Quizz d'analyse 1 | Nombres réels

Les inégalités sont au fondement de l'analyse. Il est essentiel de savoir les manipuler avec dextérité.

Vrai ou Faux ?

	V	F
1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2,\ x \leqslant y \implies x \leqslant \sqrt{xy} \leqslant y$	☐	☐
2. $\forall (x,y) \in [1,+\infty[,\ e^x + e^y \leqslant e^{x+y}$	☐	☐
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}$	☐	☐
4. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ x + \frac{1}{x} \geqslant 2$	☐	☐
5. $\forall (a,b,u,v) \in \mathbb{R}^4,\ \lvert u\rvert \leqslant 1 \wedge \lvert v\rvert \leqslant 1 \implies \lvert ua+vb\rvert \leqslant \lvert a+b\rvert$	☐	☐
6. $\forall (a,b,u,v) \in \mathbb{R}^4,\ \lvert u\rvert \leqslant 1 \wedge \lvert v\rvert \leqslant 1 \implies \lvert ua+vb\rvert \leqslant \lvert a\rvert + \lvert b\rvert$	☐	☐
7. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{2n} x^i > 0$	☐	☐
8. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{i=0}^{n} x^i > 0$	☐	☐
9. $\forall (a,b,c,) \in \mathbb{R}^3,\ a^2+b^2+c^2 = 1 \implies \lvert ab+bc+ca\rvert \leqslant 1$	☐	☐
10. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2,\ \sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$	☐	☐
11. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ x^n \leqslant x^{n+m} + 1$	☐	☐
12. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \lvert \sin x\rvert \leqslant \sqrt{x}$ (on admettra que $\forall x \in \mathbb{R},\ \lvert \sin x\rvert \leqslant \lvert x\rvert$)	☐	☐
13. Pour tout x réel, $\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}$	☐	☐
14. Pour tous $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$, $a^{2n} \leqslant b^{2n} \iff \lvert a\rvert \leqslant \lvert b\rvert$	☐	☐
15. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$, $e^{-1/x} < e^{-a} \iff x < \frac{1}{a}$	☐	☐

Questions à choix multiple

1. On pose $A = \left\{ \dfrac{n+2m}{n+m} \,;\, (n,m) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\} \right\}$. Vrai ou faux ?

a. A est borné ; **b.** $\max A = 2$; **c.** $\min A = 0$.

2. Pour a et b strictement positifs, on pose $A = \left\{ a + (-1)^n \dfrac{b}{n} \,;\, n \in \mathbb{N}^* \right\}$. Vrai ou faux ?

a. A est borné ; **b.** $\sup A = a+b$; **c.** $\min A = a-b$.

3. Soit a et b des réels tels que $-1 < a < 2$ et $2 \leqslant b < 4$. On a :

a. $-5 < a-b < 0$; **c.** $-2 < ab < 8$; **e.** $0 \leqslant \left|\frac{a}{b}\right| < 1$; **g.** $1 < a^2 < 4$;
b. $-3 < a-b < -2$; **d.** $-4 < ab < 8$; **f.** $\frac{1}{2} < \left|\frac{a}{b}\right| < 1$; **h.** $-1 < a^3 < 8$.

4. L'ensemble des solutions de $x^4 - x > 0$ est : **a.** $]0,1[$; **b.** $]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$; **c.** $]1,+\infty[$.

5. L'ensemble des solutions de $\sqrt{x^2+2x} < x+1$ est :

a. $[0,+\infty[$ **b.** $]-\infty,-2]\cup[0,+\infty[$ **c.** $[-2,0]$

6. L'ensemble des solutions de $\left|x^2-3\right| < 2$ est : **a.** $\left]1,\sqrt{5}\right[$; **b.** $\left]-\sqrt{5},-1\right[\cup \left]1,\sqrt{5}\right[$.

7. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x-2| \leqslant \dfrac{1}{4}\cdot$

a. $\left|1-\dfrac{x}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{8}$ **b.** $\left|1-\dfrac{2}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{7}$ **c.** $\dfrac{1}{x^2} \geqslant \dfrac{1}{2}$ **d.** $\left|x^2-4\right| \leqslant \dfrac{17}{16}$

8. L'ensemble des solutions de $x + \dfrac{1}{x} > -1$ est : **a.** $\mathbb{R}_+^*$; **b.** $]-1,+\infty[$; **c.** $]-1,0[\cup]0,1[$.

9. L'ensemble des solutions de $x + \dfrac{1}{x} > -3$ est :

a. $\left]-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, 0\right[$ **b.** $\left]-\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-3+\sqrt{5}}{2}\right[\cup]0,+\infty[$

10. L'ensemble des solutions de $|x-1| + |x-2| \geqslant 5$ est :

a. $]-\infty,-1]$ **b.** $[4,+\infty[$ **c.** $]-\infty,-1]\cup[4,+\infty[$

11. L'ensemble des solutions de $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x-1} \geqslant 5$ est : **a.** $[4,+\infty[$; **b.** $[2,+\infty[$; **c.** $[5,+\infty[$.

12. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$. Vrai ou faux?

a. $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \leqslant \sqrt{n \sum_{i=1}^n a_i^2}$ **b.** $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^{2/3} \sum_{i=1}^n a_i^{4/3}}$ **c.** $\displaystyle\sum_{i=1}^n a_i \leqslant n\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{a_i^2}{i}}$

13. L'ensemble des solutions de $\lfloor 3x-1 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor$ est :

a. $\left[\frac{2}{3},1\right[$ **b.** $\left[\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right[$ **c.** $[0,1[$ **d.** $\left]1,\frac{4}{3}\right]$

14. L'ensemble des solutions de $\left\lfloor\sqrt{x^2+1}\right\rfloor=2$ est :

a. $\left]-2\sqrt{2},-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3},2\sqrt{2}\right[$ **b.** $\left[-2\sqrt{2},-\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3},2\sqrt{2}\right]$ **c.** $\left[\sqrt{3},2\sqrt{2}\right[$

Exercices élémentaires

1. Soit $a\in\mathbb{R}$. Résoudre l'inéquation $\sqrt{x^2+1}\leqslant x-a$ d'inconnue x réelle.

2. Pour tous $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, démontrer que $|\sin(nx)|\leqslant n|\sin x|$.

3. Démontrer par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que $\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $(a+b)^4\leqslant 8\left(a^4+b^4\right)$.

4. En utilisant l'inégalité AG, établir les inégalités suivantes :

a. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ x^3+\frac{1}{x}\geqslant 2x$

b. $\forall(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$

c. $\forall(a,b)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \frac{a}{b^2+a^4}+\frac{b}{a^2+b^4}\leqslant\frac{1}{ab}$

d. $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}_+^3,\ (a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 8abc$

e. $\forall(a,b,c)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^3,\ \frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\geqslant\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b}$

5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels bornées.

a. On suppose dans cette question que $\forall(k,\ell)\in\mathbb{N}^2,\ u_k\leqslant v_\ell$. Comparer $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}u_k$ et $\inf\limits_{\ell\in\mathbb{N}}v_\ell$.

b. On suppose dans cette question que $\forall k\in\mathbb{N},\ u_k\leqslant v_k$.

i. Démontrer que $\inf\limits_{\ell\in\mathbb{N}}u_\ell\leqslant\inf\limits_{\ell\in\mathbb{N}}v_\ell$ et $\sup\limits_{\ell\in\mathbb{N}}u_\ell\leqslant\sup\limits_{\ell\in\mathbb{N}}v_\ell$.

ii. Donner un exemple de suites pour lesquelles $\sup\limits_{\ell\in\mathbb{N}}u_\ell<\inf\limits_{\ell\in\mathbb{N}}v_\ell$.

iii. Même question avec $\sup\limits_{\ell\in\mathbb{N}}u_\ell>\inf\limits_{\ell\in\mathbb{N}}v_\ell$.

Exercices classiques plus techniques

1. Soit x et y dans $]-1,1[$. Démontrer que $\frac{|x+y|}{|1+xy|}\leqslant 1$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$ et $(a_0,\dots,a_n)\in\mathbb{R}_+^{n+1}$. Justifier que $\forall t\in[0,1[$, $\sum\limits_{k=0}^{n}a_kt^k\leqslant\frac{\sqrt{a_0^2+\cdots+a_n^2}}{\sqrt{1-t^2}}$.

3. Soit a et b deux nombres réels. Établir l'inégalité $a+b<\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)$.

4. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(1+\dfrac{1}{1^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{2^3}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right) < 3-\dfrac{1}{n}\cdot$

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\phi_n(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |x-k|$.

a. Simplifier $\phi_n(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_-$ puis pour $x \geqslant n$.

b. Soit $\ell \in [\![0, n-1]\!]$. Simplifier $\phi_n(x)$ pour $x \in [\![\ell, \ell+1]\!]$.

c. En déduire l'existence et la valeur de $\mu := \displaystyle\min_{x\in\mathbb{R}} \phi_n(x)$. INDICATION : Discuter selon la parité de n.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$. L'objectif est d'établir que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1+\cdots+a_k} \leqslant 2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\cdot$

a. *Re-démontrer* que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

b. Justifier que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}\right) \geqslant \frac{k^2(k+1)^2}{4}\cdot$

c. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1+\cdots+a_k} \leqslant 4\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i^2}{a_i}\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k(k+1)^2}\right)\cdot$

INDICATION : On a $\displaystyle\frac{k}{a_1+\cdots+a_k} \leqslant \frac{4}{k(k+1)^2}\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}\right)$ par le 2.b.

d. Établir que $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{2}{k(k+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2}\cdot$

e. Conclure.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $\mathrm{S}_n := \displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\big(\cos(t_i+t_j)+\cos(t_i-t_j)\big)$.

a. Exprimer S_n en fonction de $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n}\cos t_i\right)^2$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\cos^2 t_i$.

b. En déduire que $\mathrm{S}_n \geqslant -n$.

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Démontrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos^2 k = \frac{n}{2} + \frac{(\sin n)\cos(n+1)}{2\sin 1}\cdot$ INDICATION : Linéariser $\cos^2$.

b. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\cos k| \geqslant \frac{n}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot$ INDICATION : Comparer x et x^2 pour $x \in [0,1]$.

9. Résoudre l'équation $\left\lfloor \dfrac{x}{1-3x} \right\rfloor = 2$.

Corrigé du Vrai ou Faux ?

1. Vrai, par croissance de la racine carrée (ou en élevant au carré).
2. Vrai car pour $x \geqslant 1$ et $y \geqslant 1$
$$e^{x+y} - e^y = e^y(e^x - 1) \geqslant e(e^x - 1)$$
et
$$e(e^x-1)e^{-x} = e(1-e^{-x}) \geqslant e(1-e^{-1}) = e-1 > 1$$
3. Vrai. Par exemple :
$$x(1-x) - \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2$$
4. Vrai car $\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \geqslant 0$.
5. Faux. Cex : $(a, b, u, v) = (2, -2, 1, -1)$.
6. Vrai par l'inégalité triangulaire.
7. Vrai. Pour $x \neq 1$:
$$\sum_{i=0}^{2n} x^i = \frac{x^{2n+1} - 1}{x - 1}$$
et $x^{2n+1} > 1 \iff x > 1$ (car $x \mapsto x^{2n+1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$).
8. Faux : cex $(n, x) = (1, -2)$.
9. Vrai par l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
10. Vrai : élever au carré.
11. Vrai. Si $x \geqslant 1$, alors $x^n \leqslant x^{n+m} \leqslant x^{n+m} + 1$. Sinon, on a $x^n \leqslant 1 \leqslant 1 + x^{n+m}$.
12. Vrai. On a $|\sin x| \leqslant 1 \leqslant \sqrt{x}$ si $x \geqslant 1$ et si $x \in]0, 1]$, on a $\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$, inégalité clairement vérifiée en 0.
13. Vrai : étudier les variations de $x \mapsto \cos(x) - 1 + x^2/2$ en dérivant deux fois.
14. Vrai car $x \mapsto x^{2n}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.
15. Faux : $a < 1/x$ n'est pas équivalent à $x < 1/a$ mais à $0 < x < 1/a$.

Enseignements à tirer de cet exercice

- ▷ *La somme à majorer et l'hypothèse sur $a^2 + b^2 + c^2$ doivent faire penser à Cauchy-Schwarz au 9.*
- ▷ *Le 4. est un cas particulier de l'inégalité AG (cf. la suite).*
- ▷ *Au 12., la disjonction est naturelle car le cas où $x \geqslant 1$ est direct. Pour l'autre inégalité, la relation $|\sin x| \leqslant x$ pour $x \geqslant 0$ permet de conclure sans calcul.*

Corrigé des questions à choix multiple

1. Seuls a. et b. sont vrais. On a en effet $A \subset]0, 2]$ et $2 = \dfrac{0+2}{0+1}$. En revanche, il est vrai que $\inf A = 0$.
2. Seuls a. et c. sont vrais. En effet, $a - b \leqslant a + (-1)^n \dfrac{b}{n} \leqslant a + \dfrac{b}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $a - b \in A$.
3. Seules a, d, e, et h sont vraies.
   - **a.** Comme $-1 < a < 2$ et $-4 < -b \leqslant -2$, on obtient $-5 < a - b < 0$ par superposition des inégalités.
   - **b.** Les réels $a = 0$ et $b = 3,9$ sont un cex.
   - **c.** Les réels $a = -0,9$ et $b = 3,9$ sont un cex.
   - **d.** Si $a \geqslant 0$, alors $0 \leqslant ab < 8$. Si $-1 < a < 0$, alors $ab < 0$ et $|ab| < 4$ d'où $-4 < ab < 0$.
   - **e.** On a $|a| < 2$ et $\left|\frac{1}{b}\right| < \frac{1}{2}$ d'où $0 \leqslant \left|\frac{a}{b}\right| < 1$.

f. L'inégalité est clairement fausse si par exemple $a = 0$.

g. L'inégalité est clairement fausse si par exemple $a = 0$.

h. L'inégalité est vraie par stricte croissance sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto x^3$.

4. La bonne réponse est b. car $x^4 - x = x(x^3 - 1)$ et $x^3 - 1$ est du signe de $x - 1$ car $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5. Seule a. est correcte. L'inéquation est définie sur $]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[$. On conclut en remarquant que l'inéquation est équivalente à $x + 1 \geqslant 0$ et $(x+1)^2 > x^2 + 2x$.

6. La bonne réponse est b. car l'inéquation équivaut à $1 < x^2 < 5$.

7. Tout est vrai sauf c. En effet, $\sqrt{2} < 9/4$ et on a $\dfrac{7}{4} \leqslant |x|$ et $|x+2| \leqslant |x-2| + 4$ (inég. triangulaire) d'où

$$\left|\frac{x}{2} - 1\right| = \frac{|x-2|}{2} \leqslant \frac{1}{4}, \qquad \left|1 - \frac{2}{x}\right| = \frac{|x-2|}{|x|} \leqslant \frac{1}{4} \times \frac{4}{7}, \qquad |(x-2)(x+2)| \leqslant \frac{1}{4} \times \left(4 + \frac{1}{4}\right) = \frac{17}{16}$$

8. La bonne réponse est a. car l'inéquation équivaut à $\dfrac{x^2 + x + 1}{x} > 0$, ie $x > 0$ car le trinôme au numérateur est toujours positif.

9. La bonne réponse est b. car l'inéquation est équivalente à $\dfrac{x^2 + 3x + 1}{x} > 0$.

10. On effectue un disjonction de cas selon les signes de $x - 1$ et $x - 2$: on trouve c.

11. Seul le c. est correct. On remarque que l'expression du premier membre est strictement croissante et vaut 1 en $x = 5$.

12. Les trois inégalités sont vraies et sont des applications de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Le a. utilise « *the 1-trick* » et le b. un « *ré-équilibrage* » :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \times 1 \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^{1/3} \times a_i^{2/3} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^{2/3}}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^{4/3}}$$

Le c. s'obtient par la décomposition $a_i = \sqrt{i} \times \frac{a_i}{\sqrt{i}}$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} i}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{i}} \leqslant n\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{i}}$$

car $\sum_{i=1}^{n} i \leqslant n^2$ et par croissance de la racine carrée.

13. On trouve b. L'équation équivaut à $\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + 2$. En écrivant $x = \lfloor x \rfloor + \theta$, ceci est aussi équivalent à $\lfloor x \rfloor = 1 - \dfrac{1}{2}\lfloor 3\theta \rfloor$. On en déduit que nécessairement $\lfloor x \rfloor = 0$ ou 1 et une synthèse permet de conclure.

14. On trouve a. car l'équation équivaut à $2 \leqslant \sqrt{x^2 + 1} < 3$.

ENSEIGNEMENTS À TIRER DE CET EXERCICE

▷

▷ *On rappelle que* max(A) *désigne le plus grand élément de* A *(il n'existe pas toujours, même si* A *est majorée).*

▷ *Le 3. illustre le fait qu'on ne peut pas retrancher membre à membre des inégalités : pou encadrer $a-b$, on en encadre a et $-b$ puis on superpose par addition ces deux inégalités. On ne peut faire le produit membre à membre de deux inégalités sauf si tous les nombres en jeu sont positifs. Pour encadrer ab, on commence par faire des disjonctions sur les signes de a et b. Dans le cas où $ab>0$, il suffit d'encadrer $|ab|$ pour conclure (on se ramène à des termes positifs afin de multiplier membre à membre).*

▷ *Il faut bien posséder les différentes méthodes : inégalités usuelles, étude de fonction, signe des trinômes du second degré, factorisation, encadrement pour la partie entière.*

▷ *Attention au passage au carré : $|f(x)|\leqslant g(x)$ équivaut à $g(x)^2\geqslant f(x)^2$ et $g(x)\geqslant 0$.*

▷ *Le 11. est intéressant car un argument de croissance y remplace des calculs (possibles mais fastidieux : élévation au carré, etc.)*

CORRIGÉ DES EXERCICES ÉLÉMENTAIRES

1. Soit $a\in\mathbb{R}$. Résoudre l'inéquation $\sqrt{x^2+1}\leqslant x-a$ d'inconnue x réelle. L'inéquation est équivalente à $x\geqslant a$ et $x^2+1\leqslant (x-a)^2$, ie $x\geqslant a$ et $2ax\leqslant a^2-1$. Pour continuer les calculs, il faut commencer une disjonction de cas sur le signe de a.

▷ Cas 1 : $a=0$. Il n'y a pas de solution.

▷ Cas 2 : $a>0$. On vérifie que $\dfrac{a^2-1}{2a}<a$ et il n'y a donc aucune solution.

▷ Cas 3 : $a<0$. On vérifie que $\dfrac{a^2-1}{2a}>a$ et l'ensemble des solutions est $\left[\dfrac{a^2-1}{2a},+\infty\right[$.

2. Par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ en utilisant les formules d'addition et l'inégalité triangulaire :

$$|\sin((n+1)x)|=|\sin(nx)\cos(x)+\cos(nx)\sin(x)|\leqslant\underbrace{|\sin(nx)||\cos(x)|+|\cos(nx)||\sin(x)|}_{\leqslant|\sin(nx)|+|\sin(x)|}$$

3. By two « 1-*tricks* », we get $(a+b)^2\leqslant 2(a^2+b^2)\leqslant 2\sqrt{2}\sqrt{a^4+b^4}$, as requested.

4. L'inégalité AG est équivalente à $(\sqrt{\mathrm{A}}-\sqrt{\mathrm{B}})^2\geqslant 0$.

a. Choisir $\mathrm{A}=x^3$ et $\mathrm{B}=1/x$.

b. Choisir $\mathrm{A}=a/b$ et $\mathrm{B}=b/a$.

c. Remarquer que $\dfrac{b^2+a^4}{a}\geqslant 2ab$ et $\dfrac{a^2+b^4}{b}\geqslant 2ab$ puis passer à l'inverse et additionner.

d. Multiplier membre à membre : $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$, $b+c\geqslant 2\sqrt{bc}$ et $c+a\geqslant 2\sqrt{ca}$.

e. Superposer $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}\geqslant 2\dfrac{a}{c}$, $\dfrac{c^2}{a^2}+\dfrac{a^2}{b^2}\geqslant 2\dfrac{c}{b}$ et $\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\geqslant 2\dfrac{b}{a}\cdot$

5. Notons $\mathrm{U} := \{u_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ et $\mathrm{V} := \{v_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Comme u_k est un minorant de V, on a $u_k \leqslant \inf \mathrm{V}$. Ainsi $\inf \mathrm{V}$ est un majorant de U d'où $\sup \mathrm{U} \leqslant \inf \mathrm{V}$.

b. i. On reprend les notations de la question précédente.

- ▷ Tout minorant de U est aussi un minorant de V. Le plus grand minorant de U est donc un minorant de V : ainsi $\inf \mathrm{U} \leqslant \inf \mathrm{V}$.
- ▷ Tout majorant de V est aussi un majorant de U. Le plus petit majorant de V est donc un majorant de U : ainsi $\sup \mathrm{U} \leqslant \sup \mathrm{V}$.

ii. Il suffit de choisir $u_n = 0$ et $v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

iii. Il suffit de choisir $u_0 = -2$ et $v_0 = -1$, puis $u_n = 0$ et $v_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Enseignements à tirer de ces exercices

Ces exercices présentent de nombreuses techniques intéressantes :

▷ *Les 2. illustre la preuve par récurrence.*

Corrigé des exercices plus techniques

1. L'inégalité est équivalente à $(x+y)^2 \leqslant (1+xy)^2$, ie $x^2y^2 - x^2 - x^2 + 1 \geqslant 0$. On conclut en remarquant que $x^2y^2 - x^2 - x^2 + 1 = (1-x^2)(1-y^2)$.

2. Soit t dans $[0,1[$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k t^k \leqslant \sqrt{\sum_{i=0}^{n} a_i^2}\sqrt{\sum_{i=0}^{n} t^{2i}} = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} a_i^2}\sqrt{\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}}$$

en appliquant la formule des sommes géométriques (la raison t^2 étant distincte de 1). On conclut en remarquant que, puisque t est entre 0 et 1, on a $\frac{1-t^{2n+1}}{1-t^2} \leqslant \frac{1}{1-t^2}$, et donc $\sqrt{\frac{1-t^{2n+2}}{1-t^2}} \leqslant \sqrt{\frac{1}{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ par croissance de la racine carrée.

3. On a $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right) - a - b = \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(b-\frac{1}{2}\right)^2 + a^2b^2 + \frac{1}{2} > 0$.

4. Raisonnons par récurrence. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{HR}(n)$ la proposition $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n}$.

- ▷ HR(1) est banale car les deux membres sont dans ce cas égaux à 2.
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vérifiée. En multipliant membre à membre par $1 + 1/(n+1)^3 > 0$, on obtient :

$$\prod_{k=1}^{n+1}\left(1+\frac{1}{k^3}\right) \leqslant \left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right)$$

L'inégalité $\left(3-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^3}\right) \leqslant 3 - \frac{1}{n+1}$ $(\star)$ est donc une *condition suffisante* de $\mathrm{HR}(n+1)$. Or,

$$\begin{aligned}
(\star) \quad &\iff \quad \frac{3n-1}{n} \times \frac{1+(n+1)^3}{(n+1)^3} \leqslant \frac{3n+2}{n+1} \\
&\iff \quad (3n-1) \times (n^3+3n^2+3n+2) \leqslant n(3n+2)(n+1)^2 \\
&\iff \quad 3n^4+8n^3+6n^2+3n-2 \leqslant 3n^4+8n^3+7n^2+2n \\
&\iff \quad 0 \leqslant n^2-n+2 \\
&\iff \quad 0 \leqslant n(n-1)+2
\end{aligned}$$

Puisque cette dernière inégalité est banale pour $n \geqslant 1$, $(\star)$ est vraie et donc $\mathrm{HR}(n+1)$ aussi.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $\phi_n(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |x-k|$.

a. ▷ Pour $x \in \mathbb{R}_-$, on a $\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(k-x) = (n+1)\left(\frac{n}{2}-x\right)$.

▷ Pour $x \geqslant n$, on a $\phi_n(x) = \sum_{k=0}^{n}(x-k) = (n+1)\left(x-\frac{n}{2}\right)$.

b. Soit $\ell \in [\![0, n-1]\!]$ et $x \in [\![\ell, \ell+1]\!]$. On a

$$\begin{aligned}
\phi_n(x) &= \sum_{k=0}^{\ell}(x-k) + \sum_{k=\ell+1}^{n}(k-x) = -\frac{\ell(\ell+1)}{2} + (\ell+1)x - (n-\ell)x + \frac{(n+\ell+1)(n-\ell)}{2} \\
&= (2\ell+1-n)x - \frac{\ell(\ell+1)-(n-\ell)(\ell+n+1)}{2}
\end{aligned}$$

c. On déduit des questions précédentes l'étude suivante :

▷ Cas 1 : $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. La fonction ϕ_n décroît sur $]-\infty, m]$ puis croît sur $[m, +\infty[$.

▷ Cas 2 : $n = 2m+1$ avec $m \in \mathbb{N}$. La fonction ϕ_n décroît sur $]-\infty, m]$, est constante sur $[m, m+1]$ puis croît sur $[m+1, +\infty[$.

Dans tous les cas, ϕ_n admet un minimum sur $\mathbb{R}$ atteint en m et valant respectivement m^2+m et m^2+m+1 dans les cas 1 et 2.

6. a. Cf. le cours.

b. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{k} \sqrt{a_i}\,\frac{i}{\sqrt{a_i}}\right)^2}_{=\frac{k^2(k+1)^2}{4}} \leqslant \sum_{i=1}^{k} a_i \sum_{i=1}^{k} \frac{i^2}{a_i}$$

d'où l'inégalité demandée.

c. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On a, par le a. $\dfrac{k}{a_1+\cdots+a_k} \leqslant \dfrac{4}{k(k+1)^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}$. Puis, par superposition :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1+\cdots+a_k} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{i=1}^{k}\frac{i^2}{a_i}\right) = 4\sum_{1\leqslant i\leqslant k\leqslant n}\frac{i^2}{a_i k(k+1)^2} = 4\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\sum_{k=i}^{n}\frac{1}{k(k+1)^2}$$

d. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On a $\dfrac{1}{k^2} - \dfrac{1}{(k+1)^2} = \dfrac{2k+1}{k^2(k+1)^2} \geqslant \dfrac{2k}{k^2(k+1)^2} = \dfrac{2}{k(k+1)^2}$.

e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après les deux questions précédentes, on a par télescopage :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1+\cdots+a_k} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\sum_{k=i}^{n}\frac{2}{k(k+1)^2} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\sum_{k=i}^{n}\left(\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right) = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}\left(\frac{1}{i^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

Ainsi, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{a_1+\cdots+a_k} \leqslant 2\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{a_i}$.

7. **a.** Par les formules d'addition, on a $S_n = 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\cos(t_i)\cos(t_j)$ d'où $S_n = \left(\sum_{i=1}^n \cos t_i\right)^2 - \sum_{i=1}^n \cos^2 t_i$.

b. Comme $-\cos^2 \geqslant -1$ et $\left(\sum_{i=1}^n \cos t_i\right)^2 \geqslant 0$, on a $S_n \geqslant -n$ par la relation du a.

8. **a.** On a $\cos^2 x = \frac{\cos(2x)+1}{2}$ pour tout réel x. Puisque $e^{2i} \neq 1$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\cos^2 k = \sum_{k=1}^{n}\frac{\cos(2k)+1}{2} = \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{2ik}\right) = \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(e^{2i}\frac{e^{2in}-1}{e^{2i}-1}\right)$$
$$= \frac{n}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(e^{i(n+1)}\frac{\sin n}{\sin 1}\right) = \frac{n}{2}+\frac{(\sin n)\cos(n+1)}{2\sin 1}$$

b. Puisque cos est à valeurs dans $[-1,1]$, on a $|\cos| \geqslant \cos^2$. Ainsi

$$\sum_{k=1}^{n}|\cos k| \geqslant \sum_{k=1}^{n}\cos^2 k = \frac{n}{2}+\frac{(\sin n)\cos(n+1)}{2\sin 1} \geqslant \frac{n}{2}-\frac{1}{2\sin 1}$$

car $(\sin n)\cos(n+1) \geqslant -1$ et $2\sin 1 > 0$. Comme sin est croissant sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\frac{\pi}{2} > 1 > \frac{\pi}{4} > 0$, on a $\sin 1 \geqslant \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$ d'où $-\frac{1}{2\sin 1} \geqslant -\frac{1}{\sqrt{2}}$ puis

$$\sum_{k=1}^{n}|\cos k| \geqslant \frac{n}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

9. L'inéquation équivaut à $2 \leqslant \dfrac{x}{1-3x} < 3$, ie $\dfrac{x-2(1-3x)}{1-3x} \geqslant 0$ et $\dfrac{3(1-3x)-x}{1-3x} > 0$. On trouve $\left[\dfrac{2}{7},\dfrac{3}{10}\right[$.

ENSEIGNEMENTS À TIRER DE CES EXERCICES

Ces exercices présentent de nombreuses techniques intéressantes :

- ▷ *Au 3., on a utilisé une mise sous forme canonique, souvent adaptée pour étudier des trinômes du second degré.*
- ▷ *L'inégalité du 1. peut aussi se « démontrer » en termes de distances (comparaison de la distance à x et $-y$ et de celle de $-xy$ à 1). On peut aussi former $\frac{x+y}{1+xy} \pm 1$ et rechercher son signe (mise au même dénominateur, etc).*
- ▷ *Il faut reconnaître les principales formes d'inégalité : Cauchy-Schwarz permet de minorer des sommes de carré et de majorer des sommes, l'inégalité triangulaire permet de majorer des valeurs absolues de somme, etc.*
- ▷ *La factorisation permet de trouver plus facilement le signe d'une expression.*