Quizz d'algèbre 1 | Logique et raisonnements mathématiques

Il est essentiel de maîtriser la logique élémentaire, de bien préciser à quels ensembles appartiennent les variables d'une proposition mathématique et de manipuler correctement les quantificateurs. Arriver à comprendre un énoncé un peu formel et savoir énoncer clairement un énoncé écrit en toutes lettres sont des objectifs à atteindre le plus rapidement possible.

Vrai ou Faux ?

		V	F
1.	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, n premier $\Longrightarrow$ ($n = 2$ ou n est impair)	☐	☐
2.	Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $xy \neq 0 \Longrightarrow \big(x \neq 0$ et $y \neq 0\big)$	☐	☐
3.	Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y \Longrightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$	☐	☐
4.	Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x < 1 \Longleftrightarrow x^2 < x$	☐	☐
5.	Pour tous ensembles E et F, $\mathrm{E} \neq \mathrm{F} \Longleftrightarrow (\exists x \in \mathrm{E}, x \notin \mathrm{F})$	☐	☐
6.	Pour tous ensembles E et F, $\mathrm{E} \subset \mathrm{F} \Longleftrightarrow (\forall x, (x \in \mathrm{E}) \Longrightarrow (x \in \mathrm{F}))$	☐	☐
7.	$\forall (a, b) \in \mathbb{Z}^2, \exists (u, v) \in \mathbb{Z}^2, au + bv = 1$	☐	☐
8.	$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+, \exists a \in \mathbb{R}, \lvert a\rvert < \varepsilon$	☐	☐
9.	Pour $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $fg \neq 0 \Longrightarrow \big(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0\big) \vee \big(\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \neq 0\big)$	☐	☐
10.	$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{1}{x^2(x+1)} = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x+1}$	☐	☐
11.	$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \dfrac{1}{x^2(x+1)} = \dfrac{a}{x^2} + \dfrac{b}{x+1}$	☐	☐
12.	$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \mathbb{R}_+^*, \dfrac{1}{x(x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1}$	☐	☐
13.	Pour $x \in \mathbb{R}$, $x = 0$ est une condition nécessaire de $x^4 + x = 0$	☐	☐
14.	Pour $x \in \mathbb{R}$, $x = 0$ est une condition suffisante de $x^4 + x = 0$	☐	☐
15.	Pour $x \in \mathbb{R}$, $x = 0$ est une condition nécessaire et suffisante de $x^3 + x = 0$	☐	☐
16.	Pour $x \in \mathbb{C}$, $x = 0$ est une condition nécessaire de $x^3 + x = 0$	☐	☐

Questions à choix multiple

1. Les raisonnements suivants sont-ils corrects ? Expliquer et corriger leur(s) faille(s) le cas échéant.

a. Pour tout $n \geqslant 2$, on note $\mathrm{HR}(n)$ la proposition suivante : *n points distincts du plan sont alignés.*

- ▷ $\mathrm{HR}(2)$ est banalement vraie.
- ▷ Prouvons que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathrm{HR}(n)$ implique $\mathrm{HR}(n+1)$. Soit $n \geqslant 2$ et $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_{n+1}$ $n+1$ points du plan. D'après $\mathrm{HR}(n)$ les points $\mathrm{A}_1, \dots, \mathrm{A}_n$ sont alignés ainsi que les points $\mathrm{A}_2, \dots, \mathrm{A}_{n+1}$. Les $n+1$ points sont donc alignés sur la droite $(\mathrm{A}_2\mathrm{A}_n)$. L'hypothèse $\mathrm{HR}(n+1)$ est donc vérifiée.
- ▷ La propriété est donc vraie pour tout $n \geqslant 2$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 10^n + (-1)^n$ est divisible par 11.

En effet, $u_{n+1} = 10u_n + 11(-1)^n$, et u_{n+1} est donc divisible par 11 dès que u_n est divisible par 11.

c. Pour tout $n \geqslant 0$, on note $\mathrm{HR}(n)$ la proposition suivante : $n^2 \leqslant 2^n$.

- ▷ $\mathrm{HR}(0)$ est banalement vraie.
- ▷ Prouvons que pour tout $n \geqslant 0$, $\mathrm{HR}(n)$ implique $\mathrm{HR}(n+1)$. Soit $n \geqslant 0$. Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie, c'est-à-dire $n^2 \leqslant 2^n$. On a donc $2^{n+1} \geqslant 2n^2$. Or $2n^2 \geqslant (n+1)^2$, d'où $(n+1)^2 \leqslant 2^{n+1}$. L'hypothèse $\mathrm{HR}(n+1)$ est donc vérifiée.
- ▷ On a donc que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie.

2. Soit $\mathscr{P}$ un prédicat sur $\mathbb{N}$. La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans les cas suivants :

a. $\mathscr{P}_0$ est vraie et $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \mathscr{P}_n \implies \mathscr{P}_{2n} \wedge \mathscr{P}_{2n+1}$.

b. $\mathscr{P}_0$ et $\mathscr{P}_2$ sont vraies et $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \mathscr{P}_{2n} \implies (\mathscr{P}_n \wedge \mathscr{P}_{2n+1})$.

c. $\mathscr{P}_1$ est vraie, $\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \mathscr{P}_n \implies \mathscr{P}_{n-1}$, et $\forall n \in \mathbb{N}\,, \mathscr{P}_n \implies \mathscr{P}_{2n}$.

3. Vrai ou faux ?

a. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N}, \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \notin \mathbb{Q}$.

c. $\forall r \in \mathbb{Q},\ r + \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

d. $\forall r \in \mathbb{Q},\ r\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{P}_n : 3 \mid 4^n + 2$ et $\mathscr{Q}_n : 3 \mid 4^n + 1$. Vrai ou faux ?

a. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n \implies \mathscr{P}_{n+1}$.

b. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{Q}_n \implies \mathscr{Q}_{n+1}$.

c. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{P}_n$ est vraie.

d. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathscr{Q}_n$ est fausse.

EXERCICES ÉLÉMENTAIRES

1. Écrire, à l'aide de quantificateurs, les assertions suivantes et leur négation :

a. Il existe un entier naturel multiple de tous les autres.

b. Tout entier relatif peut s'écrire comme produit de deux entiers relatifs.

c. Tout réel possède une racine carrée dans $\mathbb{R}$.

d. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est croissante.

2. Résoudre l'équation $x = \sqrt{x+1}$.

3. a. Montrer que, pour tous x et y réels positifs, $\sqrt{xy} \leqslant \dfrac{x+y}{2}\cdot$

b. En déduire que, pour tous x et y réels strictement positifs, $\dfrac{x}{x^4+y^2} \leqslant \dfrac{1}{2xy}\cdot$

c. En déduire que, pour tous x et y réels strictement positifs, $\dfrac{x}{x^4+y^2} + \dfrac{y}{y^4+x^2} \leqslant \dfrac{1}{xy}\cdot$

4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}}+1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Déterminer la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Déterminer les solutions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation suivante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)+f(y) = 2f(x-y)+1$.

6. Montrer qu'il n'existe aucun polynôme P à coefficients réels tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x = \mathrm{P}(x)$.

7. On utilise des cartes marquées d'une lettre d'un côté et d'un chiffre de l'autre. On dispose sur une table les cartes qui apparaissent comme suit,

$$\boxed{\mathrm{A}} \quad \boxed{\mathrm{D}} \quad \boxed{3} \quad \boxed{7}$$

Quelles cartes faut-il retourner pour vérifier si l'assertion suivante est vraie : *Si « A » figure au recto d'une carte, alors « 3 » figure au verso ?*

8. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $\alpha \in \mathbb{R}$ pour qu'il existe un couple de réels (x, y) tel que $x^2 + y^2 = \alpha xy$ et $xy \neq 0$.

9. a. Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists!(x_n, y_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\left(\sqrt{2}-1\right)^n = x_n + y_n\sqrt{2}$.

Exercices classiques plus techniques

1. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. On pose $b_0 = 1$ et $b_{n+1} = 1 - \sum_{k=0}^{n} a_k b_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, b_n et $\prod_{k=0}^{n-1}(1-a_k)$.

2. On cherche toutes les isométries de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour lesquelles

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \big|f(x) - f(y)\big| = |x-y|$$

a. Soit f une isométrie de $\mathbb{R}$. On note δ la fonction $x \mapsto f(x) - f(0)$.

i. Montrer, en calculant $\big(f(x)-f(y)\big)^2$ de deux manières différentes, que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\delta(x)\delta(y) = xy$.

ii. En déduire la forme de f.

b. Conclure.

3. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Résoudre l'équation $|x-a| - |x+a| = |x-1|$.

4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{3n}{2n+1}$.

5. Étudier la monotonie de la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_n^2 + u_{n+1}^2$.

6. Déterminer l'ensemble $\mathrm{A} := \left\{ y \in \mathbb{R}\,;\, \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2xy + y^4 = 0 \right\}$.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute fonction croissante $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$ admet un point fixe.

8. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) = f(x) + f(y)$.

9. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y$.

10. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, u_k le plus grand diviseur impair de k.
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n} = n^2$.

11. Soit $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de l'ensemble $\mathbb{N}$ dans lui-même. On note $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Démontrer que

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \neq \{\phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

On pourra s'aider de l'application f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par $f(n) := \phi_n(n) + 1$.

Corrigé du Vrai ou Faux ?

1. Vrai car sa contraposée est vraie : Si $n \in \mathbb{N}$ est pair et distinct de 2 alors n n'est pas premier.

2. Vrai car sa contraposée est vraie : $x = 0$ ou $y = 0$ implique $xy = 0$.

3. Vrai car sa contraposée est vraie. Supposons $(x+1)(y-1) = (x-1)(y+1)$. On a alors $y - x = x - y$ d'où $x = y$.

4. Faux. Pour $x = -2$, on a $x^2 > x$ et $x < 1$.

5. Faux. La proposition $\exists x \in \mathrm{E},\ x \notin \mathrm{F}$ équivaut à $\mathrm{E} \not\subset \mathrm{F}$, qui n'est pas équivalente à $\mathrm{E} \neq \mathrm{F}$.

6. Vrai.

7. Faux. Pour $(a, b) = (0, 0)$, on a $\forall (u, v) \in \mathbb{Z}^2,\ au + bv = 0$.

8. Faux. Pour $\varepsilon = 0$, on a $\forall a \in \mathbb{R},\ |a| \geqslant \varepsilon$.

9. Faux. Pour $f :\to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $g(x) = 0$ et $g(1) = 1$, on a $fg = 0$ mais $f \neq 0$ et $g \neq 0$.

10. Faux. Raisonnons par l'absurde en supposant cette propriété. On a alors $a(x+1) + bx^2 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ (mettre au même dénominateur). La fonction polynomiale $x \mapsto bx^2 - ax + a - 1$ admet une infinité de racine donc est nulle, donc ses coefficients sont nuls : $b = -a = a - 1 = 0$ d'où $a = 1$ et $a = 0$ ce qui est absurde.

11. Vrai. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $a := 0$ et $b := \frac{1}{x^2}\cdot$ On a bien $\frac{1}{x^2(x+1)} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x+1}\cdot$

12. Vrai. Pour $(a, b) \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} = \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}\cdot$ Le couple $(a, b) := (1, -1)$ convient donc.

13. Faux. Pour $x = -1$, on a $x^4 + x = 0$ d'où $x^4 + x = 0$ n'implique pas $x = 0$.

14. Vrai. Si $x = 0$, alors $x^4 + x = 0$.

15. Vrai. Pour x dans $\mathbb{R}$, on a $x^3 + x = x(x^2+1)$ d'où $x^3 + x = 0 \iff x = 0$.

16. Faux. Pour $x := i$, on a $x^3 + x = 0$.

Enseignements à tirer de cet exercice

- *De l'exercice 9 : quand on écrit $fg = 0$, cela signifie que la fonction produit fg est nulle. Ainsi $fg = 0$ implique pas que l'une des deux fonctions f ou g soit nulle. Ce qui est vrai est que si $fg = 0$, alors pour tout réel x, l'un des deux réels $f(x)$ ou $g(x)$ est nul (mais celui des deux qui est nul peut varier avec x).*
- *Les questions 10 et 11 illustrent un point très important : quand on écrit « $\exists (a, b), \forall x, \ldots$ », le couple (a, b) est universel ie le même pour tous les x dans $\mathbb{R}_+^*$; quand on écrit « $\forall x, \exists (a, b), \ldots$ », le couple (a, b) peut dépendre de x.*
- *Les questions 15 et 16 illustrent l'importance de savoir à quelques ensembles appartiennent les variables d'une proposition mathématique.*

CORRIGÉ DES QUESTIONS À CHOIX MULTIPLE

1. Les trois raisonnements sont faux.

a. La propriété est bien-sûr fausse pour tout $n \geqslant 3$. La faille du raisonnement est que l'implication $\mathrm{HR}(n) \implies \mathrm{HR}(n+1)$ n'est vraie que pour $n \geqslant 3$.

b. Dans cet exemple, $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{HR}(n) \implies \mathrm{HR}(n+1)$ mais sans l'existence d'un entier n_0 tel que $\mathrm{HR}(n_0)$ soit vraie, on ne peut rien en conclure.

c. Nous allons voir que la proposition $n^2 \leqslant 2^n$ est vraie pour tous les entiers sauf pour $n = 3$. L'inégalité $2n^2 \geqslant (n+1)^2$ n'est en fait vraie que si $n \geqslant 3$. Le raisonnement correct est le suivant :

- ▷ $\mathrm{HR}(4)$ est vraie.
- ▷ Prouvons que pour tout $n \geqslant 4$, $\mathrm{HR}(n)$ implique $\mathrm{HR}(n+1)$. Soit $n \geqslant 4$. Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie, c'est-à-dire $n^2 \leqslant 2^n$. On a donc $2^{n+1} \geqslant 2n^2$. Or $2n^2 \geqslant (n+1)^2 \iff n(n-2) \geqslant 1$, ceet dernière inégalité étant vérifiée puisque $n \geqslant 3$. D'où $(n+1)^2 \leqslant 2^{n+1}$. L'hypothèse $\mathrm{HR}(n+1)$ est donc vérifiée.
- ▷ D'après le principe de récurrence, $\forall n \geqslant 4$, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie.

Par ailleurs, il est clair que $\mathrm{HR}(0), \mathrm{HR}(1)$ et $\mathrm{HR}(2)$ sont vraies, mais en revanche $\mathrm{HR}(3)$ est fausse puisque $3^2 = 9 > 2^3 = 8$. Ainsi, $\mathrm{HR}(n)$ est vraie si et seulement si $n \in \mathbb{N} \setminus \{3\}$.

2. Seuls a. et c. sont vrais.

a. D'un point de vue intuitif, $\mathscr{P}_0$ est vraie donc $\mathscr{P}_0 \wedge \mathscr{P}_1$ aussi donc $\mathscr{P}_1$ aussi, puis on en déduit que $\mathscr{P}_2 \wedge \mathscr{P}_3$ aussi, etc. On formalise en démontrant que par récurrence l'hyposthèse $\mathrm{RH}(n)$: $\mathscr{P}_0, \dots, \mathscr{P}_{2n}$ sont vraies.

- ▷ $\mathrm{HR}(0)$ est vraie.
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie. Comme $n \in [\![0, 2n]\!]$, $\mathscr{P}_n$ est vraie donc $\mathscr{P}_{2n+1}$ aussi. Puisque $n+1 \leqslant 2n+1$, $\mathscr{P}_{2n+2}$ est vraie. Ainsi $\mathrm{HR}(n+1)$ est vraie.

b. D'un point de vue intuitif, $\mathscr{P}_0$ est vraie donc $\mathscr{P}_1$ aussi. Comme $\mathscr{P}_2$ est vraie, $\mathscr{P}_3$ l'est aussi. Les itérations s'arrêtent ici car il faudrait avoir $\mathscr{P}_{2n}$ vraie pour continuer. Un contre-exemple est fournit par un prédicat quelconque sur $\mathbb{N}$ vérifiant que $\mathscr{P}_n$ est vrai pour $n \in [\![0, 3]\!]$ et faux pour $n \geqslant 4$.

c. Intuitivement, $\mathscr{P}_1$, $\mathscr{P}_2, \dots, \mathscr{P}_{2^n}$, etc. sont vraies en itérant $\mathscr{P}_n \implies \mathscr{P}_{2n}$ à partir de $\mathscr{P}_1$. On en déduit que $\mathscr{P}_0, \mathscr{P}_1, \dots, \mathscr{P}_{2^n}$ sont vraies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par récurrence descendante.

3. Seuls a. et c. sont vraies.

- ▷ Raisonnons par l'absurde en supposant $\frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$. Comme $\frac{1}{\sqrt{2}} > 0$, il existe $(p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{p}{q}\cdot$ On en déduit que $\sqrt{2} = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde.
- ▷ Faux. La valeur $n := 2$ fournit un contre-exemple évident.
- ▷ Raisonnons par l'absurde. Supposons que $r + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Il existe $r' \in \mathbb{Q}$ tel que $r + \sqrt{2} = r'$ d'où $\sqrt{2} = r' - r \in \mathbb{Q}$ car $\mathbb{Q}$ est stable par l'addition (facile à vérifier). C'est donc absurde.
- ▷ Faux. La valeur $r := 0$ fournit un contre-exemple évident.

4. Tout est vrai.

- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $3 \mid 4^n+2$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n = 3k-2$. On a $4^{n+1}+2 = 12k-6$ donc $3 \mid 4^{n+1}+2$.
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $3 \mid 4^n+1$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $4^n = 3k-1$. On a $4^{n+1}+1 = 12k-3$ donc $3 \mid 4^{n+1}+1$.
- ▷ Comme $4^0+2=3$, $\mathscr{P}_0$ est vraie donc $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ (par le premier point).
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $4^n+2-(4^n+1)=1$, 4^n+1 et 4^n+2 ne peuvent être tous les deux divisibles par 3 (sinon 3 diviserait leur différence qui vaut 1). Comme $\mathscr{P}_n$ est vraie, on en déduit que $\mathscr{Q}_n$ est fausse.

ENSEIGNEMENTS À TIRER DE CET EXERCICE

- ▷ *Commentaire sur le 1. pour les lecteurs familiers des congruences : la propriété* $\mathrm{HR}(n)$ *est en fait fausse pour tout* n*. Puisque* $10 = -1\ [11]$*, on a* $10^n = (-1)^n\ [11]$ *et donc* $10^n + (-1)^n = 2(-1)^n = \pm 2 \neq 0\ [11]$.
- ▷ *On peut également utiliser des congruences au 3.*

CORRIGÉ DES EXERCICES ÉLÉMENTAIRES

1. a. L'assertion $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ m \mid n$ et son contraire $\forall n \in \mathbb{N},\ \exists m \in \mathbb{N},\ m$ ne divise pas n.

b. L'assertion $\forall n \in \mathbb{Z},\ \exists (p,q) \in \mathbb{Z}^2,\ n = pq$ et son contraire $\exists n \in \mathbb{Z},\ \forall (a,b) \in \mathbb{Z}^2,\ m \neq pq$.

c. L'assertion $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists a \in \mathbb{R},\ x = a^2$ et son contraire $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall a \in \mathbb{R},\ x \neq a^2$.

d. L'assertion $\forall (x,y) \in \mathrm{D}^2,\ x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)$ et son contraire $\exists (x,y) \in \mathrm{D}^2,\ x \leqslant y \,\text{et}\, f(x) > f(y)$.

2. L'équation a un sens pour $x \geqslant -1$. Soit $x \geqslant -1$. On a

$$\begin{aligned} x = \sqrt{x+1} &\iff x \geqslant 0 \,\text{et}\, x^2 = x+1 \\ &\iff x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

car l'équation $x^2 = x+1$ admet pour racines $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (positive) et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (négative).

3. a. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$. On a $\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2}{2} \geqslant 0$.

b. Soit $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Par la question précédente, $0 < x^2 y \leqslant \frac{x^4+y^2}{2}$ d'où $\frac{x}{x^4+y^2} \leqslant \frac{1}{2xy}$.

c. Soit $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. Par le b, $\frac{x}{x^4+y^2} \leqslant \frac{1}{2xy}$ et $\frac{y}{y^4+x^2} \leqslant \frac{1}{2xy}$ d'où $\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leqslant \frac{1}{xy}$.

4. ▷ On trouve que $u_k = k$ pour $k \in [\![0,5]\!]$. On conjecture que $u_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

▷ On raisonne par récurrence forte. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition $u_n = n$.

† Par la question précédente, la propriété est vraie au rang 0.

† Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(0), \ldots, \mathscr{P}(n)$ sont vraies.

- ► Cas 1 : n est pair. Puisque $\frac{n}{2} \in [\![0,n]\!]$, on a $u_n = 2u_{\frac{n}{2}} + 1 = 2 \times \frac{n}{2} + 1 = n+1$.
- ► Cas 2 : n est impair. On a $u_{n+1} = u_n + 1 = n+1$.

Ainsi $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

5. ▷ ANALYSE : supposons que f désigne une solution de l'équation. On en déduit (en fixant $y = 0$) que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f(0) = 2f(x) + 1$, ie $f(x) = f(0) - 1$. Ceci prouve que f est nécessairement une fonction constante.

▷ SYNTHÈSE : une fonction f constante prenant la valeur réelle c est solution de l'équation *si et seulement si* $c + c = 2c + 1$, soit encore $0 = 1$. Ceci est absurde, il n'y a donc aucune solution constante à l'équation de l'énoncé.

6. Voici deux preuves possibles (parmi tant d'autres !).

▷ Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel polynôme P. On a alors $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x}\mathrm{P}(x) = 1$, et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\mathrm{P}(x) = 0$ (l'exponentielle *l'emporte* sur les puissances puissances en $+\infty$, donc également sur les polynômes), on obtient par passage à la limite, $0 = 1$. Ce qui est absurde.

▷ Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence d'un tel polynôme P. On a alors $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}(x) = e^x$. L'exponentielle ne s'annulant pas, le polynôme P est non nul. Toutes les fonctions en jeu étant dérivables, la dérivation membre à membre de cette égalité aboutit à $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{P}'(x) = e^x = \mathrm{P}(x)$, ie $\mathrm{P} = \mathrm{P}'$, ce qui est absurde car P étant non nul, on a $\deg \mathrm{P}' < \deg \mathrm{P}$.

7. Il faut bien-sûr retourner les cartes marquées A et 7.

8. On remarque que rechercher $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy \neq 0$ et $\alpha xy = x^2 + y^2$ revient à trouver les valeurs non nulles de y telles que l'équation $\mathrm{X}^2 - \alpha y\mathrm{X} + y^2 = 0$ admet une solution non nulle.

▷ ANALYSE : soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $xy \neq 0$ et $\alpha xy = x^2 + y^2$. Le discriminant de l'équation $\mathrm{X}^2 - \alpha y\mathrm{X} + y^2 = 0$, $\Delta = (\alpha^2 - 4)y^2$ est alors positif. Et, puisque $y \neq 0$, on a donc $\alpha^2 \geqslant 4$.

▷ SYNTHÈSE : supposons $\alpha^2 \geqslant 4$. Soit alors $y = 1$. Le discriminant de l'équation $\mathrm{X}^2 - \alpha\mathrm{X} + 1 = 0$, $\Delta = (\alpha^2 - 4)$ est alors positif et les deux racines x_1 et x_2 de l'équation sont non nulles puisque $x_1x_2 = 1$. Le couple $(x_1, 1)$ est une solution au problème posé.

▷ CONCLUSION : la condition nécessaire et suffisante est $\alpha^2 \geqslant 4$, ie $|\alpha| \geqslant 2$.

9. a. Raisonnons par l'absurde. Soit $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$ tel que $p \wedge q = 1$ et $\sqrt{2} = \frac{p}{q}\cdot$ On a $2q^2 = p^2$. Comme p^2 est pair, p est aussi pair et on a $p = 2k$ avec $k \in \mathbb{N}$ ainsi $q^2 = 2k^2$ donc q^2 est pair d'où q est pair. La parité commune de p et q est en contradiction avec l'hypothèse $p \wedge q = 1$.

b. ▷ Démontrons l'unicité. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y, u, v) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $\left(\sqrt{2} - 1\right)^n = x + y\sqrt{2} = u + v\sqrt{2}$. On a alors $\sqrt{2}(v - y) = x - u$. Supposons par l'absurde que $v \neq y$. On aurait alors $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est absurde par la question précédente. Ainsi $v = y$ d'où $x - u = 0$ et donc $(x, y) = (u, v)$.

▷ Démontrons l'existence par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

† Comme $\left(\sqrt{2} - 1\right)^0 = 1$ la propriété est vraie au rang 0 en choisissant $(x_0, y_0) = (1, 0)$.

† Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $(x_n, y_n) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $\left(\sqrt{2} - 1\right)^n = x_n + y_n\sqrt{2}$. On a

$$\left(\sqrt{2} - 1\right)^{n+1} = \left(x_n + y_n\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - 1\right) = 2y_n - x_n + \sqrt{2}\left(x_n - y_n\right)$$

En posant $x_{n+1} := 2y_n - x_n$ et $y_{n+1} := x_n - y_n$, on a bien $(x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{Z}^2$ et $\left(\sqrt{2} - 1\right)^{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2}$, d'où la propriété au rang $n + 1$.

ENSEIGNEMENTS À TIRER DE CES EXERCICES

▷ *Au 3., on utilise un argument de symétrie classique. Soit* D *une partie symétrique de* $\mathbb{R}^2$*, ie telle que* $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (x,y)\in\mathrm{D} \iff (y,x)\in\mathrm{D}$*. Si* $\mathscr{P}(x,y)$ *est vrai pour tout* $(x,y)\in\mathrm{D}$*, alors* $\mathscr{P}(y,x)$ *est vraie pour tout* $(x,y)\in\mathrm{D}$*.*

▷ *Au 4., on émet une conjecture après avoir calculer les premiers termes.*

CORRIGÉ DES EXERCICES CLASSIQUES PLUS TECHNIQUES

1. On remarque que $b_{n+1} = b_n - a_n b_n = b_n(1-a_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Comme $b_0 = 1$, on conjecture que $b_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-a_k)$. On raisonne par récurrence. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition $b_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-a_k)$.

▷ On a $b_1 = 1-a_0b_0 = 1-a_0$ donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

▷ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. On a

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= 1-\sum_{k=0}^{n+1} a_k b_k = 1-\sum_{k=0}^{n} a_k b_k - a_n b_n = b_n - a_n b_n \\ &= b_n(1-a_n) = \prod_{k=0}^{n}(1-a_k) \end{aligned}$$

d'où $\mathscr{P}(n+1)$.

2. a. i. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a $\big(f(x)-f(y)\big)^2 = (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$ et

$$\big(f(x)-f(y)\big)^2 = \big(\delta(x)-\delta(y)\big)^2 = \delta(x)^2 - 2\delta(x)\delta(y)+\delta(y)^2 = x^2-2\delta(x)\delta(y)+y^2$$

d'où $\delta(x)\delta(y) = xy$.

ii. Soit $x\in\mathbb{R}$. Par la question précédente, on a $\delta(x)\delta(1) = x$. Comme $\delta(1)^2 = 1$ (toujours par la question précédente), on a $\delta(1) = \pm 1$. Ainsi, $\delta(x) = \pm x$, ie $f(x) = \pm x + f(0)$ (le signe $\pm$ étant indépendant de x).

b. ▷ Si f est une isométrie, alors il existe $\mu\in\mathbb{R}$ telle que $f : x\mapsto x+\mu$ ou $f : x\mapsto -x+\mu$.

▷ Réciproquement, pour $\mu\in\mathbb{R}$, les fonctions $x\mapsto x+\mu$ et $x\mapsto -x+\mu$ sont clairement des solutions.

Les solutions sont donc les fonctions de la forme $x\mapsto x+\mu$ ou $x\mapsto -x+\mu$, avec $\mu\in\mathbb{R}$.

3. Soit $a\in\mathbb{R}$. Notons E_a l'équation $|x-a|-|x+a| = |x-1|$ et $\mathscr{S}_a$ l'ensemble des solutions de E_a dans $\mathbb{R}$.

▷ Cas 1 : $a\geqslant 1$.

† Soit $x\geqslant a$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } \mathrm{E}_a &\iff x-a-x-a = x-1 \\ &\iff x = 1-2a \end{aligned}$$

Comme $1-2a < a$, E_a n'a pas de solution dans $[a,+\infty[$.

† Soit $x \leqslant -a$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } \mathrm{E}_a &\iff -x+a+x+a = 1-x \\ &\iff x = 1-2a \end{aligned}$$

Comme $1-2a \leqslant -a$, E_a admet une seule solution $(1-2a)$ dans $]-\infty,-a]$.

† Soit $x \in [-a,1]$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } \mathrm{E}_a &\iff -x+a-x-a = 1-x \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

Comme $-a \leqslant -1$, E_a admet une seule solution (-1) dans $]-a,1]$.

† Soit $x \in]1,a[$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } \mathrm{E}_a &\iff -x+a-x-a = x-1 \\ &\iff x = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Ainsi E_a n'admet aucune solution dans $]1,a[$.

On a donc $\mathscr{S} = \{-1\,,\,1-2a\}$.

▷ Cas 2 : $0 < a < 1$.

† Soit $x \geqslant 1$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } \mathrm{E}_a &\iff x-a-x-a = x-1 \\ &\iff x = 1-2a \end{aligned}$$

Comme $1-2a < 1$, E_a n'a pas de solution dans $[1,+\infty[$.

† Soit $x \leqslant -a$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } \mathrm{E}_a &\iff -x+a+x+a = 1-x \\ &\iff x = 1-2a \end{aligned}$$

Comme $1-2a > -a$, E_a n'admet aucune solution dans $]-\infty,-a]$.

† Soit $x \in]-a,a]$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } \mathrm{E}_a &\iff -x+a-x-a = 1-x \\ &\iff x = -1 \end{aligned}$$

Comme $-a > -1$, E_a n'admet aucune solution dans $]-a,a]$.

† Soit $x \in]a,1[$.

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } \mathrm{E}_a &\iff x-a-x-a = 1-x \\ &\iff x = 1+2a \end{aligned}$$

Ainsi E_a n'admet aucune solution dans $]a,1[$.

On a donc $\mathscr{S} = \varnothing$.

4. On raisonne par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \geqslant \frac{3n}{2n+1}$.

▷ Comme $1 = \frac{3}{2+1}$, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. On a

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant \frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2}$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\frac{3n}{2n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant \frac{3(n+1)}{2(n+1)+1} &\iff \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant \frac{3(n+1)(2n+1) - 3n(2n+3)}{(2n+1)(2n+3)} \\
&\iff \frac{1}{(n+1)^2} \geqslant \frac{3}{(2n+1)(2n+3)} \\
&\iff (2n+1)(2n+3) \geqslant 3(n+1)^2 \\
&\iff n^2 + 2n \geqslant 0
\end{aligned}$$

Comme $n^2 + 2n \geqslant 0$, on en déduit $\mathscr{P}(n+1)$.

5. On conjecture la croissante de la suite. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathrm{HR}(n)$ la propriété $0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1}$ et $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

▷ Comme $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$, la propriété $\mathrm{HR}(0)$ est vraie.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie. On a

$$u_{n+3} = u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2 \geqslant u_n^2 + u_{n+1}^2 = u_{n+2}$$

par $\mathrm{HR}(n)$ et croissance de $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi $\mathrm{HR}(n+1)$ est vraie.

6. Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation $x^2 + 2yx + y^4 = 0$ admet une solution réelle *si et seulement si* le discriminant $\Delta := (2y)^2 - 4y^4 = 4y^2\left(1 - y^2\right)$ de ce trinôme est positif. On en déduit que $\mathrm{A} = [-1, 1]$.

7. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété $\mathrm{HR}(n)$ suivante : toute fonction croissante f de $[\![1, n]\!]$ dans lui-même admet un point fixe.

▷ La propriété est vraie au rang 1 car une fonction de $\{1\}$ dans lui-même admet 1 pour point fixe.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vraie. Soit $f : [\![1, n+1]\!] \to [\![1, n+1]\!]$ croissante.

† Cas 1 : $f(n+1) = n+1$. Alors $n+1$ est un point fixe de f.

† Cas 2 : $f(n+1) \neq n+1$. Alors $f(n+1) \leqslant n$ d'où $g := f|_{[\![1,n]\!]}^{[\![1,n]\!]}$ est bien définie par croissance de f. On déduit de $\mathrm{HR}(n)$ que g admet un point fixe donc f en admet aussi et l'hypothèse est vraie au rang $n+1$.

8. Effectuons une analyse-synthèse.

▷ ANALYSE. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x)f(y) = f(x) + f(y)$.

† Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x)^2 = 2f(x)$, d'où $f(x) = 0$ ou $f(x) = 2$.

† Supposons l'existence de $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) = 0$. On a alors $f(y) = f(x_0)f(y) - f(x_0) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Ainsi $f = 0$.

† On en déduit que f est constante égale à 0 ou 2.

▷ SYNTHÈSE. Réciproquement, il est clair que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 0$ et $x \mapsto 2$ sont solutions.

L'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x)f(y) = f(x) + f(y)$ est donc réduit à la paire formée par les fonctions constantes égales à 0 et 2.

9. Effectuons une analyse-synthèse.

▷ Analyse. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\big(y - f(x)\big) = 2 - x - y$.

† Soit $y \in \mathbb{R}$. On a $f(y) = f\big(y + f(0) - f(0)\big) = 2 - 0 - (y + f(0)) = 2 - f(0) - y$.

† Ainsi, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = \mu - y$.

▷ Synthèse. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \mu - y$. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$f\big(y - f(x)\big) = \mu - \big(y - f(x)\big) = \mu - (y - \mu + x) = 2\mu - x - y$$

On en déduit que f est solution *si et seulement si* $\mu = 1$.

Ainsi la seule solution est la fonction $x \mapsto 1 - x$.

10. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. Le résultat est vrai au rang 1 car $u_2 = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons le résultat vrai au rang n. On a

$$\begin{aligned} u_{n+2} + u_{n+3} + \cdots + u_{2n+2} &= (u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{2n}) - u_{n+1} + u_{2n+1} + u_{2n+2} \\ &= n^2 - u_{n+1} + 2n + 1 + u_{2n+1} = (n+1)^2 + u_{2n+2} - u_{n+1} \end{aligned}$$

Justifions que $u_{2n+1} = u_{n+1}$. On a $u_{n+1} \mid n + 1 \mid 2n + 2$ et u_{n+1} est impair. De plus, $u_{2n+2} \mid 2n + 2 = 2(n + 1)$ et u_{2n+2} est impair, on a donc $u_{2n+2} \mid n + 1$ par le lemme de Gauss. Ainsi $u_{2n+2} = u_{n+1}$ et le résultat est vrai au rang $n + 1$.

11. On a $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $f \in \{\phi_n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$. Il existe alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $f = \phi_n$. On a alors $f(n) = \phi_n(n)$ ie $1 = 0$, ce qui est absurde.

Enseignements à tirer de ces exercices

▷ *Aux 1. et 5., il est assez naturel de regarder les premiers termes afin de conjecturer le résultat. Cette approche permet aussi d'aborder le 7. (c'est en regardant les cas $n = 1, 2, 3$ et 4 que l'on peut avoir l'idée d'une récurrence).*

▷ *L'analyse-synthèse est une approche très adaptée aux questions ouvertes (cf. les 2., 8. et 9.).*

▷ *Rappelons le lemme de Gauss utilisé au 10. : si $a \mid bc$ et $a \wedge b = 1$, alors $a \mid c$.*