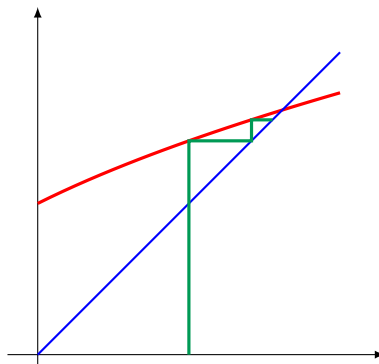
d'où $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e$.

2 ↻

1. La fonction $\phi : x \mapsto x + e^x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de deux fonctions continues et strictement croissantes sur ce même intervalle. On a $x + e^x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ et $x + e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$, on déduit donc du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que ϕ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur lui-même. Ainsi, pour tout n dans $\mathbb{N}$, l'équation $\phi(x) = n$ admet une unique solution qui vaut $\phi^{-1}(n)$.
2. Comme ϕ^{-1} est strictement croissante (car ϕ l'est), on en déduit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante. On déduit du théorème de la limite monotone qu'elle admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell \in \mathbb{R}$. On a alors $x_n + e^{x_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell + e^\ell$ par opération sur les limites. C'est absurde puisque $\forall n \in \mathbb{N}, x_n + e^{x_n} = n$;

3 ↻

1. On a directement par définition de la suite que $\forall n \geq 1, u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.
2. On a $x = \sqrt{1+x}$ si et seulement si $x \geq 0$ et $x^2 = x+1$. On en déduit classiquement que la seule solution vaut $\ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
3. On obtient classiquement le graphique suivant :



4. On conjecture que la suite croît vers ℓ .

⇒ La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $u_1 = 1 \leq \ell$, on en déduit que $u_2 = f(u_1) \leq f(\ell) = \ell$ puis par une récurrence facile $u_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

⇒ Comme $u_2 = \sqrt{2} > 1 = u_1$ et f croissante sur $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $u_3 = f(u_2) \geq f(u_1) = u_2$ puis par une récurrence facile $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

⇒ Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge par le théorème de la limite monotone. Comme f est continue, sa limite est un point fixe de f , il s'agit donc de ℓ par la question précédente.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\ell - u_{n+1} = \sqrt{1+\ell} - \sqrt{1+u_n} = \frac{\ell - u_n}{\sqrt{1+\ell} + \sqrt{1+u_n}}$$

On en déduit par une récurrence facile que $\ell - u_n \geq 0$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \ell - u_{n+1} = \frac{\ell - u_n}{\sqrt{1+\ell} + \sqrt{1+u_n}} \leq \frac{\ell - u_n}{2}$$

car $\ell \geq 0$ et $u_n \geq 0$. On en déduit par une récurrence facile que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell - u_1}{2^{n-1}}$$

d'où $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ par le théorème d'encadrement.

4



Il suffit de considérer $f : x \mapsto x - 1$ et la suite définie par $u_n := -n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ qui vérifie bien la relation $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.

5



1. La fonction $\phi_n : x \mapsto x^3 + nx$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (somme d'une fonction strictement croissante et d'une fonction croissante) et continue (somme de deux fonctions continues). Puisque $\phi_n(0) = 0$ et $\phi_n(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$, on déduit du corollaire du théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $\phi_n(x) = 1$ admet une seule solution sur $[0, +\infty[$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. On a $\phi_n(x) \leq \phi_{n+1}(x)$. En particulier $\phi_{n+1}(x_n) \geq 1 = \phi_{n+1}(x_{n+1})$ d'où $x_n \geq x_{n+1}$ par stricte décroissance de ϕ_{n+1} .

3. Comme $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et positive, elle converge par le théorème de la limite monotone. Notons ℓ sa limite. Puisque

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = \frac{1 - x_n^3}{n}$$

on en déduit que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par opération sur les limites. Ainsi $\ell := 0$.

4. On a $nx_n = 1 - x_n^3 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ d'où $x_n \sim \frac{1}{n}$.