▷ PROBLÈME 1 : Sujet de niveau élémentaire ♪ (sauf la question 5., plus délicate).

Les thèmes principaux sont les coefficients du binôme et les fonctions polynomiales. C'est un bon entraînement à la manipulation des sommes et des produits.

▷ PROBLÈME 2 : Sujet de difficulté moyenne. ♫ (sauf la dernière question de la partie II, plus délicate).

Les thèmes centraux sont les nombres complexes et la trigonométrie.

▷ PROBLÈME 3 : Sujet nécessitant une bonne technique de calcul sur les sommes binomiales ♫.

Les thèmes principaux sont les coefficients du binôme et les suites numériques.

▷ PROBLÈME 4 : Sujet assez technique de bout en bout ♫♪.

Les thèmes centraux sont les racines de l'unité, les sommes doubles et les inégalités classiques.

PROBLÈME 1. **IND § SOL** *Sommes de Newton sur les entiers*

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. Soit m un entier naturel tel que $m \leqslant n$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}$.

INDICATION : On pourra faire apparaître un télescopage en utilisant a formule de Pascal (cf. le TD).

2. En appliquant ce qui précède à une valeur bien choisie de m, retrouver que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

3. En appliquant la question 1. à $m = 2$, retrouver la somme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2$.

4. Soit $p \in \mathbb{N}$. On admet l'existence de nombres réels $\lambda_{p,0}, \ldots, \lambda_{p,p}$ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^p = \sum_{j=0}^{p} \lambda_{p,j} \mathrm{H}_j(x), \quad \text{où } \mathrm{H}_0 := 1 \ \text{ et } \ \forall (j,x) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R},\ \ \mathrm{H}_j(x) := \frac{1}{j!} \prod_{k=0}^{j-1} (x-k)$$

a. Calculer $\lambda_{p,0}, \ldots, \lambda_{p,p}$ pour $p \in [\![0,3]\!]$.

b. Soient $j \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathrm{H}_j(i)$. On pourra étudier les cas où $i < j$ et $i \geqslant j$. On exprimera le résultat au moyen des coefficients binomiaux.

c. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^p = \sum_{j=0}^{p} \lambda_{p,j}\binom{n+1}{j+1}$. On utilisera la relation de la question 1.

d. En déduire que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\cdot$

5. Question subsidiaire : démontrer le résultat admis en préambule de cette question.

PROBLÈME 2. **IND § SOL** *Rationnels r tels que* $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$

L'objectif de ce sujet est de déterminer $\mathscr{R} := \left\{ r \in \mathbb{Q}\,;\, \cos(\pi r) \in \mathbb{Q} \right\}$.

▷ Un polynôme P est dit unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ s'il existe $(p_0, \dots, p_{n-1}) \in \mathbb{Z}^n$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{P}(z) = p_0 + p_1 z + \cdots + p_{n-1} z^{n-1} + z^n$$

▷ On admettra le théorème suivant : si $u \in \mathbb{Q}$ vérifie $\mathrm{P}(u) = 0$ où P est un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$, alors $u \in \mathbb{Z}$.

Partie I – Étude d'une suite de polynômes

Soit $(\mathrm{Q}_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de polynômes définie par

$$\forall z \in \mathbb{C},\quad \mathrm{Q}_0(z) = 2,\quad \mathrm{Q}_1(z) = z,\quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \mathrm{Q}_{n+1}(z) = z\mathrm{Q}_n(z) - \mathrm{Q}_{n-1}(z)$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Q_n est un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré n.

2. Établir que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall z \in \mathbb{C}^*,\ \mathrm{Q}_n\left(z + \dfrac{1}{z}\right) = z^n + \dfrac{1}{z^n}\cdot$

3. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{Q}_n(2\cos(t)) = 2\cos(nt)$.

Partie II – Application aux angles commensurables à π et de cosinus rationnel

La suite de polynômes $(\mathrm{Q}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ va nous permettre de déterminer $\mathscr{R}$.

1. Dans cette question, on considère $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\cos(\pi r) \in \mathbb{Q}$.

a. Justifier l'existence de $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathrm{Q}_n(2\cos(\pi r)) \in \mathbb{Z}$. On écrira $r = \dfrac{p}{q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$.

b. En déduire que $\cos(\pi r) \in \left\{-1, -\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

2. Déterminer $\mathscr{R}$.

3. Cette question subsidiaire est réservée à celles et ceux qui ont suivi la spécialité maths en Terminale (elle nécessite des connaissances en arithmétique). Démontrer le théorème admis dans le préambule de ce sujet.

PROBLÈME 3. IND § SOL *Somme des inverses des coefficients binomiaux*

On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}}\cdot$

1. a. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$. Vérifier que $\dfrac{1}{k\binom{n}{k}} + \dfrac{1}{(n-k)\binom{n}{k}} = \dfrac{1}{k\binom{n-1}{k}}\cdot$

b. En déduire que $\forall n \geqslant 2,\ 2v_n = \dfrac{2}{n} + v_{n-1}$.

c. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}\cdot$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que $u_n = (n+1)v_{n+1}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 4$. Démontrer que $2 \leqslant u_n \leqslant 2 + \dfrac{4}{n}\cdot$

INDICATION : Exploiter les variations de $\left(\binom{n}{k}\right)_{0\leqslant k\leqslant n}$.

4. En déduire un équivalent de la suite de terme général $w_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k}\cdot$

PROBLÈME 4. IND § SOL *Quelques propriétés de la transformée de Fourier discrète*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\omega = \exp\left(\dfrac{2i\pi}{n}\right)$. Pour $(z_0, \ldots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on note $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \ \widehat{z}_k = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} z_\ell\, \omega^{-k\ell}$. On dit que $(\widehat{z}_0, \ldots, \widehat{z}_{n-1})$ est la transformée de Fourier discrète de $(z_0, \ldots, z_{n-1})$.

1. Soit $m \in \mathbb{Z}$. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-km}$.

2. Établir la formule de Parseval : $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |\widehat{z}_k|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|^2$.

3. On note m le nombre de termes non nuls parmi $z_0, \ldots, z_{n-1}$ et $\widehat{m}$ le nombre de termes non nuls parmi $\widehat{z}_0, \ldots, \widehat{z}_{n-1}$. On suppose que $m \in \mathbb{N}^*$.

a. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Justifier que $|\widehat{z}_k| \leqslant \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} |z_\ell|$.

b. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} |\widehat{z}_k|^2 \leqslant \widehat{m}\, m \sum_{\ell=0}^{n-1} |z_\ell|^2$.

c. En déduire le principe d'incertitude : $m\widehat{m} \geqslant n$.

4. Montrer la formule d'inversion : $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \ z_k = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} \widehat{z}_\ell\, \omega^{k\ell}$.

Corrigés — Sommes, produits, coefficients binomiaux

Solution 1.

1. On déduit de la la relation de Pascal et d'un télescopage que

$$\sum_{k=m}^{n}\binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n}\left(\binom{k+1}{m+1}-\binom{k}{m+1}\right) = \binom{n+1}{m+1}-\binom{m}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}$$

2. En appliquant ce qui précède à $m=1$, on trouve que $\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} = \sum_{k=1}^{n} k = \binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$.

3. En appliquant le 1. à $m=2$, on trouve que $\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} = \sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{2} = \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$. Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{k(k-1)}{2} + \sum_{k=1}^{n} k = \frac{(n+2)(n+1)n}{3} - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4. a. On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^0 = \mathrm{H}_0(x)$, $x = \mathrm{H}_1(x)$, $x^2 = x(x-1)+x = 2\mathrm{H}_2(x)+\mathrm{H}_1(x)$ et :

$$x^3 = x(x-1)(x-2)+3x^2-2x = 6\mathrm{H}_3(x)+3(2\mathrm{H}_2(x)+\mathrm{H}_1(x))-2\mathrm{H}_1(x) = 6\mathrm{H}_3(x)+6\mathrm{H}_2(x)+\mathrm{H}_1(x)$$

b. Soit $j \in \mathbb{N}$ et $i \in \mathbb{N}^*$.

▷ Supposons $i \geqslant j$. On a $\mathrm{H}_j(i) = \frac{i(i-1)\cdots(i-j-1))}{j!} = \frac{i!}{(i-j)!j!} = \binom{i}{j}$.

▷ Si $i < j$, alors $\mathrm{H}_j(i) = 0 = \binom{i}{j}$.

c. On a

$$\sum_{i=1}^{n} i^p = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{p}\lambda_{p,j}\mathrm{H}_j(i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{p}\lambda_{p,j}\binom{i}{j} = \sum_{j=0}^{p}\lambda_{p,j}\sum_{i=1}^{n}\binom{i}{j} = \sum_{j=0}^{p}\lambda_{p,j}\sum_{i=j}^{n}\binom{i}{j} = \sum_{j=0}^{p}\lambda_{p,j}\binom{n+1}{j+1}$$

d. Par le 2.a., $(\lambda_{3,0},\lambda_{3,1},\lambda_{3,2},\lambda_{3,3}) = (0,1,6,6)$ et d'après la question précédente, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} i^3 &= \binom{n+1}{2}+6\binom{n+2}{3}+6\binom{n+1}{4} = \frac{(n+1)n}{2}+(n+1)n(n-1)+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{4}\\ &= \frac{(n+1)n}{4}\times(2+4(n-1)+(n-1)(n-2)) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}\end{aligned}$$

5. Le résultat se prouve aisément par récurrence forte sur p. On a $x^0 = \mathrm{H}_0(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $p \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie pour tout $k \leqslant p$. Pour $x \in \mathbb{R}$, comme $\mathrm{P} : x \mapsto x^{p+1}-(p+1)!\mathrm{H}_{p+1}(x)$ est polynomiale de degré inférieur ou égal à p, P est combinaison linéaire de monômes de degré inférieur ou égaux à p et donc de H_0, …, H_p par l'hypothèse de récurrence. Ainsi, $x \mapsto x^{p+1}$ est combinaison linéaire de $\mathrm{H}_0, \ldots, \mathrm{H}_{p+1}$ et l'hypothèse est vraie au rang $p+1$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 2.

Partie I – Étude d'une suite de polynômes

1. Raisonnons par récurrence double. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathrm{HR}(n)$ la propriété suivante : il existe R_n polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}$ de degré au plus $n-1$ tel que $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Q}_n(z) = z^n + \mathrm{R}_n(z)$.

- ▷ $\mathrm{HR}(1)$ et $\mathrm{HR}(2)$ sont clairement vérifiées puisque $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Q}_1(z) = z$ et $\mathrm{Q}_2(z) = z^2 - 2$.
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathrm{HR}(n)$ et $\mathrm{HR}(n+1)$ vérifiées. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a

$$\mathrm{Q}_{n+2}(z) = z\mathrm{Q}_{n+1}(z) - \mathrm{Q}_n(z) = z\left(z^{n+1} + \mathrm{R}_{n+1}(z)\right) - \left(z^n + \mathrm{R}_n(z)\right) = z^{n+2} + \mathrm{R}_{n+2}(z)$$

où l'on a posé $\mathrm{R}_{n+2}(z) := z\mathrm{R}_{n+1}(z) - z^n - \mathrm{R}_n(z)$ $(\star)$. L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{Z}$ étant stable par addition et multiplication, la fonction R_{n+2} est polynômiale. Puisque R_n et R_{n+1} sont respectivement de degrés inférieurs à $n-1$ et n, la relation $(\star)$ permet de conclure que R_{n+2} est de degré inférieur à $n+1$. Ainsi $\mathrm{HR}(n+2)$ est vraie.

2. Raisonnons par récurrence double. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathrm{HR}(n)$ la propriété suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \mathrm{Q}_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = z^n + \frac{1}{z^n}$$

- ▷ $\mathrm{HR}(1)$ et $\mathrm{HR}(2)$ sont clairement vérifiées puisque $\forall z \in \mathbb{C}^*$,

$$\mathrm{Q}_1\left(z + \frac{1}{z}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{Q}_2\left(z + \frac{1}{z}\right) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 = z^2 + \frac{1}{z^2}$$

- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathrm{HR}(n)$ et $\mathrm{HR}(n+1)$ vérifiées. Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{Q}_{n+2}\left(z + \frac{1}{z}\right) &= \left(z + \frac{1}{z}\right)\mathrm{Q}_{n+1}\left(z + \frac{1}{z}\right) - \mathrm{Q}_n\left(z + \frac{1}{z}\right) = \left(z + \frac{1}{z}\right)\left(z^{n+1} + \frac{1}{z^{n+1}}\right) - \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)\\ &= z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}\end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{HR}(n+2)$ est vraie.

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. D'après la question précédente, on a

$$\mathrm{Q}_n(2\cos(t)) = \mathrm{Q}_n\left(e^{it} + e^{-it}\right) = e^{int} + e^{-int} = 2\cos(nt)$$

Partie II – Application aux angles commensurables à π et de cosinus rationnel

1. a. Notons $r = p/q$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Par la partie I, on a

$$\mathrm{Q}_n(2\cos(\pi r)) = 2\cos(q\pi r) = 2\cos(p\pi) = 2(-1)^p \in \mathbb{Z}$$

b. En appliquant la question II.1. à $\mathrm{P} := \mathrm{Q}_n - 2(-1)^m$ (qui est bien un polynôme unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$), on déduit de la question II.1. que $2\cos(\pi r) \in \mathbb{Z}$. Comme $2\cos(\pi r) \in [-2, 2]$, on en déduit que $2\cos(\pi r) \in [\![-2, -1, 0, 2, 1]\!]$, ie $\cos(\pi r) \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$.

2. Comme $\cos(\pi r) \in \{-1, -1/2, 0, 1/2, 1\}$, on a

$$r \in \mathbb{Z},\ r = \frac{1}{2}[1],\ r = \pm\frac{1}{3}[1] \ \text{ ou } \ r = \pm\frac{2}{3}[1]$$

Ainsi, $r \in \left\{\frac{n}{2}\,;\, n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{n}{3}\,;\, n \in \mathbb{Z}\right\}$. La réciproque étant claire, on a

$$\mathscr{R} = \left\{\frac{n}{2}\,;\, n \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{n}{3}\,;\, n \in \mathbb{Z}\right\}$$

3. Soit P un polynôme unitaire de degré $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$ et $u = \alpha/\beta$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$, tels que $P(u) = 0$. Il existe des entiers relatifs $p_0, \dots, p_{n-1}$ tels que $P(z) = z^n + p_{n-1}z^{n-1} + \dots + p_0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. En multipliant par β^n la relation $P(u) = 0$, on obtient en isolant α^n :

$$\alpha^n = -\sum_{i=0}^{n-1} p_i \alpha^i \beta^{n-i}$$

On en déduit que β divise α^n. Mais $\beta \wedge \alpha^n = 1$ car $\alpha \wedge \beta = 1$. Comme $\beta \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que $\beta = 1$. Ainsi $u \in \mathbb{Z}$.

Voir l'énoncé.

SOLUTION 3.

1. a. On a $\dfrac{1}{k\binom{n}{k}} + \dfrac{1}{(n-k)\binom{n}{k}} = \dfrac{n}{k(n-k)\dfrac{n!}{k!(n-k)!}} = \dfrac{1}{k\dfrac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}} = \dfrac{1}{k\binom{n-1}{k}}$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Par symétrie des coefficients binomiaux :

$$\begin{aligned}2v_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)\binom{n}{n-k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\binom{n}{k}} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k)\binom{n}{k}} = \frac{1}{n\binom{n}{n}} + \frac{1}{(n-0)\binom{n}{0}} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k\binom{n}{k}} + \frac{1}{(n-k)\binom{n}{k}}\right)\\ &= \frac{2}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\binom{n-1}{k}} = \frac{2}{n} + v_{n-1} \quad \text{(cf. la question précédente)}\end{aligned}$$

c. D'après la question précédente, $\frac{2^k}{k} = 2^k v_k - 2^{k-1} v_{k-1}$ pour tout $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Ainsi pour $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geqslant 2$, par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} = 2 + \sum_{k=2}^{n}\left(2^k v_k - 2^{k-1} v_{k-1}\right) = 2 + 2^n v_n - 2^1 v_1 = 2 + 2^n v_n - 2 = 2^n v_n$$

Comme $2v_1 = 2$, la relation précédente est également vérifiée pour $n = 1$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $k \in [\![1, n+1]\!]$, $\dbinom{n+1}{k} = \dfrac{n+1}{k}\dbinom{n}{k-1}$. Ainsi,

$$v_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k\binom{n+1}{k}} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\binom{n}{k-1}} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{u_n}{n+1}$$

3. On séduit des variations des coefficients du binôme sur la même ligne du triangle de Pascal que pour $k \in [\![2, n-2]\!]$, $\binom{n}{k} \leqslant \binom{n}{2}$. Ainsi :

$$2 = \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant \frac{1}{\binom{n}{0}} + \frac{1}{\binom{n}{n}} + \frac{1}{\binom{n}{1}} + \frac{1}{\binom{n}{n-1}} + \sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leqslant 2 + \frac{2}{n} + \frac{n-3}{\binom{n}{2}} \leqslant 2 + \frac{2}{n} + \frac{n-1}{\binom{n}{2}} = 2 + \frac{4}{n}$$

4. On déduit du théorème d'encadrement que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$ puis de la question 2. que $u_{n-1} = \frac{n}{2^n} w_n$ d'où

$$w_n \sim \frac{2^{n+1}}{n}$$

Voir l'énoncé.

SOLUTION 4.

1. Soit $m \in \mathbb{Z}$; $\omega^{-m} = \exp(-2i\pi m/n)$, ainsi $\omega^{-m} = 1$ *si et seulement si* $-2\pi m/n = 0\,[2\pi]$, ie $m = 0\,[n]$.

▷ Cas où $m = 0\,[n]$. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-km} = n$.

▷ Cas où $m \neq 0\,[n]$, on a $\omega^{-m} \neq 1$ et $\omega^n = 1$ donc, par la formule de la série géompétrique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-km} = \frac{1-\omega^{-nm}}{1-\omega^{-m}} = 0$$

2. Comme $\overline{\omega} = \omega^{-1}$, on a $|\widehat{z}_k|^2 = \widehat{z}_k \overline{\widehat{z}_k} = \displaystyle\sum_{0 \leqslant p,q \leqslant n-1} z_p \overline{z_q} \omega^{-k(p-q)}$ d'où

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\widehat{z}_k|^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{0\leqslant p,q\leqslant n-1} z_p\overline{z_q}\omega^{-k(p-q)} = \frac{1}{n}\sum_{0\leqslant p,q\leqslant n-1}\left(z_p\overline{z_q}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{-k(p-q)}\right)$$

Pour p et q dans $[\![0, n-1]\!]$, $p - q \in [\![-(n-1), n-1]\!]$, ainsi $p - q = 0\,[n]$ *si et seulement si* $p = q$. On déduit alors de la question 1. que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} |\widehat{z}_k|^2 = \frac{1}{n}\sum_{p=0}^{n-1} z_p \overline{z}_p n = \sum_{k=0}^{n-1} |z_k|^2$$

3. a. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Comme $\widehat{z}_k = \displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1} z_\ell\, \omega^{-k\ell}$ et $|\omega| = 1$, on déduit de l'inégalité triangulaire que

$$|\widehat{z}_k| \leqslant \sum_{\ell=0}^{n-1} |z_\ell|$$

b. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Notons I (resp. $\widehat{\mathrm{I}}$) l'ensemble des $i \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $z_i \neq 0$ (resp. $\widehat{z}_i \neq 0$). On déduit de la question 3.a. et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$|\widehat{z}_k|^2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{n-1} |z_k|\right)^2 = \left(\sum_{i\in \mathrm{I}} |z_i|\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i\in \mathrm{I}} 1^2\right)\left(\sum_{i\in \mathrm{I}} |z_i|^2\right) = m \sum_{\ell=0}^{n-1} |z_\ell|^2$$

En superposant ces inégalités pour k tel que $\widehat{z}_k \neq 0$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n-1} |\widehat{z}_k|^2 = \sum_{i\in\widehat{\mathrm{I}}} |\widehat{z}_i|^2 \leqslant \widehat{m}\, m \sum_{\ell=0}^{n-1} |z_\ell|^2$$

c. D'après les questions 2. et 3.b., on a

$$n\sum_{k=0}^{n-1}|z_k|^2 \leqslant \widehat{m}\,m\sum_{k=0}^{n-1}|z_k|^2$$

Comme $m \neq 0$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}|z_k|^2 > 0$ et donc, après simplification, $m\widehat{m} \geqslant n$.

4. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. On a

$$\frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\widehat{z}_\ell\,\omega^{k\ell} = \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1} z_j\omega^{-\ell j}\omega^{k\ell} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} z_j\left(\sum_{\ell=0}^{n-1}\omega^{-\ell(j-k)}\right) = \frac{1}{n}nz_k = z_k$$

car (cf. la question 2.) pour les justifications) $\displaystyle\sum_{\ell=0}^{n-1}\omega^{-\ell(j-k)} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq i \\ n & \text{sinon} \end{cases}$.

Voir l'énoncé.