▷ PROBLÈME 1 : Sujet de niveau élémentaire ♪.

Les thèmes principaux sont les injections, les surjections, les bijections et l'ensemble $\mathscr{P}(E)$.

▷ PROBLÈME 2 : Sujet de difficulté moyenne ♪♪.

Les thèmes centraux sont les injections, les surjections, les bijections et l'ensemble $\mathscr{P}(E)$.

▷ PROBLÈME 3 : Sujet avec des questions variant de ♪ à ♪♪♪. Les notions abordées sont plus abstraites que dans les deux problèmes précédents.

Les thèmes principaux sont les filtres et l'ensemble $\mathscr{P}(E)$.

PROBLÈME 1. **IND § SOL** *Étude d'une application*

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E et l'application f définie par

$$\begin{aligned} f : \mathscr{P}(E) &\longrightarrow \mathscr{P}(E) \\ X &\longmapsto (X \cap A) \cup B \end{aligned}$$

1. a. Calculer $f(\varnothing)$, $f(A)$, $f(B)$ et $f(E)$.

b. Montrer que f est croissante pour l'inclusion, ie $\forall (X_1, X_2) \in \mathscr{P}(E)^2,\ X_1 \subset X_2 \implies f(X_1) \subset f(X_2)$.

c. Soit $Y \in \mathscr{P}(E)$. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

i. Y admet au moins un antécédent par f ; **ii.** $B \subset Y \subset A \cup B$; **iii.** $f(Y) = Y$.

d. En déduire que $f \circ f = f$.

2. a. Démontrer que f est injective *si et seulement si* $(A, B) = (E, \varnothing)$.

b. Déterminer une condition nécessaire et suffisante de surjectivité de f.

3. a. Résoudre l'équation $f(X) = A$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

b. Résoudre l'équation $f(X) = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (A, B) pour que f soit constante.

PROBLÈME 2. IND § SOL *Théorème de Cantor-Bernstein et dénombrabilité*

Deux ensembles sont dits équipotents s'il existe une bijection de l'un dans l'autre.

L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein-Schröder :

> *Soit* E *et* F *deux ensembles. S'il existe des injections de* E *dans* F *et de* F *dans* E*, alors* E *et* F *sont équipotents.*

1. Soit E un ensemble et $\phi : \mathscr{P}(\mathrm{E}) \to \mathscr{P}(\mathrm{E})$ croissante, ie $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{P}(\mathrm{E})^2,\ \mathrm{A} \subset \mathrm{B} \implies \phi(\mathrm{A}) \subset \phi(\mathrm{B})$.

On pose $\mathscr{D} := \left\{\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})\,;\, \mathrm{A} \subset \phi(\mathrm{A})\right\}$.

a. Vérifier que $\mathscr{D}$ est non vide.

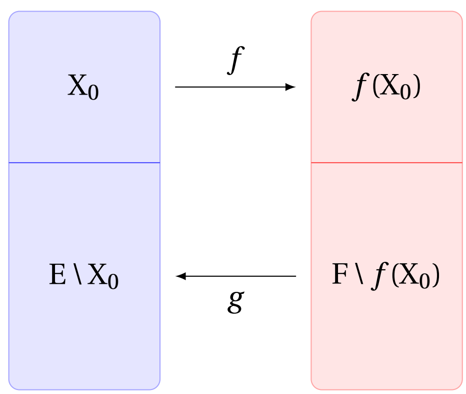
b. On pose $\mathrm{X}_0 := \bigcup\limits_{\mathrm{A}\in\mathscr{D}} \mathrm{A}$. Montrer que $\mathrm{X}_0 \in \mathscr{D}$.

c. Établir que X_0 est un point fixe de ϕ.

2. Soit E et F des ensembles, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ des injections.

a. Montrer que l'application $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{E} \setminus g\left(\mathrm{F} \setminus f(\mathrm{X})\right)$ de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ dans lui-même est croissante pour l'inclusion.

b. Établir l'existence d'une bijection de E sur F. INDICATION : On méditera la figure ci-dessous :



3. Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est équipotent à $\mathbb{N}$. Le théorème de Cantor-Bernstein-Schröder permet de prouver qu'un ensemble E est dénombrable en se contentant de trouver des injections de E dans $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{N}$ dans E.

a. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable et en déduire que $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ sont équipotents.

b. Établir que $(n, m) \mapsto 2^n 3^m$, définie de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, est injective. En déduire que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

c. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

PROBLÈME 3. IND § SOL *Filtres et ultra-filtres*

Dans tout ce problème, E désigne un ensemble non vide.

Une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ est appelée un filtre sur E si elle vérifie les quatre propriétés suivantes :

- ▷ $(\mathscr{P}_1)$: $\mathscr{F} \neq \varnothing$;
- ▷ $(\mathscr{P}_2)$: $\forall (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathscr{F}^2$, $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} \in \mathscr{F}$;
- ▷ $(\mathscr{P}_3)$: $\forall \mathrm{X} \in \mathscr{F}$, $\forall \mathrm{Y} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$, $(\mathrm{X} \subset \mathrm{Y} \implies \mathrm{Y} \in \mathscr{F})$;
- ▷ $(\mathscr{P}_4)$: $\varnothing \notin \mathscr{F}$.

Partie I – Exemples et généralités

1. Dans cette question, et dans cette question seulement, on suppose que E est formé de trois éléments distincts : $\mathrm{E} = \{a, b, c\}$.

a. Expliciter $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.

b. Déterminer si les parties suivantes sont ou non des filtres sur E, en justifiant votre réponse.

i. $\mathscr{F}_1 = \varnothing$;

ii. $\mathscr{F}_3 = \mathscr{P}(\mathrm{E})$;

iii. $\mathscr{F}_5 = \big\{\{a\}, \{b, c\}\big\}$;

iv. $\mathscr{F}_2 = \{\mathrm{E}\}$;

v. $\mathscr{F}_4 = \big\{\{a\}, \{a, c\}\big\}$;

vi. $\mathscr{F}_6 = \big\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\big\}$.

c. Déterminer, en justifiant votre réponse, tous les filtres sur E.

INDICATION : On pourra commencer par rechercher les filtres contenant au moins un singleton.

2. On revient désormais au cas général. L'ensemble $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ est-il un filtre sur E ?

3. À quelle condition sur E l'ensemble $\mathscr{P}(\mathrm{E}) \setminus \{\varnothing\}$ est-il un filtre sur E ?

4. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur E. Montrer que $\mathrm{E} \in \mathscr{F}$.

5. Que dire d'une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ qui vérifie $(\mathscr{P}_3)$ mais pas $(\mathscr{P}_4)$?

6. Soit A une partie non vide de E. On note $\mathscr{F}_\mathrm{A} = \{\mathrm{X} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})\,;\, \mathrm{A} \subset \mathrm{X}\}$.

a. Montrer que $\mathscr{F}_\mathrm{A}$ est un filtre sur E, appelé filtre principal engendré par A. Un filtre $\mathscr{F}$ sur E est dit principal s'il existe une partie A de E, non vide, telle que $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\mathrm{A}$.

b. Soient A et B deux parties non vides de E. Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B} \iff \mathscr{F}_\mathrm{A} = \mathscr{F}_\mathrm{B}$.

7. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathscr{F}^x = \big\{\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathbb{R})\,;\, \exists \varepsilon > 0,\,]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \mathrm{A}\big\}$ ($\mathscr{F}^x$ est l'ensemble des voisinages de x).

a. Montrer que $\mathscr{F}^x$ est un filtre sur $\mathbb{R}$.

b. Prouver que $\mathscr{F}^x$ n'est pas un filtre principal.

8. On note $\mathscr{N}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dont le complémentaire dans $\mathbb{N}$ est un ensemble fini.

a. Montrer que $\mathscr{N}$ est un filtre sur $\mathbb{N}$. Il est appelé filtre de Fréchet.

b. Déterminer si $\mathscr{N}$ est ou non un filtre principal.

9. Si E est un ensemble fini, montrer que tout filtre sur E est un filtre principal.

Partie II – Ultrafiltres

Un filtre $\mathscr{F}$ sur E est appelé un ultrafiltre si pour tout filtre $\mathscr{G}$ sur E, $\mathscr{F} \subset \mathscr{G} \implies \mathscr{F} = \mathscr{G}$.

1. a. Montrer que, pour toutes parties A et B non vides de E, $\mathrm{B} \subset \mathrm{A} \iff \mathscr{F}_{\mathrm{A}} \subset \mathscr{F}_{\mathrm{B}}$.

b. Soit A une partie non vide de E. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\mathscr{F}_{\mathrm{A}}$ soit un ultrafiltre sur E.

2. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur E, et soit $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$ telle que $\mathrm{A} \notin \mathscr{F}$.

a. Prouver que $\mathscr{G} = \left\{ \mathrm{X} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})\,;\, \mathrm{A} \cup \mathrm{X} \in \mathscr{F} \right\}$ est un filtre sur E tel que $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ et $\overline{\mathrm{A}} \in \mathscr{G}$.

b. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur E. En utilisant la question précédente, démontrer que

$$\mathscr{F} \text{ est un ultrafiltre } \iff \forall \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}),\ \left(\mathrm{A} \in \mathscr{F} \text{ ou } \overline{\mathrm{A}} \in \mathscr{F}\right)$$

c. Les filtres $\mathscr{F}^x$ et $\mathscr{N}$ de la partie I sont-ils des ultrafiltres ?

Partie III – Limite selon un filtre

Soit E un ensemble non vide, et $g : \mathrm{E} \to \mathbb{R}$ une application définie sur E, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Si $\mathscr{F}$ est un filtre sur E, on appelle image directe de $\mathscr{F}$ par g, et on note $g^\star(\mathscr{F})$ la partie de $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ définie par :

$$g^\star(\mathscr{F}) := \left\{ \mathrm{X} \subset \mathbb{R}\,;\, g^{-1}(\mathrm{X}) \in \mathscr{F} \right\} \text{ — on rappelle que } g^{-1}(\mathrm{X}) := \left\{ u \in \mathrm{E}\,;\, g(u) \in \mathrm{X} \right\}$$

Soit $b \in \mathbb{R}$. Pour $\mathscr{F}$ un filtre sur E, on note

$$\lim_{\mathscr{F}} g = b$$

lorsque $\mathscr{F}^b \subset g^\star(\mathscr{F})$, où $\mathscr{F}^b$ est le filtre qui a été défini à la question I.7.

1. Montrer que, avec les notations ci-dessus, $g^\star(\mathscr{F})$ est un filtre sur $\mathbb{R}$.

2. Soit A une partie non vide de E.

Prouver que $\lim\limits_{\mathscr{F}_{\mathrm{A}}} g = b$ si et seulement si la restriction de g à A est constante égale à b.

3. Dans cette question, on suppose que $\mathrm{E} = \mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$. Prouver que

$$\lim_{\mathscr{F}^a} g = b \iff g(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$$

4. Dans cette question, on suppose que $\mathrm{E} = \mathbb{N}$, et qu'on dispose d'une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, c'est-à-dire d'une suite à valeurs réelles. Pour $n \in \mathbb{N}$, on notera donc u_n plutôt que $u(n)$. Prouver que

$$\lim_{\mathscr{N}} u = b \iff u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b \quad \text{(le filtre } \mathscr{N} \text{ étant celui de Fréchet, défini à la question I.8.)}$$

UN PEU DE CULTURE

Tout comme la notion de voisinage, les filtres permettent d'unifier les différentes définitions des limites, mais ils présentent l'avantage d'offrir une extension facile et élégante de la notion de limite à des cadres beaucoup plus abstraits, tels que la théorie des ensembles.

Corrigés ~ Théorie des ensembles

Solution 1.

1. a. On a clairement $f(\varnothing) = B$, $f(A) = A \cup B$, $f(B) = B$ et $f(E) = A \cup B$.

b. Soit $(X_1, X_2) \in \mathscr{P}(E)^2$ tel que $X_1 \subset X_2$.
Comme $X_1 \cap A \subset X_2 \cap A$, on a $(X_1 \cap A) \cup B \subset (X_2 \cap A) \cup B$, ie $f(X_1) \subset f(X_2)$.

c. On prouve les implications **i.** $\implies$ **ii.**, **ii.** $\implies$ **iii.** puis **iii.** $\implies$ **i.**

- ▷ **i.** $\implies$ **ii.** Soit $X \subset E$ tel que $Y = f(X) = (X \cap A) \cup B$. On a alors $B \subset Y$, d'où $Y \subset A \cup B$.
- ▷ **ii.** $\implies$ **iii.** Soit $Y \subset E$ tel que $B \subset Y \subset A \cup B$. On a $Y \cup B = Y$ et donc

$$f(Y) = (A \cap Y) \cup B = (A \cup B) \cap (Y \cup B) = (A \cup B) \cap Y = Y$$

- ▷ **iii.** $\implies$ **i.** Cette implication est banale.

d. Soit $Y \subset E$. Comme $f(Y)$ admet un antécédent par f, on déduit de la question précédente que $f\big(f(Y)\big) = Y$. Ainsi, $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$.

2. a. ▷ Cas 1 : $B \not\subset A$. L'équation $f(X) = A$, ie $(X \cap A) \cup B = A$ n'a pas de solution dans $\mathscr{P}(E)$;

▷ Cas 2 : $B \subset A$. L'ensemble des solutions est $\{X \subset E\,;\, A \setminus B \subset X\}$ car :

$$\begin{aligned} f(X) = A &\iff (A \cup B) \cap (X \cup B) = A \\ &\iff A \cap (X \cup B) = A \\ &\iff A \subset X \cup B \\ &\iff A \setminus B \subset X \end{aligned}$$

b. Soit $X \in \mathscr{P}(E)$. On a $f(X) = B$ *si et seulement si* $(X \cap A) \cup B = B$, *si et seulement si* $X \cap A \subset B$, *si et seulement si* $X \in \mathscr{P}(\overline{A} \cup B)$.

3. a. Prouvons que f est injective *si et seulement si* $(A, B) = (E, \varnothing)$.

- ▷ Supposons f injective. Comme $f(A) = f(E)$ et $f(B) = f(\varnothing)$, on a $(A, B) = (E, \varnothing)$.
- ▷ Réciproquement, si $(A, B) = (E, \varnothing)$, $f = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$ donc f est injective.

b. Supposons f surjective. Comme $f(f(X)) = f(X)$ pour tout $X \subset E$, on en déduit que $f = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$ donc f injective, d'où $(A, B) = (E, \varnothing)$. Réciproquement, si $(A, B) = (E, \varnothing)$, alors $f = \mathrm{id}_{\mathscr{P}(E)}$ donc f est surjective. Ainsi f est surjective *si et seulement si* $(A, B) = (E, \varnothing)$.

> **Commentaire** *Plus généralement, si* $\phi : A \to A$ *vérifie* $\phi \circ \phi = \phi$*, alors* ϕ *est injective* si et seulement si ϕ *est surjective, et dans ce cas* $\phi = \mathrm{id}_A$.

4. Comme f est croissante, f es constante *si et seulement si* $f(\varnothing) = f(E)$, ie $B = A \cup B$, ce qui équivaut à $A \subset B$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 2.

1. a. On a clairement $\varnothing \in \mathscr{D}$.

b. Soit $A \in \mathscr{D}$. On a $A \subset A_0$, donc par croissance de ϕ, on a $\phi(A) \subset \phi(A_0)$. Ainsi,

$$\bigcup_{A \in \mathscr{D}} \phi(A) \subset \phi(A_0)$$

Comme $A \subset \phi(A)$ pour tout $A \in \mathscr{D}$, on obtient $A_0 \subset \phi(A_0)$ d'où $A_0 \in \mathscr{D}$.

c. Montrons que $\phi(A_0) \subset A_0$ par l'absurde : supposons l'existence de $x_0 \in \phi(A_0)$ tel que $x_0 \notin A_0$. Posons $A_1 := A_0 \cup \{x_0\}$. Par croissance de ϕ, on a $\phi(A_0) \subset \phi(A_1)$. Puisque $A_1 \subset \phi(A_0)$, on a aussi $A_1 \subset \phi(A_1)$ d'où $A_1 \in \mathscr{D}$. On en déduit que $A_1 \subset A_0$ et donc $x_0 \in A_0$: c'est absurde.

2. a. Notons ϕ l'application $X \mapsto E \setminus g\big(F \setminus f(X)\big)$ de $\mathscr{P}(E)$ dans lui-même. Soient X et X' des parties de E telles que $X \subset X'$. Comme $f(X) \subset f(X')$, on a $F \setminus f(X') \subset F \setminus f(X)$ d'où $g\big(F \setminus f(X')\big) \subset g\big(F \setminus f(X)\big)$ et donc $E \setminus g\big(F \setminus f(X)\big) \subset E \setminus g\big(F \setminus f(X')\big)$. Ainsi ϕ est croissante.

b. On déduit de la question 1. que ϕ admet un point fixe X_0. Ainsi, $E \setminus X_0 = g\big(F \setminus f(X_0)\big)$. La fonction g étant injective, elle réalise donc une bijection de $F \setminus f(X_0)$ sur $E \setminus X_0$ que nous noterons $\widetilde{g}$. Soit $h : E \to F$ la fonction définie par

$$\forall x \in E,\ \ h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in X_0 \\ \widetilde{g}^{-1}(x) & \text{si } x \in E \setminus X_0 \end{cases}$$

Comme f réalise une bijection de X_0 sur $f(X_0)$ et $\widetilde{g}^{-1}$ une bijection de $E \setminus X_0$ sur $F \setminus f(X_0)$, la fonction h est bijective.

3. a. L'application f définie de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Z}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \ f(n) = \begin{cases} -n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ (n+1)/2 & \text{Si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

est clairement bijective. L'application de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ définie par $(n, m) \mapsto (f(n), m+1)$ est bijective.

b. L'application $(n, m) \mapsto 2^n 3^m$, définie de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, est injective par unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers dans $\mathbb{N}$. Comme l'application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^2$ définie par $n \mapsto (n, n)$ est clairement injective, on déduit du théorème de Cantor-Bernstein-Schröder que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

c. L'application α de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ par $p/q \mapsto (p, q)$ (l'écriture sous forme irréductible p/q avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ est unique) est injective. Comme $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est équipotent à $\mathbb{N}^2$ (cf. le 3.a.) qui est dénombrable (cf. le 3.b.), $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable et il existe donc une bijection β de $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$. L'application $\beta \circ \alpha$ est donc une injection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{N}$. Comme $\mathbb{N}$ s'injecte naturellement dans $\mathbb{Q}$ par l'inclusion, on déduit du théorème de Cantor-Bernstein-Schröder que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 3.

Partie I – Généralités et premiers exemples

1. a. On a $\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \big\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\big\}$.

b. i. $\mathscr{F}_1$ n'est pas un filtre puisqu'il contredit la propriété $(\mathscr{P}_1)$.

ii. $\mathscr{F}_2$ est un filtre.

- ▷ Il est non vide puisqu'il contient E.
- ▷ Il ne contient pas l'ensemble vide.
- ▷ Si X et Y sont deux éléments de $\mathscr{F}_2$, alors $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \mathrm{E}$, et donc $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \mathrm{E} \in \mathscr{F}_2$.
- ▷ Enfin, si $\mathrm{X} \in \mathscr{F}_2$, et si $\mathrm{Y} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$ est tel que $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$, alors $\mathrm{Y} = \mathrm{X} = \mathrm{E}$, donc $\mathrm{Y} \in \mathscr{F}_2$.

iii. On a $\varnothing \in \mathscr{F}_3$, donc $\mathscr{F}_3$ n'est pas un filtre puisqu'il ne satisfait pas $(\mathscr{P}_4)$.

iv. $\mathscr{F}_4$ n'est pas un filtre, car $\{a\} \subset \{a,b\}$, mais $\{a,b\} \notin \mathscr{F}_4$, si bien que $\mathscr{F}_4$ ne satisfait pas $(\mathscr{P}_3)$.

v. On a $\{a\} \in \mathscr{F}_5$ et $\{b,c\} \in \mathscr{F}_5$. Donc si $\mathscr{F}_5$ était un filtre, on aurait $\varnothing = \{a\} \cap \{b,c\} \in \mathscr{F}_5$, ce qui est absurde. Donc $\mathscr{F}_5$ n'est pas un filtre.

vi.
- ▷ $\mathscr{F}_6$ est non vide et ne contient pas l'ensemble vide.
- ▷ De plus, $\mathscr{F}_6$ est formé de toutes les parties de E contenant a.
- ▷ L'intersection de deux telles parties contient a, donc est dans $\mathscr{F}_6$, et si $\mathrm{X} \in \mathscr{F}_6$ et si $\mathrm{Y} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$ est tel $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$, alors $a \in \mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$, donc $a \in \mathrm{Y}$, si bien que $\mathrm{Y} \in \mathscr{F}_6$.
- ▷ Donc $\mathscr{F}_6$ est bien un filtre sur E.

c. Un filtre ne peut contenir deux singletons distincts, car leur intersection est vide et un filtre ne contient pas l'ensemble vide. Si un filtre $\mathscr{F}$ contient un singleton (par exemple $\{a\}$), alors par $(\mathscr{P}_3)$ il contient toutes les parties contenant a. De plus, il ne peut contenir de parties X ne contenant pas a, car alors $\varnothing = \mathrm{X} \cap \{a\} \in \mathscr{F}$. Donc un filtre contenant $\{a\}$ ne peut être que l'ensemble des parties contenant $\{a\}$. Donc les filtres sur E contenant un singleton sont

$$\big\{\{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\big\}\ ,\ \big\{\{b\}, \{b,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c\}\big\} \quad \text{et} \quad \big\{\{c\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\big\}$$

Si un filtre $\mathscr{F}$ ne contient pas de singleton, mais contient une partie de E à deux éléments, par exemple $\{a,b\}$, alors il ne contient ni $\{b,c\}$ (car on aurait $\{b\} = \{a,b\} \cap \{b,c\} \in \mathscr{F}$), ni $\{a,c\}$. Donc il ne contient que $\{a,b\}$ et $\{a,b,c\} = \mathrm{E}$. Il n'existe donc que trois filtres de cette sorte, qui sont $\big\{\{a,b\}, \{a,b,c\}\big\}$, $\big\{\{a,c\}, \{a,b,c\}\big\}$ et $\big\{\{b,c\}, \{a,b,c\}\big\}$. Enfin, $\big\{\{a,b,c\}\big\} = \{\mathrm{E}\}$ est un filtre sur E.

2. L'ensemble $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ vérifie à la fois $(\mathscr{P}_1)$, $(\mathscr{P}_2)$ et $(\mathscr{P}_3)$, mais $\varnothing \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$, donc il ne s'agit pas d'un filtre.

3. Prouvons que $\mathscr{P}(\mathrm{E}) \setminus \{\varnothing\}$ est un filtre sur E si et seulement si E est un singleton.

▷ Si $\mathrm{E} = \{x\}$ est un singleton, alors $\mathscr{P}(\mathrm{E}) \setminus \{\varnothing\} = \{\{x\}\}$. Donc $\mathscr{P}(\mathrm{E}) \setminus \{\varnothing\}$ est non vide, et ne contient pas l'ensemble vide. Par ailleurs, si X et Y sont deux éléments de $\mathscr{P}(\mathrm{E}) \setminus \{\varnothing\}$, alors $\mathrm{X} = \mathrm{Y} = \{x\}$, et donc $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \{x\} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}) \setminus \{\varnothing\}$. Enfin, si $\mathrm{X} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}) \setminus \{\varnothing\}$ et si $\mathrm{Y} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$ est tel que $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$, alors $\mathrm{X} = \{x\} = \mathrm{E}$, et donc nécessairement $\mathrm{Y} = \mathrm{E}$. Donc $\mathrm{Y} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}) \setminus \{\varnothing\}$, qui est donc bien un filtre sur E.

- ▷ Inversement, supposons que E n'est pas un singleton, c'est-à-dire qu'il contient au moins deux éléments distincts x et y. Alors $\{x\} \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ et $\{y\} \in \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$. Or $\{x\} \cap \{y\} = \varnothing \notin \mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$. Donc la propriété $(\mathscr{P}_2)$ n'est pas vérifiée par $\mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$, qui n'est donc pas un filtre sur E.

Ainsi, $\mathscr{P}(E) \setminus \{\varnothing\}$ est un filtre si et seulement si E est un singleton.

4. Puisque $\mathscr{F} \neq \varnothing$, il existe $A \in \mathscr{F}$. Et alors $A \subset E$, si bien que par $(\mathscr{P}_3)$, $E \in \mathscr{F}$.

5. Si $\mathscr{F}$ est une partie de $\mathscr{P}(E)$ qui vérifie $(\mathscr{P}_3)$ et pas $(\mathscr{P}_4)$, alors $\varnothing \in \mathscr{F}$. Et alors pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$, on a $\varnothing \subset X$, si bien que $X \in \mathscr{F}$. Ainsi, $\mathscr{P}(E) \subset \mathscr{F}$, et donc $\mathscr{F} = \mathscr{P}(E)$.

6. a. Puisque $A \subset A, A \in \mathscr{F}_A$, et donc $\mathscr{F}_A \neq \varnothing$. Puisque $A \neq \varnothing$, on n'a pas $A \subset \varnothing$, et donc $\varnothing \notin \mathscr{F}_A$. Soient $X, Y \in \mathscr{F}_A$. Alors $A \subset X$ et $A \subset Y$. Donc $A \subset X \cap Y$, si bien que $X \cap Y \in \mathscr{F}_A$. Enfin, si $X \in \mathscr{F}_A$, et si Y est une partie de E telle que $X \subset Y$, alors $A \subset X \subset Y$ donc [6] $A \subset Y$, si bien que $Y \in \mathscr{F}_A$. Donc $\mathscr{F}_A$ est bien un filtre sur E.

b. Si $A = B$, il est évident que $\mathscr{F}_A = \mathscr{F}_B$. Inversement, supposons que $\mathscr{F}_A = \mathscr{F}_B$. Alors $A \in \mathscr{F}_A$, et donc $A \in \mathscr{F}_B$. Ceci signifie donc que $B \subset A$. On prouve de même que $B \in \mathscr{F}_A$, et donc que $A \subset B$, si bien que par double inclusion, $A = B$.

7. a. Puisque $]x-1, x+1[\in \mathscr{F}^x, \mathscr{F}^x \neq \varnothing$.

- ▷ Soient X_1 et X_2 deux élléments de $\mathscr{F}^x$. Alors il existe ε_1 et ε_2 deux réels strictement positifs tels que $]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[\subset X_1$ et $]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[\subset X_2$. Soit alors $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) > 0$, de sorte que

$$]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[\quad \text{et} \quad]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[$$

Alors $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset]x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1[\cap]x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2[\subset X_1 \cap X_2$. Et donc $X_1 \cap X_2 \in \mathscr{F}^x$.

- ▷ Soit $X \in \mathscr{F}^x$, et soit $Y \in \mathscr{P}(E)$ tel que $X \subset Y$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset X$. Alors [7] $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset Y$, si bien que $Y \in \mathscr{F}^x$. Enfin, $X \in \mathscr{F}^x$, si $\varepsilon > 0$ est tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, alors $x \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset X$, et donc $x \in X$. En particulier, $X \neq \varnothing$, et donc $\varnothing \notin \mathscr{F}^x$.

Donc tout ceci prouve bien que $\mathscr{F}^x$ est un filtre sur E.

b. Supposons par l'absurde que $\mathscr{F}^x$ soit un filtre principal, et soit $A \in \mathscr{P}(E) \neq \varnothing$ tel que $\mathscr{F}^x = \mathscr{F}_A$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0, A \subset]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$. Par conséquent, si $y \in A$, alors pour tout $\varepsilon > 0, y \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$, soit encore $|x-y| < \varepsilon$. On en déduit que $x - y = 0$. Nous venons donc de prouver que $y \in A \implies y = x$. Et donc $A \subset \{x\}$. Puisque $A \neq \varnothing$, alors $A = \{x\}$. Donc si $\mathscr{F}^x$ est principal, alors c'est $\mathscr{F}_{\{x\}}$. Or, $\{x\} \in \mathscr{F}_{\{x\}}$, alors que $\{x\} \notin \mathscr{F}^x$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0,]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ est infini, alors que $\{x\}$ est fini, donc on ne saurait avoir $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \{x\}$. Donc $\mathscr{F}_{\{x\}} \neq \mathscr{F}^x$, si bien que $\mathscr{F}^x$ n'est pas un filtre principal.

8. a. L'ensemble $\mathbb{N}^*$ a un complémentaire de cardinal 1, donc $\mathbb{N}^* \in \mathscr{N}$, si bien que $\mathscr{N}$ est non vide. Soit X et Y deux éléments de $\mathscr{N}$. Alors $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ sont des ensembles finis. Donc $\overline{X} \cup \overline{Y}$ est également fini. Or il s'agit de $\overline{X \cap Y}$, si bien que $X \cap Y \in \mathscr{N}$. Soit $X \in \mathscr{N}$ et soit $Y \in \mathscr{P}(\mathbb{N})$ telle que $X \subset Y$. Alors $\overline{Y} \subset \overline{X}$. Puisque $\overline{X}$ est fini, il en est de même de $\overline{Y}$. Et donc $Y \in \mathscr{N}$. Enfin, $\overline{\varnothing} = \mathbb{N}$, qui est infini, donc $\varnothing \notin \mathscr{N}$. Donc $\mathscr{N}$ est bien un filtre sur $\mathbb{N}$.

b. Soit A une partie non vide de $\mathbb{N}$, et soit $x \in A$ (et il existe un tel x car A est supposée non vide). Posons alors $X = \mathbb{N} \setminus \{x\} = \overline{\{x\}}$. Alors il est évident que X est dans $\mathscr{F}_{\mathbb{N}}$, et puisque $x \in A$ et $x \notin X, A \not\subset X$, de sorte que $X \notin \mathscr{F}_A$. Et donc $\mathscr{F}_{\mathbb{N}} \neq \mathscr{F}_A$, et ceci étant vrai pour toute partie non vide A, $\mathscr{F}_{\mathbb{N}}$ n'est pas principal.

9. Si E est fini, alors $\mathscr{P}(E)$ l'est aussi. Soit alors $\mathscr{F}$ un filtre sur E, qui est nécessairement lui aussi fini, comme toute partie de $\mathscr{P}(E)$ Une récurrence facile prouve que l'intersection d'un nombre fini d'élements de $\mathscr{F}$ est encore dans $\mathscr{F}$. Donc en particulier, $A = \bigcap_{X \in \mathscr{F}} X \in \mathscr{F}$, et donc est non vide. Prouvons alors que $\mathscr{F} = \mathscr{F}_A$, le filtre principal engendré par A. Il est évident que pour tout $X \in \mathscr{F}, A \subset X$, donc $X \in \mathscr{F}_A$. Et inversement, si $X \in \mathscr{F}_A$, alors $A \subset X$, si bien que $X \in \mathscr{F}$. Et donc par double inclusion, $\mathscr{F} = \mathscr{F}_A$. Ceci prouve donc bien que tout filtre sur un ensemble fini est principal.

Partie II – Ultrafiltres

1. a. Supposons que $A \subset B$. Alors pour tout $X \in \mathscr{F}_B$, on a $B \subset X$, et donc $A \subset X$. Par définition, cela signifie que $X \in \mathscr{F}_A$, et donc on a bien $\mathscr{F}_B \subset \mathscr{F}_A$. Inversement, supposons que $\mathscr{F}_B \subset \mathscr{F}_A$. Alors $B \in \mathscr{F}_B$, si bien que $B \in \mathscr{F}_A$. Et donc, par définition de $\mathscr{F}_A$, cela signifie que $A \subset B$.

b. On va établir que $\mathscr{F}_A$ est un ultrafiltre *si et seulement si* A est un singleton.

- ▷ Supposons que $\mathscr{F}_A$ soit un ultrafiltre. Comme A est non vide, $\exists a \in A$. Comme $\{a\} \subset A$, on déduit de la question précédente que $\mathscr{F}_A \subset \mathscr{F}_{\{a\}}$. Puisque $\mathscr{F}_A$ est un ultrafiltre, on a donc $\mathscr{F}_A = \mathscr{F}_{\{a\}}$. On déduit à nouveau de la question précédente que $A \subset \{a\}$, d'où $A = \{a\}$.
- ▷ Soit $a \in E$ et $A := \{a\}$. Soit $\mathscr{G}$ un filtre sur E tel que $\mathscr{F}_A \subset \mathscr{G}$. Soit $X \in \mathscr{G}$. Puisque $\{a\} \in \mathscr{F}_A, \{a\} \in \mathscr{G}$. Et donc $X \cap \{a\} \in \mathscr{G}$. Or on a $X \cap \{a\} \subset \{a\}$. Puisque par ailleurs tout élément de $\mathscr{G}$ est non vide, $X \cap \{a\} \neq \varnothing$, si bien que $X \cap \{a\} = \{a\}$. Ainsi, $A = \{a\} \subset X$, si bien que $X \in \mathscr{F}_A$. Et donc ceci prouve que $\forall X \in \mathscr{G}, X \in \mathscr{F}_A$, soit encore $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}_A$. On a donc $\mathscr{G} = \mathscr{F}_A$ par double inclusion. Ainsi $\mathscr{F}_A$ est bien un ultrafiltre.

2. a. Puisque $E \in \mathscr{F}, A \cup E = E \in \mathscr{F}$, si bien que $E \in \mathscr{G}$, et donc $\mathscr{G} \neq \varnothing$.

- ▷ Soit $X_1, X_2 \in \mathscr{G}$. Alors $A \cup X_1 \in \mathscr{F}$ et $A \cup X_2 \in \mathscr{F}$, si bien que $A \cup (X_1 \cap X_2) = (A \cup X_1) \cap (A \cup X_2) \in \mathscr{F}$, car intersection de deux éléments de $\mathscr{F}$. Donc $X_1 \cap X_2 \in \mathscr{G}$. Donc $\mathscr{G}$ vérifie $(\mathscr{P}_2)$.
- ▷ Soit $X \in \mathscr{G}$ et soit $Y \in \mathscr{P}(E)$ telle que $X \subset Y$. Alors $A \cup X \subset A \cup Y$, et puisque $A \cup X \in \mathscr{F}$, alors $A \cup Y \in \mathscr{F}$. Donc $Y \in \mathscr{G}$, si bien que $\mathscr{G}$ vérifie $(\mathscr{P}_3)$.
- ▷ Enfin, puisque $A \notin \mathscr{F}, A \cup \varnothing = A \notin \mathscr{F}$ et donc $\varnothing \notin \mathscr{G}$. Donc $\mathscr{G}$ vérifie $(\mathscr{P}_4)$. Ainsi $\mathscr{G}$ est bien un filtre sur E.
- ▷ Il contient $\mathscr{F}$ puisque pour tout $X \in \mathscr{F}, X \subset A \cup X$ et donc $A \cup X \in \mathscr{F}$, si bien que $X \in \mathscr{G}$.
- ▷ Enfin, $A \cup \overline{A} = E \in \mathscr{F}$, et donc $\overline{A} \in \mathscr{G}$.

b. Procédons par double implication.

- ▷ Soit $\mathscr{F}$ un ultrafiltre sur E, et soit $A \in \mathscr{P}(E)$. Supposons que $A \notin \mathscr{F}$. Le filtre $\mathscr{G}$ de la question précédente est un filtre qui contient $\mathscr{F}$ et tel que $\overline{A} \in \mathscr{G}$. Mais puisque $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre et que $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$, alors $\mathscr{F} = \mathscr{G}$, et donc $\overline{A} \in \mathscr{G} = \mathscr{F}$. Donc pour toute partie $A \in \mathscr{P}(E)$, on a soit $A \in \mathscr{F}$, soit $\overline{A} \in \mathscr{F}$.
- ▷ Supposons que $\mathscr{F}$ soit un filtre sur E et que pour toute partie A de E, on ait soit $A \in \mathscr{F}$ soit $\overline{A} \in \mathscr{F}$. Soit $\mathscr{G}$ un filtre sur E tel que $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ et soit $X \in \mathscr{G}$. Supposons par l'absurde que $X \notin \mathscr{F}$. Alors $\overline{X} \in \mathscr{F}$, et donc $\overline{X} \in \mathscr{G}$. Mais alors $\varnothing = X \cap \overline{X} \in \mathscr{G}$, ce qui est absurde car $\mathscr{G}$ vérifie $(\mathscr{P}_4)$. Donc nécessairement, $X \in \mathscr{F}$. On a donc prouvé que pour tout $X \in \mathscr{G}, X \in \mathscr{F}$, si bien que $\mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ et donc $\mathscr{G} = \mathscr{F}$. Et donc $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre sur E.

c.
- ▷ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $X := \{x\} \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$. On a directement $X \notin \mathscr{F}^x$. Par ailleurs, $\overline{X} = \mathbb{R} \setminus \{x\}$ n'est pas non plus dans $\mathscr{F}^x$, car il ne contient pas x, alors que x appartient à tous les éléments de $\mathscr{F}^x$. Donc $\mathscr{F}^x$ n'est pas un ultrafiltre.
- ▷ Soit $A = \{2p, p \in \mathbb{N}\}$ l'ensemble des entiers naturels pairs. Alors $\overline{A}$ est l'ensemble des entiers naturels impairs, qui est infini, si bien que $A \notin \mathscr{N}$. Et $A = \overline{\overline{A}}$ est également infini, si bien que $\overline{A} \notin \mathscr{N}$. Ainsi,

nous avons là une partie de $\mathbb{N}$ qui n'est pas dans $\mathscr{N}$ et dont le complémentaire n'est pas non plus dans $\mathscr{N}$, donc $\mathscr{N}$ n'est pas un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$.

Partie III – Filtres et limites

1. ▷ L'ensemble $g^\star(\mathscr{F})$ n'est pas vide puisqu'il contient $\mathbb{R}$. En effet, $\mathbb{R} = g^{-1}(\mathrm{E})$ et $\mathrm{E} \in \mathscr{F}$.

▷ Soit X_1 et X_2 deux éléments de $g \to (\mathscr{F})$. On a

$$g^{-1}(X_1 \cap X_2) = g^{-1}(X_1) \cap g^{-1}(X_2) \in \mathscr{F}$$

car $\mathscr{F}$ est stable par intersection. Ainsi $X_1 \cap X_2 \in g^\star(\mathscr{F})$.

▷ Soit $X \in g^\star(\mathscr{F})$ et $Y \in \mathscr{F}(\mathbb{R})$ telle que $X \subset Y$. On a $g^{-1}(X) \subset g^{-1}(Y)$ d'où $g^{-1}(Y) \in \mathscr{F}$ par la propriété $\mathscr{P}_3$, en remarquant que $g^{-1}(X) \in \mathscr{F}$. Ainsi $Y \in g^\star(\mathscr{F})$.

▷ Enfin, $\{x \in \mathrm{E} \mid g(x) \in \varnothing\} = \varnothing \notin \mathscr{F}$, et donc $\varnothing \notin g \to (\mathscr{F})$.

2. ▷ Supposons que $\lim_{\mathscr{F}_\mathrm{A}} g = b$. Soit $\varepsilon > 0$. On a alors $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\in \mathscr{F}^b \subset g^\star(\mathscr{F}_\mathrm{A})$, d'où $\forall a \in \mathrm{A}$, $b-\varepsilon < g(a) < b+\varepsilon$. Puisque cette inégalité est vraie à $a \in \mathrm{A}$ fixé pour tout $\varepsilon > 0$, en déduit que $\forall a \in \mathrm{A}$, $g(a) = b$.

▷ Supposons que pour tout $a \in \mathrm{A}$, $g(a) = b$. Soit $X \in \mathscr{F}^b$. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\subset X$. Pour tout $a \in \mathrm{A}$, $g(x) = b \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\subset X$, d'où $\mathrm{A} \subset g^{-1}(X)$ et donc $X \in g^\star(\mathscr{F}_\mathrm{A})$. Ainsi $\lim_{\mathscr{F}_\mathrm{A}} g = b$.

3. Pour tout c dans $\mathbb{R}$, $\mathscr{F}^c$ est l'ensemble des voisinages de c. Rappelons la définition de $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} b$:

$$\forall V \in \mathscr{F}^b,\ \exists U \in \mathscr{F}^a,\ g(U) \subset V$$

On remarque que $g(U) \subset V$ équivaut à $U \subset g^{-1}(V)$. Comme tout ensemble contenant un voisinage de a est un voisinage de a, la propriété $\exists U \in \mathscr{F}^a,\ g(U) \subset V$ équivaut clairement à $g^{-1}(V) \in \mathscr{F}^a$. On a donc moyennant ces remarques :

$$\begin{aligned} g(x) \xrightarrow[x \to a]{} b &\iff \mathscr{F}^b \in g^\star\left(\mathscr{F}^a\right) \\ &\iff \lim_{\mathscr{F}^a} g = b \end{aligned}$$

4. ▷ Supposons que $\lim\limits_{\mathscr{N}} u = b$. Soit $\varepsilon > 0$. On a $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\in \mathscr{F}^b$. Ainsi $u^{-1}(]b-\varepsilon, b+\varepsilon[) \in \mathscr{N}$, donc son complémentaire est fini, ainsi il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\overline{u^{-1}(]b-\varepsilon, b+\varepsilon[)} \subset [\![0, n_0]\!]$. Ainsi, pour $n > n_0$, on a $n \in u^{-1}(]b-\varepsilon, b+\varepsilon[)$, i.e. $b-\varepsilon < u_n < b+\varepsilon$. On en déduit que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$.

▷ Supposons que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} b$. Soit $V \in \mathscr{F}^b$. Il existe alors $\varepsilon > 0$ tel que $]b-\varepsilon, b+\varepsilon[\subset V$. Il existe de plus $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > n_0$, $u_n \in]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$. Ainsi $\overline{u^{-1}(V)} \subset [\![0, n_0]\!]$ et donc $V \in g^\star(\mathscr{N})$. On a donc établi que $\lim\limits_{\mathscr{N}} u = b$.

Voir l'énoncé.