Quizz d'algèbre 3 | Nombres complexes

Beaucoup de formules du cours sur les nombres complexes se démontrent de tête car résultent de manipulations élémentaires (un petit développement, une écriture sous forme algébrique ou polaire, etc.) ou s'interprètent géométriquement (cf. l'inégalité triangulaire).

Vrai ou Faux ?

		V	F
1.	Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im}\left(z^2\right) = \operatorname{Im}(z)^2$	☐	☐
2.	Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos(\theta) = \operatorname{Re}\left(e^{i\theta}\right)$	☐	☐
3.	Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos^2(\theta) = \operatorname{Re}\left(e^{2i\theta}\right)$	☐	☐
4.	Pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = -\operatorname{Im}(z)$	☐	☐
5.	Le nombre ij est une racine carrée de $1+j$	☐	☐
6.	Soit $\omega \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$. Les racines n-ème de l'unité sont $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$	☐	☐
7.	Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\left\{\overline{\omega}\,;\, \omega \in \mathbb{U}_n\right\} = \mathbb{U}_n$	☐	☐
8.	Pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\lvert z+1\rvert^2 + \lvert z-1\rvert^2 = 4$	☐	☐
9.	Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Im}(z) \iff \lvert z-1\rvert = \lvert z-i\rvert$	☐	☐
10.	Pour tout $(a,b) \in \left(\mathbb{C}^*\right)^3$, $a^3 = b^3 \iff a = b$	☐	☐
11.	Pour $\theta \in]-\pi,\pi[$ et $x = \tan(\theta/2)$, $e^{i\theta} = \dfrac{1+ix}{1-ix}$.	☐	☐
12.	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{U}_{2n+1} \cap \mathbb{U}_{2n} = \{1\}$	☐	☐
13.	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{U}_{2n+2} \cap \mathbb{U}_{2n} = \{1\}$	☐	☐
14.	Pour tout $(u,v) \in \mathbb{C}^2$, $\lvert u-v\rvert \leqslant \lvert u\rvert - \lvert v\rvert$	☐	☐
15.	Pour tout $(u,v) \in \mathbb{C}^2$, $\lvert u-v\rvert \leqslant \lvert u\rvert + \lvert v\rvert$	☐	☐
16.	Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$, $\dfrac{\overline{z}-1}{i-iz} \in \mathbb{U}$	☐	☐

Questions à choix multiple

1. L'ensemble des points d'affixe z tels que $|z-1|\leqslant 1$ et $|z+1|\leqslant 1$ est :

a. $\{O\}$; **b.** un rectangle ; **c.** une droite.

2. Soient $a\in\mathbb{C}^*$ et O, A, B les points d'affixes respectives 0, a et $-ia$. Le triangle OAB est :

a. rectangle ; **b.** isocèle ; **c.** équilatéral.

3. Pour tous $(u,v)\in\mathbb{C}^2$ et U, V les points d'affixes u et v, le nombre $|u-v|^2$ est égal à :

a. UV ;

b. $\|\mathbf{UV}\|^2$;

c. $|u|^2-2\operatorname{Re}\left(u\overline{v}\right)+|v|^2$;

d. $|u|^2-2\operatorname{Im}\left(u\overline{v}\right)+|v|^2$;

e. $|u|^2-2\operatorname{Re}\left(\overline{u}v\right)+|v|^2$;

4. Soient $\Delta\in\mathbb{C}$ et δ une racine carrée de Δ. On a :

a. $\Delta\in\mathbb{R}_-\iff\delta\in i\mathbb{R}$; **b.** $\Delta\in\mathbb{R}_+\iff\delta\in\mathbb{R}$; **c.** $\Delta\in\mathbb{U}\iff\delta\in\mathbb{U}$.

5. Pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, les racines du polynôme $P=X^2-2\cos(\theta)X+1$ sont :

a. $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$; **b.** $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$; **c.** $e^{i\theta}$ et $\dfrac{1}{e^{i\theta}}$.

6. Pour tous d et n entiers naturels, une condition suffisante de la relation $\mathbb{U}_d\subset\mathbb{U}_n$ est :

a. $d\,|\,n$; **b.** $n\,|\,d$; **c.** $d=n$; **d.** $d\leqslant n$; **e.** $n\leqslant d$.

7. Si $\omega\in\mathbb{U}_n$, alors :

a. $\omega^3\in\mathbb{U}_n$; **b.** $\omega^3\in\mathbb{U}_{3n}$; **c.** $n=0\,[3]\implies\omega^3\in\mathbb{U}_{n/3}$.

8. Pour tout $(u,v)\in\mathbb{U}^2$ tel que $u\neq v$, le nombre complexe $\dfrac{u+v}{u-v}$ est :

a. réel ; **b.** imaginaire pur ; **c.** de partie imaginaire positive.

9. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. L'ensemble des solutions de l'équation $z^n=\overline{z}$ d'inconnue $z\in\mathbb{C}$ est :

a. $\mathbb{R}$ si $n=1$; **b.** $\mathbb{U}_{n+1}$ si $n\geqslant 2$; **c.** $\mathbb{U}_{n+1}\cup\{0\}$ dans tous les cas.

Exercices élémentaires

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer le module et un argument de $e^{e^{i\theta}}$.

2. Soit $(n, \theta) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$. Déterminer le module de $\left(e^{i\theta} - 1\right)^n$.

3. Soit $\omega \in \mathbb{C}$. Quelles sont les racines carrées de $-\omega^2$? Même question avec $i\omega^2$.

4. Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que $|z-1| = \left|\overline{z} - 1 + i\right|$.

5. Dessiner sur le cercle unité les racines quatrièmes de 1 puis celles de -1.

6. Déterminer *sous forme algébrique* les solutions complexes de $z^2 - 2z + i = 0$.

7. Montrer que la fonction $f : z \mapsto |1 + iz|^2 + |z + i|^2$ est constante sur $\mathbb{U}$.

8. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ad - bc > 0$ et $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $cz + d \neq 0$.

Démontrer que $\operatorname{Im} z > 0 \implies \operatorname{Im}\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) > 0$.

9. Soit $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Démontrer que $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{2}\cdot$

Exercices classiques plus techniques

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer les solutions complexes de $z^4 - 2\cos(\theta)z^2 + 1 = 0$.

2. Soit n un entier naturel impair. Montrer que $\left\{\omega^2\,;\,\omega \in \mathbb{U}_n\right\} = \mathbb{U}_n$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $(z+1)^n - z^n = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Déterminer les racines n-èmes de $1+i$ et $-i$.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$.

5. Soit a, b et c des nombres complexes deux à deux distincts tels que

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$$

On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c dans un repère orthonormé direct.

a. Démontrer que $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{AC} \times \mathrm{BC}$ et $\mathrm{BC}^2 = \mathrm{BA} \times \mathrm{CA}$. Indication : $\mathrm{AB} = |a-b|$.

b. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

6. Soit a, b et c trois nombres complexes distincts deux à deux et d'affixes respectives A, B et C dans un repère orthonormé direct. On suppose que ABC est équilatéral. Démontrer que

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$$

7. Comment faut-il choisir $m \in \mathbb{C}$ pour que l'équation $z^2 - (2+im)z - (1+im) = 0$ admette deux racines imaginaires pures et conjuguées ?

8. Démontrer que

$$\forall (x,y,z,w) \in \mathbb{C}^4,\ |x-y| \cdot |z-w| \leqslant |x-z| \cdot |y-w| + |x-w| \cdot |y-z|$$

Indication : on pourra développer les produits $(x-z)(y-w)$ et $(x-w)(y-z)$.

9. Déterminer l'ensemble des points $\mathrm{M}(z)$ tels que $\dfrac{z}{1-z}$ soit réel.

10. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) := z(1-z)$. Démontrer que

$$\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2} \implies \left|f(z) - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}$$

Indication : Écrire $z(1-z)$ sous forme canonique .

11. Résoudre l'équation $z^5\overline{z} = 1$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

12. Soit $\alpha \in]-\pi, \pi[$, on considère l'équation $z^2 - 2^{\alpha+1}\cos(\alpha)z + 2^{2\alpha} = 0$.

a. Résoudre cette équation, on notera z_1 et z_2 les solutions.

b. Soit A et B les points d'affixe z_1 et z_2 et O le point d'affixe 0, déterminer α pour que le triangle OAB soit équilatéral.

Corrigé du Vrai ou Faux ?

1. Faux car par exemple $\mathrm{Im}\left(i^2\right) \neq \mathrm{Im}(i)^2$.

2. Vrai par définition de l'exponentielle.

3. Faux : $\theta = \pi/2$ est un contre-exemple. Plus généralement :

$$\forall \theta \neq 0\,[\pi],\ \cos^2(\theta) \neq \cos(2\theta)$$

4. Vrai car pour tout $z \in \mathbb{U}$, $\dfrac{1}{z} = \overline{z}$.

5. Vrai : $1 + j = -j^2 = (ij)^2$.

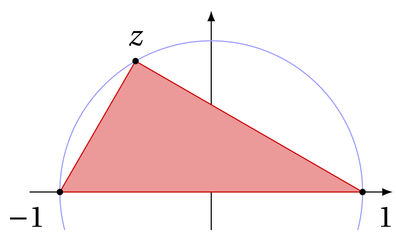
6. Faux car pour $n = 4$ et $\omega = -1$, on a

$$\left\{\omega^k\,;\ k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{U}_2 \neq \mathbb{U}_4$$

7. Vrai :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^n = 1 \iff \overline{z}^n = 1$$

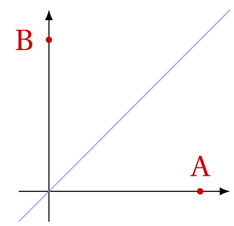
8. Vrai car par le théorème de Pythagore :



On peut aussi utiliser :

$$|z+1|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}(z) + 1$$

9. Vrai car l'ensemble des points équidistants de A(1) et de B(i) est la médiatrice de [AB], d'équation $y = x$:



10. Faux car pour a et b non nuls :

$$a^3 = b^3 \iff \frac{a}{b} \in \mathbb{U}_3 = \left\{1, j, j^2\right\}$$

En revanche, le résultat est vrai si a et b sont réels.

11. Vrai car $1 + ix = e^{i\theta/2}/\cos(\theta/2)$.

12. Vrai car :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^{2n} = z^{2n+1} = 1 \iff z = 1$$

13. Faux car :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^{2n} = z^{2n+2} = 1 \iff z^2 = 1$$

14. Faux car $(u, v) = (1, 2)$ est clairement un contre-exemple.

15. Vrai car par l'inégalité triangulaire :

$$|u - v| \leqslant |u| + |-v| = |u| + |v|$$

16. Vrai :

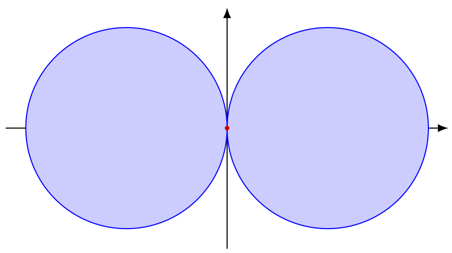
$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{1\},\ \left|\frac{\overline{z} - 1}{i - iz}\right| = \frac{|z-1|}{|i| \times |1 - z|} = 1$$

Enseignements à tirer de cet exercice

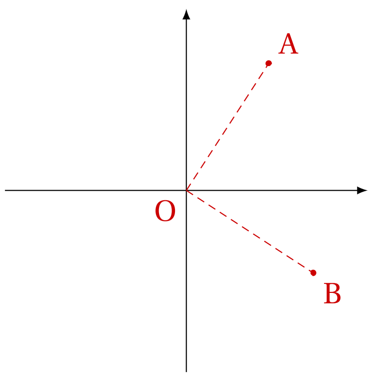
- ▷ *Le 6. tourne autour de la question des générateurs de $\mathbb{U}_n$: le cours nous apprend que si $\omega := e^{2i\pi/n}$, alors $\mathbb{U}_n = \{\omega^k\,;\ k \in \mathbb{Z}\}$ mais cet exercice nous dit que l'on ne peut pas remplacer ω par n'importe quelle autre racine n-ème différente de 1.*
- ▷ *Dans certains cas (cf. 8. et 9.), une interprétation géométrique est éclairante.*
- ▷ *À propos des racines n-èmes de l'unité : il faut parfois revenir à la définition (ce sont les solutions de $z^n = 1$) car la forme exponentielle n'est pas toujours une bonne piste (cf. 12. et 13.).*
- ▷ *Au 14., il ne faut confondre l'inégalité proposée avec $\big||u| - |v|\big| \leqslant |u - v|$ qui est vraie.*

Corrigé des questions à choix multiple

1. Seul a. est correct car l'ensemble recherché est l'intersection des disques de centre 1 et -1 et de rayon 1 :



2. Seuls a. et b. sont corrects car **OB** est l'image par la rotation d'angle $-\pi/2$ de **OA** :



3. Les seules propositions correctes sont b., c. et e. Il suffit de développer

$$|u-v|^2 = (u-v)(\overline{u}-\overline{v})$$

et remarquer que $\overline{u}v = \overline{u\overline{v}}$ puis :

$$u\overline{v}+\overline{u}v = 2\,\mathrm{Re}\left(u\overline{v}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{u}v\right)$$

4. Les trois propositions sont correctes. Cf. le cours pour a. et b. et $|\Delta| = |\delta|^2$ pour c.

5. Seuls a. et c. sont corrects : le discriminant de l'équation vaut $(2i\sin(\theta))^2$.

6. Seuls a. et c. sont corrects car

$$\mathbb{U}_4 \not\subset \mathbb{U}_2,\ \mathbb{U}_2 \not\subset \mathbb{U}_3,\ \mathbb{U}_3 \not\subset \mathbb{U}_2$$

et si $n = kd$ avec $k \in \mathbb{N}$, alors

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^d = 1 \implies z^n = 1$$

7. Les trois propositions sont correctes :

$$\left(\omega^3\right)^n = \left(\omega^3\right)^{3n} = 1$$

car $\omega^n = 1$. De plus, si $3 \mid n$, alors $\left(\omega^3\right)^{n/3} = 1$.

8. Seul b. est correct car notant Z le quotient,

$$\overline{\mathrm{Z}} = \frac{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}{\frac{1}{u}-\frac{1}{v}} = -\mathrm{Z}$$

Cf. $(u,v) = (1,-i)$ pour les a. et c.

9. Seul a. est vrai. Supposons $n \geqslant 2$. On remarque que 0 est solution. De plus, si $z \neq 0$ est une solution, alors $|z|^n = |z|$ donc $|z| = 1$. Réciproquement, si $z \in \mathbb{U}$, alors z est solution *si et seulement si* $z^n = 1/z$, ie $z \in \mathbb{U}_{n+1}$. On en déduit que l'ensemble des solutions est $\mathbb{U}_{n+1} \cup \{0\}$.

Enseignements à tirer de cet exercice

- ▷ *Commentaire sur le 1. : il est essentiel de savoir interpréter $|a-b|$ comme la distance entre* A *et* B*, les points d'affixes respectives a et b. On a aussi $|z| = \|\mathbf{w}\|$ si $\mathbf{w}$ est un vecteur d'affixe z.*
- ▷ *Commentaire sur le 2. : il faut « voir » la multiplication par $e^{i\theta}$ (pour θ réel) comme une rotation d'angle θ. En particulier, multiplier par $i = e^{i\pi/2}$ représente une rotation d'un quart de tour dans le sens direct.*
- ▷ *Il serait bon d'obtenir le développement du 2. de tête. Au déduit de ce résultat que l'équation $z\overline{z} - 2\,\mathrm{Re}(\overline{\omega}z) + \overline{\omega}\omega = \rho^2$ (où $\rho \in \mathbb{R}_+^*$) est celle du cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon ρ.*
- ▷ *Au 7., on utilise que $\mathbb{U}_n$ est stable par le produit : si ω et ω' sont dans $\mathbb{U}_n$, alors leur produit aussi. En particulier, toute puissance d'un élément de $\mathbb{U}_n$ est dans $\mathbb{U}_n$.*
- ▷ *Au 8., on peut aussi utiliser des formes polaires et des factorisations par l'angle moitié.*

Corrigé des exercices élémentaires

1. On a $Z = e^{e^{i\theta}} = e^{\cos(\theta)}e^{i\sin(\theta)}$, donc

$$|Z| = e^{\cos(\theta)} \text{ et } \arg Z = \sin(\theta)\ [2\pi]$$

2. On a $Z = \left(e^{i\theta}-1\right)^n = (2i)^n \sin^n(\theta/2)e^{in\theta/2}$ donc

$$|Z| = 2^n|\sin(\theta/2)|^n$$

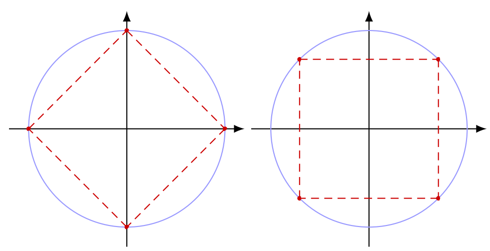
3. On a $-\omega^2 = (i\omega)^2$ et $i\omega^2 = \left(e^{i\pi/4}\omega\right)^2$.

4. L'équation s'écrit

$$|z-1| = |z-1-i|$$

On reconnaît la médiatrice de [AB] où A(1) et B$(1+i)$, ie la droite d'équation $y = 1/2$.

5. Les racines quatrièmes de -1 sont de la forme $e^{i\pi/4}\omega$ où $\omega \in \mathbb{U}_4$, on les obtient à partir de $\mathbb{U}_4$ par la rotation de centre O et d'angle $+\pi/4$:



6. Le discriminant de l'équation vaut $\Delta = 4(1-i)$. Soit $\delta = x+iy$ avec $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(\delta^2) &= 4 \\ \mathrm{Im}(\delta^2) &= -4 \\ |\delta|^2 &= |\Delta| \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2 &= 4 \\ 2xy &= -4 \\ x^2+y^2 &= 4\sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} (x,y) &= \left(\sqrt{2\sqrt{2}+2}, -\sqrt{2\sqrt{2}-2}\right) \\ & \text{ou} \\ (x,y) &= \left(-\sqrt{2\sqrt{2}+2}, \sqrt{2\sqrt{2}-2}\right) \end{cases}$$

Les racines de l'équation sont donc $1+\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$ et $1-\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$.

7. Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $f(z) = (1+iz)(1-i\overline{z}) + (z+i)(\overline{z}-i) = 2z\overline{z}+2 = 4$.

8. On a $\frac{az+b}{cz+d} = \frac{(az+b)(c\overline{z}+d)}{|cz+d|^2} = \frac{ac|z|^2+bd+adz+bc\overline{z}}{|cz+d|^2}$ d'où

$$\mathrm{Im}\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \frac{(ad-bc)\,\mathrm{Im}\, z}{|cz+d|^2}$$

Le résultat en découle.

9. Soit $u \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Il existe $\theta \in]0,2\pi[$ tel que $z = e^{i\theta}$ d'où

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{1-e^{i\theta}}=\frac{1}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}}=\frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

d'où $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)=\frac{-\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{1}{2}$.

ENSEIGNEMENTS À TIRER DE CES EXERCICES

▷ *Aux 4. et 5., l'interprétation géométrique remplace avantageusement le calcul : nul besoin d'expliciter les racines quatrièmes de -1 pour les dessiner sur le cercle.*

▷ *Au 6., on peut aussi remarquer que $\Delta=\left(2\sqrt{\sqrt{2}}e^{-i\pi/8}\right)^2$ mais il faut alors calculer le cosinus et le sinus de $\pi/8$ au moyen des formules de duplication.*

▷ *Au 7., on peut aussi remarquer que, pour $z\in\mathbb{C}$, $f(z)=|z-i|^2+|z+i|=2^2=4$ par le théorème de Pythagore (le point $\mathrm{M}(z)$ appartenant au cercle de diamètre $[\mathrm{AB}]$, où $\mathrm{A}(-i)$ et $\mathrm{B}(i)$).*

CORRIGÉ DES EXERCICES CLASSIQUES PLUS TECHNIQUES

1. Les solutions de $Z^2-2\cos(\theta)Z+1=0$ sont $e^{\pm i\theta}$, on résout ensuite $z^2=e^{\pm i\theta}$. On trouve

$$e^{i\theta/2},\ e^{-i\theta/2},\ -e^{i\theta/2},\ -e^{-i\theta/2}$$

2. On pose $\mathrm{E}:=\left\{\omega^2\,;\,\omega\in\mathbb{U}_n\right\}$ et $n=2m+1$ avec $m\in\mathbb{N}$. On a clairement $\mathrm{E}\subset\mathbb{U}_n$. Soit $\omega\in\mathbb{U}_n$. Comme on a $\omega^{2m+1}=1$, $\omega=(\omega^{-m})^2$ d'où $\mathbb{U}_n\subset\mathrm{E}$.

3. On remarque que 0 n'est pas solution. Soit $z\in\mathbb{C}^*$. On a

$$\begin{aligned}(z+1)^n-z^n=0 &\iff \left(\frac{z+1}{z}\right)^n=1\\ &\iff \exists k\in[\![0,n-1]\!],\ \frac{z+1}{z}=e^{2ik\pi/n}\end{aligned}$$

Fixons $k\in[\![0,n-1]\!]$. On a $\dfrac{z+1}{z}=e^{2ik\pi/n}\iff(e^{2ik\pi/n}-1)z=1\iff 2i\sin(k\pi/n)e^{ik\pi/n}z=1$.

▷ Si $k=0$, alors cette équation n'a pas de solution.

▷ Sinon, $\sin(k\pi/n)\neq0$ et l'équation admet une unique solution.

On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation initiale :

$$\mathscr{S}=\left\{-\frac{1}{2}-\frac{i}{2}\operatorname{cotan}\left(\frac{k\pi}{n}\right);\ k\in[\![1,n-1]\!]\right\}$$

4. a. ▷ Comme $1+i=\sqrt{2}e^{i\pi/4}$, l'équation $\mathrm{E}_1\,:\,z^n=1+i$ équivaut à $\left(\dfrac{z}{\sqrt[2n]{2}e^{i\pi/(4n)}}\right)^n=1$, l'ensemble des solutions de E_1 est donc :

$$\mathscr{S}_1=\left\{\sqrt[2n]{2}\exp\left(\frac{i\pi}{4n}+\frac{2ik\pi}{n}\right);\ k\in[\![0,n-1]\!]\right\}$$

- ▷ Comme $-i = e^{-i\pi/2}$, l'équation E_2 : $z^n = -i$ équivaut à $\left(\dfrac{z}{e^{-i\pi/(2n)}}\right)^n = 1$, l'ensemble des solutions de E_2 est donc :

$$\mathscr{S}_2 = \left\{ \exp\left(-\frac{i\pi}{2n} + \frac{2ik\pi}{n}\right) ; k \in [\![0, n-1]\!] \right\}$$

b. L'équation F : $z^{2n} - z^n + 1 - i = 0$ est équivalente à F′ : $Z^2 - Z + 1 - i$ où $Z = z^n$. Le discriminant de F′ vaut $\Delta = 1 - 4(1-i) = -3+4i = (1+2i)^2$, les racines de F sont donc $-i$ et $1+i$. On déduit de la question précédente que l'ensemble des solutions de F est $\mathscr{S}_1 \cup \mathscr{S}_2$.

5. a. En mettant au même dénominateur, on obtient $\frac{1}{a-b} + \frac{c-a+b-c}{(b-c)(c-a)} = 0$, d'où $(b-a)^2 = (b-c)(c-a)$ et en particulier $|b-a|^2 = |b-c| \times |c-a|$, ie $AB^2 = BC \times AC$. Comme la relation vérifiée par a, b et c est invariante par permutation circulaire de a, b et c, on en déduit que $BC^2 = CA \times BA$.

b. Notons $\alpha := BC$, $\beta = AC$ et $\gamma := AB$. On a $\gamma^2 = \alpha\beta$ et $\alpha^2 = \beta\gamma$. En particulier $\gamma^3\beta = \alpha^3\beta$. Comme $\beta \neq 0$ (on a $A \neq C$ par hypothèse), on a $\gamma = \alpha$, ie $AB = BC$. On a donc aussi $BC = CA$ (par permutation circulaire de A, B et C, cf. la question précédente pour la justification), ie ABC est équilatéral.

6. Supposons ABC équilatéral direct. On a $\frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$ et $\frac{a-b}{c-b} = e^{i\frac{\pi}{3}} = -j^2$, d'où $c-a = -j^2(b-a)$ et $a-b = -j^2(c-b)$. Ainsi

$$\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = \frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{j}{a-b} = \frac{-j^2}{a-b} + \frac{1}{b-c} = 0$$

car $1 + j = -j^2$ et $\frac{1}{j^2} = j$. Si ABC est équilatéral indirect, alors ACB est équilatéral direct donc

$$\frac{1}{a-c} + \frac{1}{c-b} + \frac{1}{b-a} = 0$$

donc $\frac{1}{a-b} + \frac{1}{b-c} + \frac{1}{c-a} = 0$.

7. Notons E l'équation $z^2 - (2+im)z - (1+im) = 0$.

- ▷ Analyse. Supposons que E admette deux solutions imaginaires pures et conjuguées. Comme $2 + im$ est la somme de ces deux racines, on a $im = -2$, d'où $m = 2i$.
- ▷ Synthèse. Supposons que $m = 2i$. L'équation E s'écrit alors $z^2 = -1$ donc admet bien deux racines imaginaires pures et conjuguées, $-i$ et i.

8. Soit $(x, y, z, w) \in \mathbb{C}^4$. Comme $(x-z)(y-w) - (x-w)(y-z) = -xw - zy + xz + wy = (x-y)(z-w)$, on déduit de l'inégalité triangulaire et de la multiplicativité du module que

$$|x-y| \cdot |z-w| \leqslant |x-z| \cdot |y-w| + |x-w| \cdot |y-z|$$

9. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. On a $z/(1-z) \in \mathbb{R}$ *si et seulement si* $z/(1-z) = \overline{z/(1-z)}$, ie $z/(1-z) = \overline{z}/(1-\overline{z})$, soit encore $z - z\overline{z} = \overline{z} - z\overline{z}$, et finalement $z = \overline{z}$, c'est-à-dire $z \in \mathbb{R}$. L'ensemble recherché est donc $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

10. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $\left|z - \frac{1}{2}\right| < \frac{1}{2}\cdot$ On a $z(1-z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2} - z\right) + \frac{1}{4}$ d'où $f(z) - \frac{1}{2} = -\left(z - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$ puis

$$\left|f(z) - \frac{1}{2}\right| \leqslant \left|\left(z - \frac{1}{2}\right)^2\right| + \frac{1}{4} = \left|z - \frac{1}{2}\right|^2 + \frac{1}{4} < 2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

par l'inégalité triangulaire.

11. On remarque que 0 n'est pas solution. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $z := re^{i\theta}$. On a

$$\begin{aligned} z^5\overline{z} = 1 &\iff r^5 e^{5i\theta} r e^{-i\theta} = 1 \\ &\iff r^6 e^{4i\theta} = 1 \\ &\iff r^6 = 1 \text{ et } 4\theta = 0\,[2\pi] \\ &\iff r = 1 \text{ et } \theta = 0\left[\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

On en déduit l'ensemble des solutions : $\{1, i, -1, -i\}$.

12. a. Le discriminant de cette équation vaut $\Delta := 2^{2\alpha+2}\cos(\alpha)^2 - 2^{2\alpha+2} = -2^{2\alpha+2}\sin(\alpha)^2 = \left(i2^{\alpha+1}\sin\alpha\right)^2$. On en déduit les racines de l'équation : $z_1 = 2^\alpha e^{i\alpha}$ et $z_2 = 2^\alpha e^{-i\alpha}$.

b. Le triangle OAB est équilatéral *si et seulement si* OA = OB = AB, ce qui équivaut à $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|$, ie $2^\alpha = 2^\alpha\left|e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right|$. Comme

$$\begin{aligned} \left|e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right|^2 = 1 &\iff \left(e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}\right)\left(e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}\right) = 1 \\ &\iff 1 + 1 - e^{2i\alpha} - e^{-2i\alpha} = 1 \\ &\iff \cos 2\alpha = \frac{1}{2} \\ &\iff \alpha \in \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\} \end{aligned}$$

l'ensemble des solutions est $\left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

ENSEIGNEMENTS À TIRER DE CES EXERCICES

- *Le 1. fait référence au 5. du QCM.*
- *Au 2.,* $\mathrm{E} \subset \mathbb{U}_n$ *est une inclusion évidente si on sait* $\mathbb{U}_n$ *est stable par le produit (voir une remarque précédente du QCM). On utilise aussi cette propriété de stabilité pour l'inclusion réciproque : la démonstration ci-dessus per met de conclure car* $\omega^{-m} \in \mathbb{U}_n$ *(toute puissance d'un élément de* $\mathbb{U}_n$ *est dans* $\mathbb{U}_n$*).*
- *Au 12., on peut aussi résoudre la question ainsi :* OAB *est équilatéral* si et seulement si $\frac{z_A - 0}{z_B - 0} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$*, ce qui équivaut à* $e^{2i\alpha} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$*, ie* $2\alpha = \pm\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$*, ie* $\alpha = \pm\frac{\pi}{6}\,[\pi]$.