

▷ PROBLÈME 1 : Sujet de niveau élémentaire 🎵 (sauf la question 4., plus délicate).

Les thèmes principaux sont les racines cubiques de l'unité, les équations du second degré et la géométrie plane.

▷ PROBLÈME 2 : Première partie facile 🎵 puis seconde partie plus délicate 🎵🎵 (on y démontre un théorème classique sur les homographies et les calculs font apparaître des variables).

Les thèmes principaux sont l'ensemble $\mathbb{U}$, les formes polaires et algébriques. C'est un très bon entraînement au calcul algébrique à plusieurs variables.

▷ PROBLÈME 3 : Sujet assez technique de bout en bout 🎵🎵🎵.

Le thème central est l'inégalité triangulaire. C'est un très bon entraînement aux raisonnements mathématiques (par récurrence et par l'absurde), au calcul à plusieurs variables et à la rigueur dans les calculs (le fait qu'une inégalité soit stricte ou non par exemple).

PROBLÈME 1. IND § SOL

Etude d'une transformation complexe

Le plan $\mathcal{P}$ affine euclidien orienté est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \mathbf{u}, \mathbf{v})$.

On note $T : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'application définie par $\forall z \in \mathbb{C}, T(z) = z^2 - 2jz - 1$.

On rappelle que $j = \exp\left(\frac{2i\pi}{3}\right)$.

1. Déterminer l'ensemble des points fixes de T , ie des solutions de l'équation $T(z) = z$.
2. Montrer qu'il existe $(p, q) \in \mathbb{C}^2$ tels que $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 - 2jz - 1 = p + (z - q)^2$.
3. Soit $R > 0$. On note $\mathcal{C}_R = \{z \in \mathbb{C}; |z - j| = R\}$.
 - a. Quelle est la nature géométrique de $\mathcal{C}_R$?
 - b. Même question pour l'ensemble $\{T(z); z \in \mathcal{C}_R\}$. On pourra utiliser la question 2.
4. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. On note ω_1 et ω_2 les solutions de l'équation $T(z) = \omega$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
 - a. Exprimer les racines carrées de $\omega - j$ en fonction de j, ω_1 et ω_2 .
 - b. Déterminer l'ensemble des nombres complexes ω tels que les points d'affixes ω_1, ω_2 et ω soient alignés.
 INDICATION : Notez θ un argument de $\omega - j$ (sous réserve d'existence) puis exprimez les arguments de $\omega_1 - j$ et $\omega_2 - j$ en fonction de θ .
 - c. Déterminer l'ensemble des nombres complexes ω tels que les points d'affixes ω_1, ω_2 et ω forment un triangle isocèle et rectangle au sommet d'affixe ω .

PROBLÈME 2. IND § SOL*Homographies stabilisant le cercle unité*

On appelle *homographie* toute fonction h de la forme $h(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ où la variable z est dans $\mathbb{C}$ et où a, b, c, d sont des complexes vérifiant $ad - bc \neq 0$.

- On appelle *point fixe* d'une homographie h tout complexe z tel que $h(z) = z$.
- On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, $\mathbb{P} = \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > 0\}$ et $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.

Partie I – Exemples d'homographies

1. Dans cette question, h est l'homographie définie par $h(z) = i \frac{1+z}{1-z}$.
 - a. Montrer, pour tout z de $\mathbb{U}$ distinct de 1, $h(z) \in \mathbb{R}$.
 - b. Établir, pour tout z de $\mathbb{D}$, $h(z) \in \mathbb{P}$.
 - c. Déterminer les points fixes de h .
2. Dans cette question, h est l'homographie définie par $h(z) = \frac{z-i}{z+i}$.
 - a. Montrer, pour tout z de $\mathbb{R}$, $h(z) \in \mathbb{U}$.
 - b. Prouver, pour tout z de $\mathbb{P}$, $h(z) \in \mathbb{D}$.

Partie II – Homographies stabilisant le cercle unité

Une homographie h est dite :

- *de type I* s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $h(z) = \frac{e^{i\theta}}{z}$;
- *de type II* s'il existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $h(z) = e^{i\theta} \frac{z+\alpha}{\bar{\alpha}z+1}$.

On va établir qu'une homographie h vérifie $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$ *si et seulement si* elle est du type I ou II.

1. Soit h une homographie *de type I*. Montrer que, pour tout z de $\mathbb{U}$, on a $h(z) \in \mathbb{U}$.
2. Soit h une homographie *de type II*. Vérifier que l'ensemble de définition de h contient $\mathbb{U}$ puis montrer que $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$.
3. Soit u et v deux complexes. Établir que $(\forall \theta \in \mathbb{R}, u + 2\text{Re}(ve^{-i\theta}) = 0) \implies (u = 0 \text{ et } v = 0)$.
4. Soit $h : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ une homographie dont l'ensemble de définition contient $\mathbb{U}$.

On suppose de plus que $\forall z \in \mathbb{U}, h(z) \in \mathbb{U}$. On rappelle que $ad - bc \neq 0$.

- a. Montrer que, pour tout θ de $\mathbb{R}$, $|a|^2 + |b|^2 + 2\text{Re}(\bar{a}be^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\text{Re}(\bar{c}de^{-i\theta})$.
- b. En déduire que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $\bar{a}b = \bar{c}d$.

- c. On suppose que $a = 0$. Montrer que h est du type I.
- d. On suppose que $a \neq 0$. Montrer que $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$ et en déduire que $|a| = |d|$.
- e. Toujours sous l'hypothèse $a \neq 0$, montrer que h est du type II.

PROBLÈME 3. IND § SOL*Localisation de racines complexes*

Pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on pose

$$\forall z \in \mathbb{C}, T_n(z) := 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n!} \quad \text{et} \quad S_n(z) := T_n(nz)$$

1. Soit p un entier naturel non nul. Soient $z_1, \dots, z_p$ des nombres complexes de module ≤ 1 . Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des nombres réels > 0 . On suppose que

$$|\lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_p z_p| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_p$$

- a. Démontrer que

$$\lambda_1 (|z_1| - 1) + \cdots + \lambda_p (|z_p| - 1) = 0$$

et en déduire que $z_1, \dots, z_p$ sont des nombres complexes de module exactement 1.

- b. On suppose *dans cette question* que $p = 2$ et $z_1 = 1$. Soit t un nombre réel tel que $z_2 = e^{it}$.

En développant $|\lambda_1 + \lambda_2 e^{it}|^2$, justifier que $z_2 = 1$.

- c. On suppose *dans cette question* que $p = 2$. Montrer que $z_1 = z_2$.

- d. Dans le cas général, démontrer que $z_1 = z_2 = \cdots = z_p$. INDICATION : raisonner par récurrence sur p .

2. Soit P un polynôme de degré $n \geq 2$ à coefficients $a_0, \dots, a_n$ réels :

$$\forall z \in \mathbb{R}, P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

On suppose que $a_0 = a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > 0$.

- a. Déterminer les coefficients du polynôme défini par $\tilde{P} : z \mapsto (z-1)P(z)$.

- b. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) = 0$. Démontrer que $|z| > 1$.

INDICATION : on pourra raisonner par l'absurde en remarquant que $\tilde{P}(z) = 0$ et en utilisant le 1.d.

3. Soit Q un polynôme de degré $n \geq 2$ de coefficients $a_0, \dots, a_n$ réels :

$$\forall z \in \mathbb{C}, Q(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

On suppose que $0 < a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $Q(z) = 0$. Établir que $|z| < 1$.

INDICATION : on pourra se ramener au 2. en remarquant que $\frac{Q(z)}{z^n} = 0$ dans le cas où z est non nul.

4. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $T_n(z) = 0$. Déduire des questions 2. et 3. que $1 < |z| < n$.

INDICATION : on remarquera $S_n\left(\frac{z}{n}\right) = 0$ en vue d'établir la majoration.

CORRIGÉS ➤ NOMBRES COMPLEXES

SOLUTION 1. On utilisera à plusieurs reprises la relation $1 + j + j^2 = 0$ (la somme des racines cubique de l'unité est nulle).

1. L'équation $T(z) = z$ est du second degré de discriminant $\Delta = (2j + 1)^2 + 4 = 4(1 + j + j^2) + 1 = 1$. On en déduit les points fixes de T :

$$\frac{2j + 1 - 1}{2} = j \text{ et } \frac{2j + 1 + 1}{2} = j + 1 = -j^2$$

2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - jz - 1 = (z - j)^2 - j^2 - 1 = (z - j)^2 + j$.

3. a. On reconnaît le cercle de centre $J(j)$ et de rayon R .

- b. Comme $\mathcal{C}_R = \{j + Re^{it}; t \in \mathbb{R}\}$, on déduit de la question 2. que

$$\{T(z); z \in \mathcal{C}_R\} = \{j + R^2 e^{2it}; t \in \mathbb{R}\}$$

On reconnaît le cercle de centre $J(j)$ et de rayon R^2 .

4. On note Ω , Ω_1 et Ω_2 les points d'affixes respectives ω , ω_1 et ω_2 .

- a. D'après la question 2., l'équation $T(z) = \omega$ équivaut à $(z - j)^2 = \omega - j$. Les nombres $\omega_1 - j$ et $\omega_2 - j$ sont donc les racines carrées de $\omega - j$.

- b. ➤ Supposons que $\omega \neq j$ et notons θ un argument de $\omega - j$. Puisque $\arg(\omega_i - j) = \theta/2 [\pi]$ pour tout $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$, les points Ω , Ω_1 et Ω_2 sont alignés *si et seulement si* $\theta/2 = \theta [\pi]$, c'est-à-dire $\theta = 0 [2\pi]$.

➤ Si $\omega = j$, alors $\omega_1 = \omega_2 = j$ et les points Ω , Ω_1 et Ω_2 sont alignés.

L'ensemble recherché est donc la demi-droite définie par le point d'affixe j et le vecteur directeur $\mathbf{u}$.

- c. Reprenons les notations de la question précédente.

➤ Si $\omega = j$, alors le triangle $\Omega\Omega_1\Omega_2$ est réduit à un point donc n'est pas isorectangle.

➤ Supposons que $\omega \neq j$. Le triangle $\Omega\Omega_1\Omega_2$ est isorectangle en Ω *si et seulement si* $|\omega_1 - j| = |\omega_2 - j|$ et $\theta/2 = \pi/2 [\pi]$, c'est-à-dire $|\omega_1 - j| = 1$ et $\theta = \pi [2\pi]$. Ainsi $\omega = j - 1$ est l'unique solution.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 2.

Partie I – Exemples d'homographies

1. a. Soit $z \in \mathbb{U}$ tel que $z \neq 1$. On a donc $\bar{z} = 1/z$ et $\overline{h(z)} = -i \frac{1 + \bar{z}}{1 - \bar{z}} = -i \frac{1 + \frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} = -i \frac{z + 1}{z - 1} = h(z)$.

Ainsi $h(z) \in \mathbb{R}$.

- b. Soit $z \in \mathbb{D}$. On a $h(z) = i \frac{1 + z}{1 - z} = i \frac{(1 + z)(1 - \bar{z})}{|1 - z|^2} = i \frac{1 - |z|^2 + z - \bar{z}}{|1 - z|^2} = i \frac{1 - |z|^2 + 2i \operatorname{Im}(z)}{|1 - z|^2}$.

Ainsi $\operatorname{Im}(h(z)) = \frac{1 - |z|^2}{|z - 1|^2} > 0$ donc $h(z) \in \mathbb{P}$.

c. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On a

$$\begin{aligned} h(z) = z &\iff z = i \frac{1+z}{1-z} \\ &\iff z(1-z) = i(1+z) \\ &\iff z \text{ est solution de (E) : } z^2 + (i-1)z + i = 0 \end{aligned}$$

Le discriminant de (E) vaut $\Delta = (i-1)^2 - 4i = -6i = \delta^2$ avec $\delta = \sqrt{3}(1-i)$. Comme 1 n'est pas solution de (E), les points fixes de h sont les nombres $(1 \pm \sqrt{3}) \frac{1-i}{2}$.

2. a. Soit $z \in \mathbb{R}$. On a $\overline{h(z)} = \frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} = \frac{z-i}{z+i} = \frac{1}{h(z)}$ ainsi $|h(z)| = 1$ et donc $h(z) \in \mathbb{U}$.

b. Soit $z \in \mathbb{P}$. Comme l'axe réel est la médiatrice de AB où $A(i)$ et $B(-i)$, on a $|z-i| < |z+i|$. D'où $h(z) \in \mathbb{D}$.

Partie II – Homographies stabilisant le cercle unité

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}^*$, $h(z) = e^{i\theta}/z$. Soit $z \in \mathbb{U}$. On a $|h(z)| = |e^{i\theta}|/|z| = 1/1 = 1$ et donc $h(z) \in \mathbb{U}$.

2. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ tel que h soit définie par $h(z) = e^{i\theta} \frac{z+\alpha}{\bar{\alpha}z+1}$.

▷ Si $\alpha = 0$, alors h est définie sur $\mathbb{U}$. Si $\alpha \neq 0$, alors h n'est pas défini en un seul point, $-1/\bar{\alpha}$. Comme $\alpha \notin \mathbb{U}$, on a $|-1/\bar{\alpha}| = 1/|\alpha| \neq 1$ et donc h est définie sur $\mathbb{U}$.

▷ Soit $z \in \mathbb{U}$. On a

$$\overline{h(z)} = \overline{e^{i\theta} \frac{z+\alpha}{\bar{\alpha}z+1}} = e^{-i\theta} \frac{\bar{z}+\bar{\alpha}}{\alpha\bar{z}+1} = e^{-i\theta} \frac{\frac{1}{\bar{z}}+\bar{\alpha}}{\frac{1}{\alpha}+1} = \frac{\bar{\alpha}z+1}{e^{i\theta}(\alpha+z)} = \frac{1}{h(z)}$$

Ainsi $|h(z)| = 1$ et donc $h(z) \in \mathbb{U}$.

3. Soit u et v deux complexes tels que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $u + 2\operatorname{Re}(ve^{-i\theta}) = 0$. Écrivons v sous la forme $v = |v|e^{i\phi}$ avec $\phi \in \mathbb{R}$. Pour $\theta = \phi + \pi/2$, on a $\operatorname{Re}(ve^{-i\theta}) = 0$ d'où $u = 0$. Pour $\theta = \phi$, on a $\operatorname{Re}(ve^{-i\theta}) = |v|$.

Ainsi $v = 0$.

4. a. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi $|a|^2 + |b|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{a}be^{-i\theta}) = |c|^2 + |d|^2 + 2\operatorname{Re}(\bar{c}de^{-i\theta})$.

b. En posant $u = |a|^2 + |b|^2 - |c|^2 - |d|^2$ et $v = \bar{a}b - \bar{c}d$, on déduit de la question précédente que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $u + 2\operatorname{Re}(ve^{-i\theta}) = 0$. La question II.3. permet de conclure que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $\bar{a}b = \bar{c}d$.

c. Supposons que $a = 0$. Par la question précédente, on a $\bar{c}d = 0$ (*). Comme $ad - bc = -bc$ est non nul, on a $c \neq 0$, ie $\bar{c} \neq 0$. Ainsi, par (*), on a $d = 0$. On a donc, pour tout z non nul, $h(z) = k/z$ où $k := b/c$. Comme $1 \in \mathbb{U}$, on a $k = h(1) \in \mathbb{U}$. Ainsi, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $k = e^{i\theta}$. On en déduit que h est de type I.

d. On suppose que $a \neq 0$. On a alors $b = \bar{c}d/\bar{a}$ donc $|b| = |c||d|/|a|$. Ainsi

$$|a|^2 + \frac{|c|^2|d|^2}{|a|^2} = |c|^2 + |d|^2$$

c'est-à-dire $|a|^4 + |c|^2|d|^2 - |a|^2|c|^2 - |a|^2|d|^2 = 0$, ie $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $|a|^2 = |c|^2$. Ainsi $|b| = |c||d|/|a| = |d|$. On a donc

$$0 = \bar{a}b - \bar{c}d = \frac{|a|^2}{a}b - \frac{|c|^2}{c}d = |a|^2 \frac{bc - ad}{ac}$$

Comme $|a| \neq 0$, on a $ad - bc = 0$, ce qui est absurde.

- e. D'après la question précédente, $|a| = |d|$. Comme $|a/d| = 1$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $a = de^{i\theta}$. Posons $\alpha = (b/d)e^{-i\theta}$. On a $\bar{c} = \bar{b}\bar{a}/d = \alpha e^{i\theta}\bar{a}$, d'où $c = \bar{\alpha}e^{-i\theta}a$ et donc $c/d = \bar{\alpha}$. Ainsi, pour tout z dans l'ensemble de définition de h , on a

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{(a/d)z + (b/d)}{(c/d)z + 1} = e^{i\theta} \frac{z + \alpha}{\bar{\alpha}z + 1}$$

et h est donc de type II.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 3.

1. a. $\triangleright$ Posons $\delta := \lambda_1(|z_1| - 1) + \dots + \lambda_p(|z_p| - 1)$. Par l'inégalité triangulaire, on a par positivité des λ_i :

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_p = |\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_p z_p| \leq |\lambda_1 z_1| + \dots + |\lambda_p z_p| = \lambda_1 |z_1| + \dots + \lambda_p |z_p|$$

d'où $\delta \geq 0$. Mais comme $\lambda_k(|z_k| - 1) \leq 0$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a aussi $\delta \leq 0$ d'où $\delta = 0$.

- $\triangleright$ Une somme de termes négatifs est nulle si et seulement si tous ses termes sont nuls, ainsi pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\lambda_k(|z_k| - 1) = 0$. Puisque les λ_k sont strictement positifs, on en déduit que $|z_k| = 1$ pour tout k dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

- b. De l'égalité $(\lambda_1 + \lambda_2)^2 = |\lambda_1 + \lambda_2 e^{it}|^2$, on déduit que :

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 = (\lambda_1 + \lambda_2 e^{it})(\lambda_1 + \lambda_2 e^{-it}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_1\lambda_2 \cos t$$

Ainsi $2\lambda_1\lambda_2 \cos t = 2\lambda_1\lambda_2$ ie $\cos t = 1$ puisque $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, d'où $t = 0 [2\pi]$ et $z_2 = 1$.

- c. On a $\lambda_1 + \lambda_2 = |\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2| = |z_1| \left| \lambda_1 + \lambda_2 \frac{z_2}{z_1} \right| = \left| \lambda_1 + \lambda_2 \frac{z_2}{z_1} \right|$. Comme $\frac{z_2}{z_1}$ a un module égal à un, on déduit de la question précédente que $\frac{z_2}{z_1} = 1$, ie $z_2 = z_1$.
- d. Démontrons par récurrence sur $p \geq 2$ la propriété suivante : pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ nombres réels > 0 et $z_1, \dots, z_p$ tous nombres complexes de module égal à un :

$$|\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_p z_p| = \lambda_1 + \dots + \lambda_p \implies z_1 = \dots = z_p$$

- $\triangleright$ La propriété est vraie au rang $p = 2$ par la question précédente.
- $\triangleright$ Soit $p \geq 2$. Supposons la propriété vraie au rang p . Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_{p+1}$ des nombres réels > 0 et $z_1, \dots, z_{p+1}$ des nombres complexes de module égal à un tels que

$$|\lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_{p+1} z_{p+1}| = \lambda_1 + \dots + \lambda_{p+1}$$

Posons $\sigma := \lambda_1 z_1 + \dots + \lambda_p z_p$. On a

$$\lambda_1 + \dots + \lambda_{p+1} = |\sigma + \lambda_{p+1} z_{p+1}| \leq |\sigma| + \lambda_{p+1} |z_{p+1}| = |\sigma| + \lambda_{p+1}$$

On en déduit que $\lambda_1 + \dots + \lambda_p \leq |\sigma|$. D'autre part, on a $|\sigma| \leq \lambda_1 + \dots + \lambda_p$ par l'inégalité triangulaire. Ainsi $|\sigma| = \lambda_1 + \dots + \lambda_p$ et donc $z_1 = \dots = z_p$ par l'hypothèse au rang p . De plus

$$|(\lambda_1 + \dots + \lambda_p)z_1 + \lambda_{p+1}z_{p+1}| = \lambda_1 + \dots + \lambda_p + \lambda_{p+1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \lambda_1 + \dots + \lambda_p > 0 \\ \lambda_{p+1} > 0 \end{cases}$$

d'où, par l'hypothèse au rang 2, $z_{p+1} = z_1$: l'hypothèse est donc vraie au rang $p + 1$.

2. a. Soit $z \in \mathbb{C}$. Puisque $a_1 = a_0$, on a

$$\tilde{P}(z) = zP(z) - P(z) = a_n z^{n+1} + (a_{n-1} - a_n)z^n + \dots + (a_{k-1} - a_k)z^k + \dots + (a_1 - a_2)z^2 - a_0$$

b. Raisonnons par l'absurde en supposant que $|z| \leq 1$. Comme $\tilde{P}(z) = 0$, on a

$$a_n z^{n+1} + (a_{n-1} - a_n)z^n + \dots + (a_{k-1} - a_k)z^k + \dots + (a_1 - a_2)z^2 = a_0$$

En particulier, puisque $a_0 = a_1$:

$$\left| a_n z^{n+1} + (a_{n-1} - a_n)z^n + \dots + (a_{k-1} - a_k)z^k + \dots + (a_1 - a_2)z^2 \right| = a_1 = |a_1| = a_n + \sum_{k=2}^n (a_{k-1} - a_k)$$

avec $a_n > 0$, $|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \leq 1$, $|z^k| = |z|^k \leq 1$ et $a_{k-1} - a_k > 0$ pour tout k dans $\llbracket 2, n \rrbracket$. On déduit de la question 1. que $z^k = z^2$ pour tout k dans $\llbracket 2, n+1 \rrbracket$. Puisque $n \geq 2$, on a en particulier $z^3 = z^2$ ie $z = 0$ ou $z = 1$. Comme $P(0) = a_0 > 0$ et $P(1) = a_n + \dots + a_0 > 0$, on aboutit à une absurdité.

3. Supposons $z \neq 0$. On a alors

$$0 = \frac{Q(z)}{z^n} = a_0 \left(\frac{1}{z} \right)^n + \dots + a_{n-1} \frac{1}{z} + a_n = 0$$

Comme $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$, on déduit de la question 2. que $\left| \frac{1}{z} \right| > 1$, ie $|z| < 1$.

4. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $T_n(z) = 0$.

▷ Comme $\frac{1}{0!} = \frac{1}{1!}$ et $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $\frac{1}{(k-1)!} > \frac{1}{k!}$, on déduit de la question 1. que $|z| > 1$.

▷ Posons $y := \frac{z}{n}$. On remarque que

$$0 = S_n(y) = 1 + ny + \frac{n^2}{2}y^2 + \dots + \frac{n^{n-1}}{(n-1)!}y^{n-1} + \frac{n^n}{n!}y^n$$

Posons $a_k = \frac{n^k}{k!}$ pour tout k dans $\llbracket 0, n \rrbracket$. On a $a_n = a_{n-1}$ et pour tout $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, $a_{k-1} < a_k$ car :

$$\frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{n^k(k-1)!}{n^{k-1}k!} = \frac{n}{k} > 1$$

On déduit donc de la question 3. que $|y| < 1$, ie $|z| < n$.

Voir l'énoncé.