Quizz d'algèbre # 2 | Ensembles, applications et relations

Dans ce qui suit, les lettres majuscules E, F, A *et* B *désigneront des ensembles. On note* $A\Delta B := (A\cup B)\setminus(A\cap B)$ *(ensemble appelé différence symétrique de* A *et* B*).*

VRAI OU FAUX ?

		V	F
1.	L'application $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ n\mapsto 2n$ est injective.	☐	☐
2.	L'application $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ n\mapsto 2n$ est surjective.	☐	☐
3.	Une application $f:E\to E$ est bijective $\iff$ elle est injective.	☐	☐
4.	Une application $f:E\to E$ est bijective $\iff$ elle est surjective.	☐	☐
5.	Pour tout $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2,\ \overline{A\Delta B}=\overline{A}\Delta\overline{B}$.	☐	☐
6.	Pour $f:E\to F$ et tout $A\subset E$, on a $\overline{f\langle A\rangle}=f\left\langle\overline{A}\right\rangle$.	☐	☐
7.	Pour $f:E\to F$, f est injective $\iff\ \forall A\subset E,\ f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle=A$.	☐	☐
8.	Pour $f:E\to F$, f est surjective $\iff\ \forall A\subset E,\ f^{-1}\langle f\langle A\rangle\rangle=A$.	☐	☐
9.	L'application $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*,\ z\mapsto e^z$ est surjective.	☐	☐
10.	L'application $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}^*,\ z\mapsto e^z$ est bijective.	☐	☐
11.	Pour tout $(A,B)\in\mathscr{E}^2,\ A\Delta B=\varnothing\iff A=B$.	☐	☐
12.	Pour $f,g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, si $f\circ g=\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ alors f est bijective et $f^{-1}=g$.	☐	☐
13.	Soit $A\subset E$. L'application $\phi:\mathscr{P}(E)\to\mathscr{P}(E),\ X\mapsto X\cup A$ est bijective $\iff A=\varnothing$.	☐	☐
14.	L'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\mapsto\big(x+\lvert y\rvert,y\big)$ n'est pas bijective.	☐	☐
15.	Pour $f:E\to F$ et tout $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2,\ f\langle A\cap B\rangle=f\langle A\rangle\cap f\langle B\rangle$.	☐	☐
16.	Pour $f:E\to F$ et tout $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2,\ f\langle A\cup B\rangle=f\langle A\rangle\cup f\langle B\rangle$.	☐	☐
17.	Pour $f:E\to F,\ \theta:\mathscr{P}(E)\to\mathscr{P}(F),\ X\mapsto f\langle X\rangle$ est injective $\iff f$ est injective.	☐	☐
18.	Pour $f:E\to F,\ \theta:\mathscr{P}(E)\to\mathscr{P}(F),\ X\mapsto f\langle X\rangle$ est surjective $\iff f$ est surjective.	☐	☐

QUESTIONS À CHOIX MULTIPLE

1. Soit E un ensemble ayant au moins deux éléments. Vrai ou faux ?

a. $\displaystyle\bigcap_{X\in\mathscr{P}(E)\setminus\{\varnothing\}} X=\varnothing$;

b. $\displaystyle\bigcup_{X\in\mathscr{P}(E)\setminus\{E\}} X\neq E$;

c. $\displaystyle\bigcup_{(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2} (X\cap Y)=E$;

d. $\displaystyle\bigcap_{(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2} (X\cup Y)=E$;

e. Pour $\mathscr{F}\subset\mathscr{P}(E)$, $\displaystyle\bigcap_{(X,Y)\in\mathscr{F}^2} (X\cup Y)=\bigcap_{X\in\mathscr{F}} X$;

f. Pour $\mathscr{F}\subset\mathscr{P}(E)$, $\displaystyle\bigcup_{(X,Y)\in\mathscr{F}^2} (X\cap Y)=\bigcap_{X\in\mathscr{F}} X$.

2. On suppose l'existence de $f:E\to F$ bijective. Vrai ou faux ?

a. il existe $g:E^2\to F^2$ bijective ;

b. il existe $\phi:\mathscr{P}(E)\to\mathscr{P}(F)$ bijective ;

c. $\exists\psi:\mathbb{N}\to E$ bijective $\iff$ $\exists\phi:\mathbb{N}\to F$ bijective ;

d. $\exists h:E^X\to F^X$ bijective ;

e. $\exists\ell:X^E\to X^F$ bijective.

3. Pour $\lambda\in\mathbb{R}$, on note $f_\lambda:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2+\lambda x+1$. Vrai ou faux ?

a. $\forall\lambda\in\mathbb{R},\ f_\lambda$ est non surjective ;

b. $\exists\lambda\in\mathbb{R},\ f_\lambda$ est injective ;

c. f_λ est injective sur $\mathbb{R}_+ \iff \lambda\geqslant 0$;

4. On s'intéresse à la relation $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$ où E est un ensemble ayant au moins deux éléments. Vrai ou faux ?

a. $\subset$ est une relation d'équivalence ;

b. $\subset$ est une relation d'ordre totale ;

c. Toute partie de $\mathscr{P}(E)$ admet un minimum pour $\subset$;

d. Pour $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$, on a $\inf\{A,B\}=A\cap B$ pour $\subset$;

e. Pour $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$, $\{A,B\}$ n'admet pas de borne supérieure pour $\subset$;

f. Toute partie non vide de $\mathscr{P}(E)$ admet une borne supérieure et une borne inférieure pour $\subset$.

5. Soit E un ensemble admettant au moins deux éléments. Vrai ou faux ?

a. Il n'existe aucune relation binaire symétrique et antisymétrique sur E ;

b. Soit $f:E\to F$. La relation définie sur E par $x\mathscr{R}y \iff f(x)=f(y)$ est une relation d'équivalence.

c. Pour la relation précédente, f est injective $\iff$ toutes les classes d'équivalences sont des singletons.

d. Pour la relation précédente, f est surjective $\iff$ il n'y a qu'une seule classe d'équivalence.

EXERCICES ÉLÉMENTAIRES

1. L'application définie par $\begin{array}{rccl}\phi : & \mathbb{Z}\times\mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & (p,q) & \longmapsto & p+\dfrac{1}{q}\end{array}$ est-elle injective ? surjective ?

2. Montrer l'existence d'une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$.

On pourra remarquer que tout $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de manière unique $n = 2^p(2q+1)$ où $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

3. Soit $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ tel que $p \circ p = p$. Montrer que si p est injective ou surjective, alors $p = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

4. Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$. Montrer que f est surjective $\iff \big(\forall \mathrm{B} \subset \mathrm{F},\ f^{-1}\langle \mathrm{B}\rangle = \varnothing \iff \mathrm{B} = \varnothing\big)$.

5. Soit E un ensemble et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective *si et seulement si* f est surjective.

6. Soit E un ensemble, $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(\mathrm{B}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ deux familles de parties de E telles que $\forall i \in \mathrm{I},\ \mathrm{E} = \mathrm{A}_i \cup \mathrm{B}_i$. Démontrer que

$$\mathrm{E} = \left(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{B}_i\right)$$

7. Soit X et Y deux parties d'un ensemble E. Montrer que $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$ *si et seulement si* s'il existe Z dans $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ tel que $\mathrm{Z} \cap \mathrm{X} \subset \mathrm{Z} \cap \mathrm{Y}$ et $\mathrm{Z} \cup \mathrm{X} \subset \mathrm{Z} \cup \mathrm{Y}$.

8. Soit E et F deux ensembles non vides ainsi qu'une application $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$.

a. Montrer que la relation $\mathscr{R}_u$ définie sur E par $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ x \mathscr{R}_u y \iff u(x) = u(y)$ est une relation d'équivalence.

b. Cette relation d'équivalence peut-elle posséder une seule classe d'équivalence ? Dans l'affirmative, caractériser les applications u correspondantes.

c. On prend ici $\mathrm{F} = \{0,1\}$ et l'on suppose que $u = \mathbb{1}_{\mathrm{A}}$ où $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$. Combien $\mathscr{R}_u$ possède-t-elle de classes d'équivalence ? On rappelle que $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}$ est la fonction définie sur E à valeurs dans la paire $\{0,1\}$ définie par $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x) = 1$ si $x \in \mathrm{A}$ et $\mathbb{1}_{\mathrm{A}}(x) = 0$ si $x \notin \mathrm{A}$.

9. Soit E un ensemble, $(\mathrm{F}, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application injective. On définit dans E la relation $\mathscr{R}$ par $x \mathscr{R} y \iff f(x) \preccurlyeq f(y)$. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre sur E.

10. Soit A, B et C trois parties d'un même ensemble E.

a. On suppose que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{C}$ et $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{A} \cup \mathrm{C}$. Comparer B et C.

b. Comparer $(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \setminus \mathrm{C})$ et $\mathrm{A} \setminus (\mathrm{B} \cap \mathrm{C})$.

11. Montrer la bijectivité de l'application $\begin{array}{rccl}\phi : & \mathbb{R}^{\mathbb{R}^*} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}^*} \\ & f & \longmapsto & \theta_f\end{array}$ où $\begin{array}{rccl}\theta_f : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(1/x)\end{array}$.

EXERCICES CLASSIQUES PLUS TECHNIQUES

1. Soit E un ensemble, A et B deux parties de E.

a. Déterminer les parties X de E telles que $A \cup X = E$.

b. Discuter et résoudre $(A \cap X) \cup \left(B \cap \overline{X}\right) = \varnothing$.

2. Soit E un ensemble, $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$ deux relations d'équivalence sur E. On définit une relation $\mathscr{R}$ sur E en posant :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x\mathscr{R}y \iff x\mathscr{R}_1 y \text{ et } x\mathscr{R}_2 y$$

a. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathscr{R}$.

b. Exprimer la classe d'équivalence de $x \in E$ pour $\mathscr{R}$ en fonction de ses classes d'équivalence pour $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$.

3. Soit E et F des ensembles.

a. Démontrer que $\mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F) \subset \mathscr{P}(E \cup F)$.

b. Déterminer une *cns* sur E et F pour que l'inclusion précédente soit une égalité.

c. Comparer $\mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F)$ et $\mathscr{P}(E \cap F)$.

4. Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ et $f_\omega : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ définie par $f_\omega(z) := \dfrac{z+\omega}{\overline{\omega}z+1}$.

a. Démontrer que $f_\omega(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

b. Déterminer $f_\omega(\mathbb{U})$.

c. Justifier que f_ω réalise une bijection de $\mathbb{U}$ sur $f_\omega(\mathbb{U})$ et déterminer sa réciproque.

5. Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une surjection vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geqslant n$. Démontrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

6. Donner un exemple d'ensembles non vides A, B et d'applications $f : A \to B$, $g : B \to A$ tels que $f \circ g = \mathrm{id}_B$ mais $g \circ f \neq \mathrm{id}_A$.

7. Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence définie sur un ensemble E. On note $\pi : E \mapsto E/\mathscr{R}$ l'application qui à un élément x de E associe sa classe d'équivalence.

a. L'application π est-elle surjective ?

b. Soit x et y dans E. Simplifier $\pi^{-1}\left\langle \{\pi(x), \pi(y)\} \right\rangle$.

c. On suppose que π est injective. Que dire des classes d'équivalences ? Qu'en déduit-on pour $\mathscr{R}$?

8. On définit une relation binaire sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \preccurlyeq y \iff \exists n \in \mathbb{N},\ y = x^n$.

a. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre.

b. Cet ordre est-il total ?

Corrigé du Vrai ou Faux ?

1. Vrai. Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$ tels que $f(p)=f(q)$, on a $p=q$.

2. Faux. On a $3\notin f\langle\mathbb{N}\rangle$ donc $f\langle\mathbb{N}\rangle\neq\mathbb{N}$.

3. Faux. Seule $\Longrightarrow$ est vraie. L'application $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N},\ n\mapsto 2n$ est un contre-exemple à la réciproque.

4. Faux. Seule $\Longrightarrow$ est vraie. L'application $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ définie par $f(n)=n-1$ si $n\in\mathbb{N}^*$ et $f(0)=0$ est un contre-exemple à la réciproque.

5. Faux. On a

$$\overline{\mathrm{A}}\Delta\overline{\mathrm{B}}=(\mathrm{A}\cap\overline{\mathrm{B}})\cup(\mathrm{B}\cap\overline{\mathrm{A}})=\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}$$

6. Faux. Contre-exemple : $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2$ et $\mathrm{A}=\mathbb{R}_+$. On a $f\langle\mathrm{A}\rangle=\mathrm{A}$ donc $\overline{f\langle\mathrm{A}\rangle}=\mathrm{R}_-^*$ et $f\langle\overline{\mathrm{A}}\rangle=\mathrm{A}$.

7. Vrai. Supposons f injective. Pour $\mathrm{A}\subset\mathrm{E}$, on a $\mathrm{A}\subset f^{-1}\big\langle f\langle\mathrm{A}\rangle\big\rangle$ par définition des images directes et réciproques. Soit $u\in f^{-1}\big\langle f\langle\mathrm{A}\rangle\big\rangle$. On a $f(u)\in f\langle\mathrm{A}\rangle$ donc il existe $a\in\mathrm{A}$ tel que $f(u)=f(a)$. Ainsi $u=a$ par injectivité de f et donc $u\in\mathrm{A}$. Réciproquement, supposons que pour tout $\mathrm{A}\subset\mathrm{E}$, $\mathrm{A}=f^{-1}\big\langle f\langle\mathrm{A}\rangle\big\rangle$. Soient x et y dans E tels que $f(x)=f(y)$. Posons $\mathrm{A}_1=\{x\}$ et $\mathrm{A}_2=\{y\}$. Comme $f\langle\mathrm{A}_1\rangle=f\langle\mathrm{A}_2\rangle=\{f(x)\}$, on a $\mathrm{A}_1=\mathrm{A}_2$ donc $x=y$. Ainsi f est injective.

8. Faux d'après le point précédent puisque l'injectivité n'est pas équivalente à la surjectivité.

9. Vrai. Soit $z\in\mathbb{C}^*$. On écrit $z=re^{i\theta}$ avec $r>0$ et $\theta\in\mathbb{R}$. On a $z=\exp(\ln r+i\theta)$.

10. Faux. Par exemple, $\exp^{-1}\big\langle\{1\}\big\rangle=2i\pi\mathbb{Z}$.

11. Vrai. Si $\mathrm{A}\Delta\mathrm{B}=\varnothing$, alors $\mathrm{B}=\mathrm{A}\Delta(\mathrm{A}\Delta\mathrm{B})=\mathrm{A}\Delta\varnothing=\mathrm{A}$ par associativité de Δ.

12. Faux. Contre-exemple : $f(n)=n-1$ pour $n\in\mathbb{N}^*$, $f(0)=0$ et $g(n)=n+1$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $g(0)=0$.

13. Vrai. Si f est bijective, alors $f(\varnothing)=f(\mathrm{A})=\mathrm{A}$ donc $\mathrm{A}=\varnothing$. La réciproque est claire car si $\mathrm{A}=\varnothing$, alors $f=\mathrm{id}$.

14. Faux. En posant $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $g(x,y)=(x-|y|,y)$ vérifie clairement $f\circ g=g\circ f=\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

15. Faux. Contre-exemple : pour $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2$ et $\mathrm{A}=\mathbb{R}_+$, $\mathrm{B}=\mathbb{R}_-$, on a $f\langle\mathrm{A}\cap\mathrm{B}\rangle=\{0\}$ et $f\langle\mathrm{A}\rangle\cap f\langle\mathrm{B}\rangle=\mathbb{R}_+$.

16. Vrai. Pour A et B parties de E, on a $\mathrm{A}\subset\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ et $\mathrm{B}\subset\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ d'où $f\langle\mathrm{A}\rangle\subset f\langle\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\rangle$ et $f\langle\mathrm{B}\rangle\subset f\langle\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\rangle$ et donc $f\langle\mathrm{A}\rangle\cup f\langle\mathrm{B}\rangle\subset f\langle\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\rangle$. Réciproquement, si $y\in f\langle\mathrm{A}\cup\mathrm{B}\rangle$, alors il existe $x\in\mathrm{A}\cup\mathrm{B}$ tel que $y=f(x)$ ainsi $y\in f\langle\mathrm{A}\rangle$ ou $y\in f\langle\mathrm{B}\rangle$.

17. Vrai. Supposons θ injective et soient a et b dans E tels que $f(a)=f(b)$. Pour $\mathrm{X}_1=\{a\}$ et $\mathrm{X}_2=\{b\}$, on a $f\langle\mathrm{X}_1\rangle=f\langle\mathrm{X}_2\rangle=\{f(a)\}$ d'où $\mathrm{X}_1=\mathrm{X}_2$, ie $a=b$. Réciproquement, supposons f injective et soient X_1 et X_2 des parties de E tels que $f\langle\mathrm{X}_1\rangle=f\langle\mathrm{X}_2\rangle$. Soit $a\in\mathrm{X}_1$. On a $f(a)\in f\langle\mathrm{X}_1\rangle=f\langle\mathrm{X}_2\rangle$ donc il existe $b\in\mathrm{X}_2$ tel que $f(a)=f(b)$ donc $a=b\in\mathrm{X}_2$. Ainsi $\mathrm{X}_1\subset\mathrm{X}_2$ et par symétrie $\mathrm{X}_1=\mathrm{X}_2$.

18. Vrai. Supposons θ surjective. Il existe X partie de E tel que $\mathrm{F}=f\langle\mathrm{X}\rangle$ et donc f est surjective. Réciproquement, supposons f surjective. Soit Y une partie de E. On a $\theta(\mathrm{X})=\mathrm{Y}$ avec $\mathrm{X}=f^{-1}\langle\mathrm{Y}\rangle$ par surjectivité de f.

Enseignements à tirer de cet exercice

- ▹ *Pour une application* $f:\mathrm{E}\to\mathrm{F}$ *et* $\mathrm{B}\subset\mathrm{F}$, *la notation* $f^{-1}\langle\mathrm{B}\rangle$ *désigne* $\{x\in\mathrm{E}\,;\,f(x)\in\mathrm{B}\}$ *et n'a rien à voir avec la notion de bijection réciproque. Enfin, pour être plus précis, si* f *est bijective alors* $f^{-1}\langle\mathrm{B}\rangle$ *désigne aussi bien l'image réciproque de* B *par* f *que l'image directe de* B *par la bijection réciproque* f^{-1}.
- ▹ *On verra que* $(\mathscr{P}(\mathrm{E}),\Delta)$ *a une structure de groupe de neutre* $\varnothing$.

Corrigé des questions à choix multiple

1. Seuls b. et d. sont faux.

- Il existe $(a,b)\in E^2$ tel que $a\neq b$. On a donc $\displaystyle\bigcap_{X\in\mathscr{P}(E)\setminus\{\varnothing\}} X\subset\{a\}\cap\{b\}=\varnothing$.
- On a aussi $E=\displaystyle\bigcup_{x\in E}\{x\}\subset\bigcup_{X\in\mathscr{P}(E)\setminus\{E\}} X$ et $E=E\cap E\subset\displaystyle\bigcup_{(X,Y)\in\mathscr{P}(E)^2} X\cap Y$.
- Par distributivité de $\cap$ sur $\cup$:

$$\bigcup_{(X,Y)\in\mathscr{F}^2} X\cap Y=\bigcup_{X\in\mathscr{F}}\left(\bigcup_{Y\in\mathscr{F}} X\cap Y\right)=\bigcup_{X\in\mathscr{F}}\left(X\cap\bigcup_{Y\in\mathscr{F}} Y\right)=\left(\bigcup_{X\in\mathscr{F}} X\right)\cap\left(\bigcup_{Y\in\mathscr{F}} Y\right)=\bigcup_{X\in\mathscr{F}} X$$

et de même pour l'intersection.

2. Tout est vrai. Les applications suivantes conviennent :

- $g:(x,y)\mapsto(f(x),f(y))$.
- $h:u\mapsto f\circ u$.
- $\phi:X\mapsto f\langle X\rangle$.
- $\ell:v\mapsto v\circ f^{-1}$.
- Pour $\Longrightarrow$, considérer $\phi=f\circ\psi$. Pour la réciproque, poser $\psi=f^{-1}\circ\phi$.

3. Seul b. est faux. Pour λ et x dans $\mathbb{R}$, on a

$$f_\lambda(x)=\left(x+\frac{\lambda}{2}\right)^2+\frac{4-\lambda^2}{4}\qquad(\star)$$

- Soit $\lambda\in\mathbb{R}$. On a $f_\lambda(x_1)=f_\lambda(x_2)$ avec $x_1:=1-\frac{\lambda}{2}$ et $x_2:=-1-\frac{\lambda}{2}$. Comme $x_1\neq x_2$, f_λ n'est pas injective.
- Pour tout λ et x dans $\mathbb{R}$, on a $f_\lambda(x)>\frac{4-\lambda^2}{4}-1$. Ainsi, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$, f_λ n'est pas surjective.
- La fonction $x\mapsto x^2$ étant injective sur un vrai intervalle I de $\mathbb{R}$ *si et seulement si* $I\subset\mathbb{R}_+$, on déduit de la relation $(\star)$ que f_λ est injective sur $\mathbb{R}_+$ *si et seulement si* $\frac{\lambda}{2}\geqslant 0$, i.e. *si et seulement si* $\lambda\in\mathbb{R}_+$.

4. Seuls d. et f. sont vrais.

- La relation binaire $\subset$ sur $\mathscr{P}(E)$ n'est pas symétrique. Comme E est non vide, on a $\varnothing\subset E$ mais l'inclusion réciproque est fausse.
- On sait que $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathscr{P}(E)$. Notons a et b deux éléments distincts de E. Comme $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables pour l'inclusion, $\subset$ n'est pas une relation d'ordre totale.
- On reprend les notations précédentes. La partie $\{\{a\},\{b\}\}$ n'admet par de minimum car X est inclu dans $\{a\}$ et $\{b\}$ si et seulement si X est vide.
- Fixons $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$. Une partie X de E est un minorant de $\{A,B\}$ si et seulement si $X\subset A$ et $X\subset B$, ce qui équivaut à $X\subset A\cap B$. On a donc que $\{A,B\}$ admet une borne inférieure et $\inf\{A,B\}=A\cap B$.
- Fixons $(A,B)\in\mathscr{P}(E)^2$. Une partie X de E est un majorant de $\{A,B\}$ si et seulement si $A\subset X$ et $B\subset X$, ce qui équivaut à $A\cup B\subset X$. On a donc que $\{A,B\}$ admet une borne supérieure et $\sup\{A,B\}=A\cup B$.

- ▷ Pour $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(\mathrm{E})$ non vide, on prouve en raisonnant de façon analogue que $\inf \mathscr{F} = \bigcap_{\mathrm{X} \in \mathscr{F}} \mathrm{X}$ et $\sup \mathscr{F} = \bigcup_{\mathrm{X} \in \mathscr{F}} \mathrm{X}$.

5. Seuls les a. et d. sont faux.

- ▷ Une relation binaire sur un ensemble E est antisymétrique et symétrique *si et seulement si* il s'agit de la relation d'égalité.
- ▷ La relation $\mathscr{R}$ est clairement une relation d'équivalence. Pour $x_0 \in \mathrm{E}$, la classe d'équivalence de x_0 est l'ensemble $f^{-1}(\{f(x_0)\})$ des antécédents de $f(x_0)$ par f, d'où f est injectif *si et seulement si* toutes les classes d'équivalences sont des singletons, et f est constante *si et seulement si* il n'existe qu'une seule classe d'équivalence.

ENSEIGNEMENTS À TIRER DE CET EXERCICE

▷ *L'exercice 2 est élémentaire mais très intéressant pour s'entraîner à appréhender les différents niveaux : applications entre ensemble d'applications, etc.*

CORRIGÉ DES EXERCICES ÉLÉMENTAIRES

1. ▷ Soit (p_1, q_1) et (p_2, q_2) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ ayant la même image par ϕ. On a $p_2 - p_1 = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} \in]-1, 1[\cap \mathbb{Z}$ donc $p_1 = p_2$ et $q_2 = q_2$. Ainsi ϕ est injective.

- ▷ L'application ϕ n'est pas surjective. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{2}{3}$ admet un antécédent par ϕ : soit $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{pq+1}{q} = \frac{2}{3}\cdot$ On a alors $3pq + 3 = 2q$ $(\star)$. On en déduit que q divise 3 et donc que $q \in \{1, 2, 3\}$. Dans les trois cas de figure, on vérifie sans peine que $(\star)$ aboutit à une absurdité.

2. Soit $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie par $g(p, q) = 2^p(2q+1) - 1$. On déduit de l'indication de l'énoncé que g est bijective. L'application $\phi = g^{-1}$ est bien une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$.

3. ▷ Supposons p injective. Soit $x \in \mathrm{E}$. Comme $p(p(x)) = p(x)$, on a $p(x) = x$ par injectivité de p.

- ▷ Supposons p surjective. Soit $x \in \mathrm{E}$. Il existe $a \in \mathrm{E}$ tel que $x = p(a)$ par surjectivité de p. Ainsi, $p(x) = p(p(a)) = p(a) = x$.

Dans les deux cas, on a $p = \mathrm{id}_\mathrm{E}$.

4. ▷ Supposons f surjective. Soit $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$ tel que $\mathrm{B} \neq \varnothing$. Il existe alors $y \in \mathrm{B}$. Par surjectivité de f, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$. Ainsi, $x \in f^{-1}(\mathrm{B})$ et donc $f^{-1}\langle \mathrm{B} \rangle \neq \varnothing$.

- ▷ Réciproquement, supposons que $\left(\forall \mathrm{B} \subset \mathrm{F},\ f^{-1}\langle \mathrm{B} \rangle = \varnothing \iff \mathrm{B} = \varnothing\right)$. Soient $y \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{B} = \{y\}$. Comme $\mathrm{B} \neq \varnothing$, on a $f^{-1}\langle \mathrm{B} \rangle \neq \varnothing$ et y admet donc au moins un antécédent par f. ainsi f est surjective.

5. ▷ Supposons f injective. Pour x dans E, on a $f\left(f\left(f(x)\right)\right) = f(x)$, d'où $f\left(f(x)\right) = x$. En particulier f est surjective.

- ▷ Supposons f surjective. Soit y dans E. Il existe x dans E tel que $y = f(x)$. On a donc

$$y = f(x) = (f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f)(y)$$

Ainsi $f \circ f = \mathrm{id}_\mathrm{E}$ d'où f bijective, donc f est injective.

6. L'inclusion $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) \subset E$ est évidente. Soit x dans E.

▷ Cas 1 : x appartient à $\bigcup_{i\in I} A_i$.

▷ Cas 2 : x n'appartient à aucun des A_i. Comme $\forall i \in I$, x appartient à $A_i \cup B_i$, x appartient à B_i pour tout i dans I.

On en déduit que $E \subset \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right)$.

7. ▷ Supposons $X \subset Y$. On a clairement $E \cap X \subset E \cap Y$ et $E \cup X \subset E \cup Y$.

▷ Supposons l'existence d'une partie de E notée Z vérifiant $Z \cap X \subset Z \cap Y$ et $Z \cup X \subset Z \cup Y$. Fixons x dans X.

† Cas 1 : $x \in Z$. Alors $x \in Z \cap X$ donc $x \in Z \cap Y$ d'où $x \in Y$.

† Cas 2 : $x \notin Z$. Alors $x \in X \cup Z$ donc $x \in Z \cup Y$ d'où $x \in Y$.

On en déduit que $X \subset Y$.

8. **a.** La relation $\mathscr{R}_u$ est clairement réflexive, symétrique et transitive : c'est bien une relation d'équivalence.

b. Le point important à remarquer est que, pour tout $x \in E$, la classe d'équivalence de x est $u^{-1}\langle\{u(x)\}\rangle$. Cette relation d'équivalence possède une seule classe d'équivalence *si et seulement si u* est constante.

c. On prend ici $F = \{0, 1\}$ et l'on suppose que $u = \mathbb{1}_A$ où $A \in \mathscr{P}(E)$.

▷ Cas 1 : $A = \varnothing$ ou $A = E$. On a alors une seule classe d'équivalence E.

▷ Cas 2 : $A \neq E$ et $A \neq \varnothing$. On a alors deux classes A et $\overline{A}$.

9. ▷ La réflexivité est évidente.

▷ Si $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}x$, alors $f(x) \preccurlyeq f(y)$ et $f(y) \preccurlyeq f(x)$. Par antisymétrie de $\preccurlyeq$ sur F, on a donc $f(x) = f(y)$, ce qui implique que $x = y$ puisque f est injective. La relation $\mathscr{R}$ est donc antisymétrique.

▷ Soit $(x, y, z) \in E^3$ tels que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$. On a alors $f(x) \preccurlyeq f(y)$ et $f(y) \preccurlyeq f(z)$, d'où $f(x) \preccurlyeq f(z)$ par transitivité de $\preccurlyeq$ sur F, et donc $x\mathscr{R}z$. La relation $\mathscr{R}$ est donc transitive.

10. **a.** Soit $x \in B$. Comme $x \in A \cup B = A \cup C$, $x \in A$ ou $x \in C$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B = A \cap C$ donc $x \in C$. Ainsi, dans tous les cas de figure, $x \in C$. Ceci prouve que $B \subset C$ et puisque les hypothèses sont symétriques en B et C, on a aussi $C \subset B$ et donc $B = C$.

b. On a

$$A \setminus (B \cap C) = A \cap \overline{B \cap C} = A \cap (\overline{B} \cup \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C}) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$$

11. Comme $\theta \circ \theta = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{\mathbb{R}^*}}$, θ est bijective et $\theta^{-1} = \theta$.

ENSEIGNEMENTS À TIRER DE CES EXERCICES

▷ *Ces exercices, bien que mettant en jeu des objets abstraits, sont en fait très simples car ne nécessitent qu'une bonne connaissance des définitions.*

CORRIGÉ DES EXERCICES CLASSIQUES PLUS TECHNIQUES

1. a. L'équation $X \cup A = E$ équivaut clairement à $\overline{A} \subset X$.

b. L'équation $(A \cap X) \cup \left(B \cap \overline{X}\right) = \varnothing$ équivaut à $A \cap X = B \cap \overline{X} = \varnothing$, ce qui équivaut encore à $B \subset X \subset \overline{A}$.

- ▷ Cas 1 : $A \cap B = \varnothing$. L'ensemble des solutions est $\left\{X \subset E\,;\, B \subset X \subset \overline{A}\right\}$.
- ▷ Cas 2 : $A \cap B \neq \varnothing$. L'ensemble des solutions est vide.

2. a. ▷ Soit $x \in E$. Par réflexivité de $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$, $x \mathscr{R} x$. Ainsi $\mathscr{R}$ est réflexive.

- ▷ Soient x et y dans E tels que $x \mathscr{R} y$. On a donc $x \mathscr{R}_1 y$ et $x \mathscr{R}_2 y$ donc $y \mathscr{R}_1 x$ et $y \mathscr{R}_2 x$ par symétrie de $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$. On en déduit que $y \mathscr{R} x$. Ainsi $\mathscr{R}$ est symétrique.
- ▷ Soient x, y et z dans E tels que $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z$. On a donc $x \mathscr{R}_1 y$, $x \mathscr{R}_2 y$, $y \mathscr{R}_1 z$ et $y \mathscr{R}_2 z$. On a donc $x \mathscr{R}_1 z$ et $x \mathscr{R}_2 z$ par transitivité de $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$, d'où $x \mathscr{R} z$. Ainsi $\mathscr{R}$ est transitive.

La relation $\mathscr{R}$ est donc une relation d'équivalence.

b. Pour tout $x \in E$, nous noterons $\overline{x}$, $\overline{x}^1$ et $\overline{x}^2$ les classes d'équivalence de x pour les relations $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}_1$ et $\mathscr{R}_2$. Pour $y \in E$, on a

$$\begin{aligned} y \in \overline{x} &\iff x \mathscr{R} y \\ &\iff x \mathscr{R}_1 y \wedge x \mathscr{R}_2 y \\ &\iff y \in \overline{x}^1 \wedge y \in \overline{x}^2 \\ &\iff y \in \overline{x}^1 \cap \overline{x}^2 \end{aligned}$$

Ainsi $\overline{x} = \overline{x}^1 \cap \overline{x}^2$.

3. a. Toute partie X de E (resp. de F) est une partie de $E \cup F$. Ainsi $\mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F) \subset \mathscr{P}(E \cup F)$.

b. La *cns* recherchée est $E \subset F \vee F \subset E$. En effet :

- ▷ Si $E \subset F$ ou $F \subset E$, alors il y a clairement égalité.
- ▷ Sinon, il existe $e \in E \setminus F$ et $f \in F \setminus E$ d'où $\{e, f\} \in \mathscr{P}(E \times F)$ mais $\{e, f\} \notin \mathscr{P}(E) \cup \mathscr{P}(F)$.

c. Comme $(X \subset E \wedge X \subset F) \iff X \subset E \cap F$, on a $\mathscr{P}(E) \cap \mathscr{P}(F) = \mathscr{P}(E \cap F)$.

4. a. Soit $z \in \mathbb{U}$. Comme $z\overline{z} = |z|^2 = 1$, on a

$$\left|f_\omega(z)\right| = \left|\frac{z+\omega}{\overline{\omega}z+1}\right| = \frac{|z+\omega|}{|\overline{\omega}z+1|} = |z|\frac{|1+\omega\overline{z}|}{|\overline{\omega}z+1|} = \frac{|1+\omega\overline{z}|}{|\overline{\omega}z+1|} = \frac{\overline{|1+\omega\overline{z}|}}{|\overline{\omega}z+1|} = \frac{|1+\overline{\omega}z|}{|\overline{\omega}z+1|} = 1$$

Ainsi $f_\omega\langle\mathbb{U}\rangle \subset \mathbb{U}$.

b. Soit $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{U}$. L'équation $f_\omega(z) = \omega$ équivaut à $\dfrac{z+\omega}{\overline{\omega}z+1} = u$, ie $u(\overline{\omega}z+1) = z+\omega$, ie

$$z = \frac{u-\omega}{1-u\overline{\omega}} = f_{-\omega}(u)$$

car $u\overline{\omega} \neq 1$ puisque $|u\overline{\omega}| = |\omega| \neq 1$. Comme $f_{-\omega}\langle\mathbb{U}\rangle \subset \mathbb{U}$, on en déduit que $f_\omega\langle\mathbb{U}\rangle = \mathbb{U}$.

c. Le calcul mené à la question précédente montre que pour tout u dans $\mathbb{U}$, l'équation $f_\omega(z) = u$ admet une unique solution dans $\mathbb{U}$ qui est $z = f_{-\omega}(u)$. Ainsi f réalise une bijection de $\mathbb{U}$ sur $\mathbb{U}$ et sa réciproque est $f_{-\omega}$.

5. Raisonnons par récurrence forte. Pour tout n dans $\mathbb{N}$, notons $\mathrm{HR}(n)$ la propriété $f(n) = n$.

- ▷ Par surjectivité de f, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(m) = 0$. Comme $f(m) \geqslant m$, on en déduit que $m = 0$. Ainsi $\mathrm{HR}(0)$ est vraie.
- ▷ Soit n dans $\mathbb{N}$. Supposons les propositions $\mathrm{HR}(0), \dots, \mathrm{HR}(n)$ vraies. Par surjectivité de f, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(m) = n+1$. Comme $f(m) \geqslant m$, on en déduit que $m \leqslant n+1$. Comme $f(k) = k$ pour tout k dans $[\![0, n]\!]$, on en déduit que $m = n+1$. Ainsi $\mathrm{HR}(n+1)$ est vraie.

6. Posons $\mathrm{A} = [-1,1]$, $\mathrm{B} = [0,1]$, $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$, $x \mapsto x^2$ et $g : \mathrm{B} \to \mathrm{A}$, $x \mapsto \sqrt{x}$. On a $f \circ g = \mathrm{id}_\mathrm{B}$ mais $g \circ f \neq \mathrm{id}_\mathrm{A}$.

7. On notera $\overline{x}$ la classe d'équivalence de $x \in \mathrm{E}$.

a. Comme $\mathrm{E}/\mathscr{R} = \{\overline{x} ; x \in \mathrm{E}\}$ et $\pi(x) = \overline{x}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, l'application π est surjective.

b. On a $\pi^{-1}\left\langle \{\pi(x), \pi(y)\} \right\rangle = \pi(x) \cup \pi(y)$.

c. Supposons π injective. Comme $\forall x \in \mathrm{E}, \forall y \in \pi(x), \pi(y) = \pi(x)$, la classe d'équivalence de x vaut $\{x\}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$: $\mathscr{R}$ est la relation d'égalité sur E.

8. On définit une relation binaire sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x \preccurlyeq y \iff \exists n \in \mathbb{N},\ y = x^n$.

a. Soient x, y et z dans $\mathbb{R}_+^*$.

- ▷ $x = x^1$ donc $x \preccurlyeq x$;
- ▷ Supposons que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$. Il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x = y^n$ et $y = x^m$. On a donc $x = x^{nm}$.
  - † Si $x = 1$, alors $y = 1$ et $x = y$.
  - † Si $x \neq 1$, alors $nm = 1$ et $n = m = 1$ d'où $x = y$.
- ▷ Supposons que $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$. Il existe $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tel que $x = y^n$ et $y = z^m$. On a donc $x = z^k$ avec $k = nm \in \mathbb{N}$ d'où $x \preccurlyeq z$.

Ainsi $\preccurlyeq$ est réflexive, antisymétrique et transitive : c'est une relation d'ordre.

b. Cet ordre n'est pas total car $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n \neq 3$ et $3^n \neq 2$.

ENSEIGNEMENTS À TIRER DE CES EXERCICES

▷ *Au 5., c'est l'examen des premiers termes $f(0)$, $f(1)$, etc. qui aboutit à une démonstration par récurrence.*