Quizz d'analyse 2 | Suites numériques

Toutes les suites rencontrées ci-dessous sont à valeurs réelles.

Vrai ou Faux ?

		V	F
1.	La suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $u_n = \sqrt{n^4+1} - n^2$ est bornée.	☐	☐
2.	Pour tout $(u_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$, $\dfrac{u_n}{1+u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$	☐	☐
3.	La somme de deux suites divergentes est divergente.	☐	☐
4.	La somme d'une suite convergente et d'une suite divergente est divergente.	☐	☐
5.	Une suite non majorée diverge vers $+\infty$.	☐	☐
6.	$u_n v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \implies (u_n)_{n\geqslant 0}$ ou $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée	☐	☐
7.	$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pm\infty \iff \lvert u_n\rvert \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$	☐	☐
8.	Une suite divergeant vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.	☐	☐
9.	Si $(u_n v_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, alors $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et $(v_n)_{n\geqslant 0}$ sont bornées.	☐	☐
10.	Une suite décroissante qui admet une sous-suite convergente est convergente.	☐	☐
11.	Une suite croissante qui admet une sous-suite majorée est convergente.	☐	☐
12.	La partie entière d'une suite réelle convergente est convergente.	☐	☐
13.	Le maximum de deux suites réelles convergentes définit une suite convergente.	☐	☐
14.	Une suite positive qui converge vers 0 est décroissante APCR.	☐	☐
15.	Le quotient de deux suites de limite $+\infty$ admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$.	☐	☐
16.	Si $\theta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $(\sin(\theta_n))_{n\geqslant 0}$ n'a pas de limite.	☐	☐
17.	Le produit de deux suites réelles minorées est minoré.	☐	☐
18.	Une suite réelle croissante à partir d'un certain rang est minorée.	☐	☐

Questions à choix multiple

1. On pose $\mathrm{A} = \left\{ \dfrac{nm}{n^2+m^2} \,;\, (n,m) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0)\} \right\}$. Vrai ou faux ?

a. A est borné ; **b.** $\max \mathrm{A} = 1$; **c.** $\min \mathrm{A} = 0$.

2. La suite de terme général $u_n = \left\lfloor \dfrac{n}{5} \right\rfloor - \dfrac{n}{5}$ est :

a. périodique ; **b.** bornée ; **c.** divergente.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)$. Vrai ou faux ?

a. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée ; **b.** $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est périodique ; **c.** $(u_{10n})_{n\geqslant 0}$ converge.

4. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \cos\left(\dfrac{n^2+1}{n+1}\pi\right)$· Vrai ou faux ?

a. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge ; **b.** $(|u_n|)_{n\geqslant 0}$ converge ; **c.** $u_n \geqslant 0$ APCR.

5. On suppose que $(\sin(\theta_n))_{n\geqslant 0}$ converge. Vrai ou faux ?

a. $(\cos(\theta_n))_{n\geqslant 0}$ converge ; **b.** $(|\cos(\theta_n)|)_{n\geqslant 0}$ converge ; **c.** $(\theta_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

6. Soient $k \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = k$ et $\forall n \geqslant 0,\ u_{n+2} = -u_{n+1} + u_n$. Vrai ou faux ?

a. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est positive $\iff k = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

b. $\exists k \in \mathbb{R},\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$

c. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge $\iff k = 1$

7. Soient $k \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = k$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \ln u_n$.

a. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie $\implies (u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone ;

b. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie $\iff k > 0$;

c. $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est définie $\implies u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Exercices élémentaires

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels bornées.

a. On suppose dans cette question que $\forall(k,\ell)\in\mathbb{N}^2,\ u_k\leqslant v_\ell$. Comparer $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} u_k$ et $\inf\limits_{\ell\in\mathbb{N}} v_\ell$.

b. On suppose dans cette question que $\forall k\in\mathbb{N},\ u_k\leqslant v_k$.

i. Démontrer que $\inf\limits_{\ell\in\mathbb{N}} u_\ell\leqslant\inf\limits_{\ell\in\mathbb{N}} v_\ell$ et $\sup\limits_{\ell\in\mathbb{N}} u_\ell\leqslant\sup\limits_{\ell\in\mathbb{N}} v_\ell$.

ii. Donner un exemple de suites pour lesquelles $\sup\limits_{\ell\in\mathbb{N}} u_\ell<\inf\limits_{\ell\in\mathbb{N}} v_\ell$.

iii. Même question avec $\sup\limits_{\ell\in\mathbb{N}} u_\ell>\inf\limits_{\ell\in\mathbb{N}} v_\ell$.

2. Soit $(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ monotone. Montrer que $\left(\dfrac{u_0+\cdots+u_n}{n+1}\right)$ est monotone.

3. Donner des exemples de suites : majorée et non minorée, minorée et non majorée, ni croissante ni décroissante.

4. Donner l'exemple de deux suites divergentes dont le produit est une suite convergente.

5. Montrer que la réciproque du théorème de Césaro est vraie sous l'hypothèse supplémentaire que la suite (u_n) est monotone.

6. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_n=0$ si n est pair, $u_n=1$ si n est impair. Montrer que cette suite admet une infinité de sous-suites convergentes.

7. Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{u_n^2+1}{2}\cdot$

8. Soit $n\in\mathbb{N}$, on note u_n l'unique réel solution de l'équation $x^5+nx-1=0$.

a. Justifier l'existence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

b. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge et déterminer sa limite. Trouver un équivalent de u_n.

9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0>0$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_n^3}\cdot$
Étudier le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

10. Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, f_n l'application définie par $\forall x\in\mathbb{R},\ f_n(x):=x^n+6x-1$.

a. Démontrer que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, il existe un unique $x_n\in\mathbb{R}_+$ tel que $f_n(x_n)=0$.

b. Montrer que $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est monotone et convergente.

c. Déterminer la limite de $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

11. Soit p un entier tel que $p\geqslant 2$. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=1+\dfrac{1}{2^p}+\cdots+\dfrac{1}{n^p}$ et $v_n=u_n+\dfrac{1}{n^{p-1}}\cdot$
Montrer que (u_n) et (v_n) sont des suites adjacentes.

12. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par $a_0=2$, $a_1=5$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$.

a. Pour tout entier naturel n, calculer a_n en fonction de n. Déterminer un équivalent simple de a_n.

b. Montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $v_n := \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ converge et déterminer sa limite.

13. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$. Déterminer un équivalent simple de la suite de terme général $u_n := \dfrac{n^\alpha}{1+n^\beta}\cdot$

14. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$. Étudier le comportement en $+\infty$ de la suite définie par $u_n := \left(1+\dfrac{\lambda}{n^\alpha}\right)^{n^\beta}\cdot$

15. Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par $u_n = \sqrt[n]{\dfrac{e^n+e^{-n}}{2}}\cdot$

16. On suppose que $v_n \sim u_n$ où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Peut-on en conclure que $v_n - u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$?

17. Étudier le comportement asymptotique de la suite définie par $u_n = \left(\dfrac{e^n-e^{-n}}{e^n+e^{-n}}\right)^n$.

Exercices classiques plus techniques

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall (k,n)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ 0\leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{k}+\dfrac{k}{n}$. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{\sqrt{n}}{4^n}\dbinom{2n}{n}$.

a. Déterminer le sens de variation de $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

b. Démontrer que $\forall n\geqslant 1,\quad u_n \leqslant \sqrt{\dfrac{n}{2n+1}}\cdot$

c. Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel ℓ tel que $\dfrac{1}{2}\leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot$

3. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bornée. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \left[-\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right]$, $m_n = \inf\limits_{x\in\mathrm{I}_n} f(x)$ et $\mathrm{M}_n = \sup\limits_{x\in\mathrm{I}_n} f(x)$.

a. Prouver que ces deux suites sont monotones.

b. Sont-elles convergentes ? Donner un exemple où elles n'ont pas même limite.

4. Trouver une suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'admettant aucune limite telle que $\dfrac{u_1+\cdots+u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

5. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite définie par $u_0>0$, $u_1>0$ et $\forall n\geqslant 0$, $u_{n+2} = (u_{n+1}u_n^2)^{\frac{1}{3}}$. Exprimer u_n en fonction de n puis étudier la convergence de la suite.

6. Étudier la convergence de $\left(\lfloor a^n\rfloor^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $a>0$.

7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels bornée.
On pose, $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sup\{u_p\,;\, p \geqslant n\}$ et $w_n = \inf\{u_p\,;\, p \geqslant n\}$.

a. Justifier que les suites $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ sont bien définies.

b. Déterminer le sens de variation des suites $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$.

c. Établir que $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ sont convergentes. On note respectivement L et ℓ leurs limites.

d. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge *si et seulement si* $\ell = \mathrm{L}$. On pourra utiliser le théorème d'encadrement pour l'une des deux implications et revenir à la définition « *epsilonesque* » pour l'autre.

8. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N},\ (1-u_n)u_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{4}\cdot$

a. Démontrer que $\forall x \in [0,1] \setminus \left\{\dfrac{1}{2}\right\},\ x(1-x) < \dfrac{1}{4}\cdot$

b. En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone puis que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}\cdot$

9. On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1} + u_n}$.

a. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

b. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.

10. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $u_0 = 1,\ u_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{2u_n u_{n+1}}{u_n + u_{n+1}}\cdot$ Expliciter u_n en fonction de n.
On pourra s'intéresser à $v_n = \frac{1}{u_n}$ (après justification).

11. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2}\cdot$

a. Montrer que $[3, +\infty[$ est stable par $f : x \longmapsto \dfrac{2x^2-3}{x+2}\cdot$

b. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. En déduire le comportement asymptotique de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

12. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles de limite $+\infty$ telles que $u_n = o(v_n)$. Montrer qu'il existe une suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de limite $+\infty$ telle que $u_n = o(w_n)$ et $w_n = o(v_n)$.

INDICATION : on peut trouver une solution w_n s'exprimant simplement en fonction de u_n et v_n.

13. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2^n - 3u_n\ \ (\star)$.

a. Déterminer une suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $(\star)$.
INDICATION : La relation $(\star)$ impose clairement la raison d'une telle suite.

b. Calculer la suite de terme général $w_n := u_n - v_n$. On exprimera w_n en fonction de n et u_0.

c. On suppose que $u_0 \neq \dfrac{1}{5}\cdot$ Montrer que $u_n \sim \left(u_0 - \dfrac{1}{5}\right)(-3)^n$ puis trouver un équivalent de $u_{n+1} - u_n$.

d. En déduire l'ensemble $\{u_0\,;\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone$\}$.

Corrigé du Vrai ou Faux ?

1. Vrai. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$$

On en déduit que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée par 0 et majorée par 1.

2. Vrai. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ aussi d'après les théorèmes sur les opérations et les suites. *Réciproquement*, si $(v_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0, puisque $\forall n \geqslant 0$, $u_n = \frac{v_n}{1-v_n}$ $(u_n)_{n\geqslant 0}$ aussi par les mêmes aguments.

3. Faux. Cex : $(n)_{n\geqslant 0}$ et $(-n)_{n\geqslant 0}$.

4. Vrai. Preuve par l'absurde : si $(u_n + v_n)$ convergeait, alors la suite de terme général $v_n = u_n + v_n - u_n$ convergerait aussi.

5. Faux. Cex : $\big((-1)^n\big)_{n\geqslant 0}$.

6. Faux. Cex :

$$u_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ n & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}, \quad v_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ n & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

7. Faux. L'implication $\Longrightarrow$ est vraie mais sa réciproque est fausse comme le prouve le cex : $((-1)^n n)_{n\geqslant 0}$.

8. Faux. Cex : $(n+(-1)^n)_{n\geqslant 0}$.

9. Faux. Cex $(n)_{n\geqslant 0}$ et $(1/n^2)_{n\geqslant 0}$.

10. Vrai. Si $(u_{\phi(n)})_{n\geqslant 0}$ est une suite extraite convergente de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\phi(n)} \leqslant u_n$ (car $\phi \geqslant \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$). Comme une suite convergente est minorée, on en déduit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée donc convergente.

11. Vrai. Si $(u_{\phi(n)})_{n\geqslant 0}$ est une suite extraite majorée de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{\phi(n)} \geqslant u_n$ (car $\phi \geqslant \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$). On en déduit que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée donc convergente.

12. Faux. Cex : $\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$.

13. Vrai par la formule :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \max(u_n, v_n) = \frac{u_n + v_n + |u_n - v_n|}{2}$$

14. Faux. Cex : $\left(\dfrac{1+(-1)^n}{n+1}\right)_{n\geqslant 0}$.

15. Faux. Cex :

$$u_n = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ pair} \\ \sqrt{n} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}, \quad v_n = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{si } n \text{ impair} \\ n & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

16. Faux : cex $(\pi n)_{n\geqslant 0}$.

17. Faux : cex $(-1)_{n\geqslant 0}$ et $(n)_{n\geqslant 0}$.

18. Vrai. Si $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante à partir du rang n_0, le réel $\min(u_0, \dots, u_{n_0})$ est un minorant de $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Enseignements à tirer de cet exercice

- ▷ *Pour rechercher des contre-exemples sur les suites, il peut être utile de définir u_n selon la parité de l'indice n.*
- ▷ *Attention aux idées fausses : cf. 8. et 14.*

Corrigé des questions à choix multiple

1. Seul a. est vrai. L'ensemble A est borné car $A \subset]0,1[$ et puisqu'il est non vide, A admet des bornes. Par l'inégalité AG, on a $nm \leqslant \frac{n^2+m^2}{2}$, on en déduit que $\frac{1}{2}$ est un majorant de A et puisque $\frac{1}{2} \in A$, A admet un maximum qui vaut $\frac{1}{2}$. On remarque que 0 est un minorant de A et que la suite de terme général $\frac{n}{n^2+1}$ converge vers 0 et est à valeurs dans A. On en déduit que $\inf A = 0$. Comme $0 \notin A$, cette borne inférieure n'est pas un minimum.

2. Tout est vrai. La suite est 5-périodique donc bornée, mais n'étant pas constante, elle diverge.

3. Tout est vrai. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est la partie réelle de

$$z_n = \frac{e^{2i\pi/5(n+1)} - 1}{e^{2i\pi/5} - 1}$$

Comme $(z_n)_{n\geqslant 0}$ est 5-périodique, c'est aussi le cas de $(u_n)_{n\geqslant 0}$, qui est donc bornée. La suite $(u_{10n})_{n\geqslant 0}$ est constante.

4. Seul b. est vrai. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \cos\left((n-1)\pi + \frac{2\pi}{n+1}\right) = (-1)^{n-1}\cos\left(\frac{2\pi}{n+1}\right)$$

Ainsi $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ mais comme $u_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $u_{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$, la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ diverge.

5. Seul b. est vrai. Cex pour les a. et b. : $\theta_n = \pi n$. Et $|\cos\theta_n| = \sqrt{1-\sin^2(\theta_n)}$ au b.

6. Seuls le a. est vrai. Les racines de l'équation caractéristique $z^2 + z - 1 = 0$ sont $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$. Après tout calcul (cf. la condition initiale $u_0 = 1$), il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall n \geqslant 0,\ u_n = \lambda\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n + (1-\lambda)\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Les inégalités $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1 < 0 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$ sont au fondement des raisonnements suivants :

- ▷ Supposons $(u_n)_{n\geqslant 0}$ positive. On a alors $\lambda = 0$, d'où $\forall n \geqslant 0,\ \ u_n = \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n$.
- ▷ La convergence de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est équivalente à $\lambda = 0$, donc à $k = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
- ▷ $(u_n)_{n\geqslant 0}$ n'a pas de limite ou converge vers 0.

7. Seuls a. et c. sont vrais. En effet, si la suite est bien définie alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + \ln u_n \leqslant u_n$ car $\forall x > 0,\ \ln x \leqslant x - 1$. Toujours sous la même hypothèse, $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée par 0 et donc converge vers un réel ℓ. La relation de récurrence nous permet d'écarter le cas où $\ell = 0$ (raisonner par l'absurde). Par continuité du logarithme, on a $\ln \ell = \ell - 1$, d'où $\ell = 1$. En particulier, si la suite existe, alors elle décroît vers 1 donc est minorée par 1, d'où $k \geqslant 1$. La réciproque est immédiate car $[1,+\infty[$ est stable par $x \mapsto 1 + \ln x$.

8. On trouve b. L'équation équivaut à $\lfloor 3x \rfloor = \lfloor x \rfloor + 2$. En écrivant $x = \lfloor x \rfloor + \theta$, ceci est aussi équivalent à $\lfloor x \rfloor = 1 - \dfrac{1}{2}\lfloor 3\theta \rfloor$. On en déduit que nécessairement $\lfloor x \rfloor = 0$ ou 1 et une synthèse permet de conclure.

9. On trouve a. car l'équation équivaut à $2 \leqslant \sqrt{x^2+1} < 3$.

ENSEIGNEMENTS À TIRER DE CET EXERCICE

- ▷ *On rappelle que* $\max A$ *désigne le plus grand élément de* A *(il n'existe pas toujours, même si* A *est majorée).*
- ▷ *Retour sur le 6. Notons* x_1 *la racine négative de l'équation caractéristique. Supposons* $\lambda \neq 0$. *On a alors* $\frac{u_n}{\lambda x_1^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ *(cf. les inégalités données dans la correction) donc* u_n *est du signe de* λx_1^n *APCR. On en déduit que* u_n *est de signe alterné APCR.*

CORRIGÉ DES EXERCICES ÉLÉMENTAIRES

1. Notons $U := \{u_n\,;\, n\in\mathbb{N}\}$ et $V := \{v_n\,;\, n\in\mathbb{N}\}$.

a. Soit $k\in\mathbb{N}$. Comme u_k est un minorant de V, on a $u_k \leqslant \inf V$. Ainsi $\inf V$ est un majorant de U d'où $\sup U \leqslant \inf V$.

b. i. On reprend les notations de la question précédente.

- ▷ Tout minorant de U est aussi un minorant de V. Le plus grand minorant de U est donc un minorant de V : ainsi $\inf U \leqslant \inf V$.
- ▷ Tout majorant de V est aussi un majorant de U. Le plus petit majorant de V est donc un majorant de U : ainsi $\sup U \leqslant \sup V$.

ii. Il suffit de choisir $u_n = 0$ et $v_n = 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

iii. Il suffit de choisir $u_0 = -2$ et $v_0 = -1$, puis $u_n = 0$ et $v_n = 1$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Supposons $(u_n)_{n\geqslant 0}$ croissante. Posons $v_n = \dfrac{1}{n+1}(u_0+u_1+\cdots+u_n)$. Soit $n\in\mathbb{N}$. On vérifie que

$$(n+2)\,(v_{n+1}-v_n) = u_{n+1} - v_n$$

or, puisque (u_n) est croissante,

$$v_n = \frac{1}{n+1}(u_0+u_1+\cdots+u_n) \leqslant \frac{(n+1)u_{n+1}}{n+1}$$

et donc $v_{n+1}-v_n \geqslant 0$; ainsi (v_n) est croissante. Si (u_n) est décroissante, on applique ce qui précède à $(-u_n)$ pour conclure.

3. Voici des exemples élémentaires : $(-n)_{n\geqslant 0}$ est majorée par 0 mais non minorée, $(n)_{n\geqslant 0}$ est minorée non majorée et $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ n'est pas monotone.

4. Les suites $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ et $((-1)^n)_{n\geqslant 0}$ nous donnent un contre-exemple élémentaire.

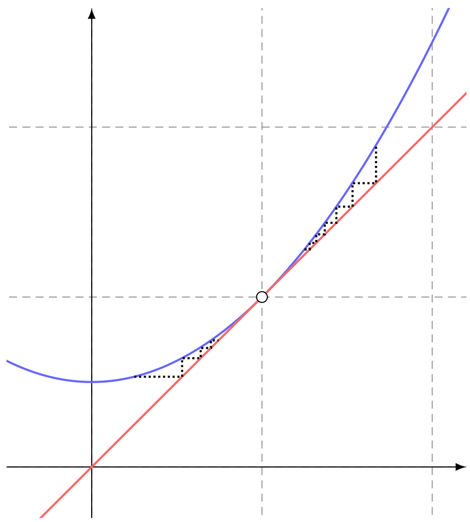
5. Supposons que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone et $\dfrac{u_0+\cdots+u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est monotone, on a $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell' \in \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$. On déduit alors du théorème de Césaro que $\ell = \ell'$.

6. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, posons

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \varphi_p(n) = \begin{cases} n & \text{si } n\leqslant p \\ 2n+1 & \text{si } n\geqslant p+1 \end{cases}$$

Les suites $(u_{\varphi_p(n)})_{n\geqslant 0}$ sont deux à deux distinctes, extraites de $(u_n)_{n\geqslant 0}$ et convergent toutes vers 1.

7. On commence par une étude graphique :



Comme la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+1}{2}$ est définie sur $\mathbb{R}$, la suite est toujours définie.

Il est clair que f croît sur $\mathbb{R}_+$ et décroît sur $\mathbb{R}_-$.

On remarque que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1+x^2}{2} \geqslant x$$

car $(x-1)^2 \geqslant 0$. Ainsi, la suite est toujours croissante.

De plus, $f(x) = x \iff x = 1$.

- ▷ Cas 1 : $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$. Comme $[0,1]$ est stable par f (cf. les variations de f par exemple), $u_n \in [0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, elle converge vers un réel $\ell \geqslant 0$ qui vérifie $f(\ell) = \ell$ par continuité de f. Ainsi $\ell = 1$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.
- ▷ Cas 2 : $u_0 > 1$. Comme $]1,+\infty[$ est stable par f (cf. les variations de f par exemple), $u_n > 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, elle admet une limite $\ell \in]1,+\infty[\cup\{+\infty\}$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\ell \in \mathbb{R}$. On aurait alors $f(\ell) = \ell$ par continuité de f, d'où $\ell = 1$, ce qui est absurde. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- ▷ Cas 3 : $u_0 < -1$. On a alors $u_1 > 1$ et on est ramené au cas 2 : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
- ▷ Cas 4 : $-1 \leqslant u_0 < 0$. On a alors $0 \leqslant u_1 \leqslant 1$ et on est ramené au cas 1 : $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

8. **a.** Pour tout entier naturel n, notons $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$. La fonction f_0 ne s'annulle qu'au point $u_0 = 1$. Pour tout entier n non nul, la fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynomiale et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n'(x) = 5x^4 + n > 0$. Comme $f_n(x) \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\infty$, f_n réalise une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(u_n) = 0$.

b. Pour tout entier naturel, on a vu que $u_n > 0$. De plus, $1 - nu_n = u_n^5 > 0$ d'où $0 < u_n < 1/n$ et, par encadrement, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Comme $1 - nu_n = u_n^5 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $nu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ d'où $u_n \sim \frac{1}{n}$.

9. On pose, pour tout x dans $\mathbb{R}_+$, $f(x) = \dfrac{x}{1+x^3}$.

- ▷ Comme $f(\mathbb{R}_+) \subset \mathbb{R}_+$ et $u_0 \in \mathbb{R}_+$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
- ▷ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^3} \leqslant u_n$ car $u_n \in \mathbb{R}_+$.
- ▷ Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par 0, elle converge vers un réel ℓ positif.
- ▷ Comme f est continue, on a $f(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(\ell)$. Ansi $\ell = f(\ell)$, d'où $\ell = 0$ après tout calcul.

10. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, f_n l'application définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) := x^n + 6x - 1$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ (en tant que somme deux fonctions vérifiant ces mêmes hypothèses). Comme $f_n(0) = -1$ et $f_n(1/6) > 0$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe x_n dans $[0,1/6]$ tel que $f_n(x_n)=0$. L'unicité de x_n provient de la stricte croissance de f_n.

b. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Sur $[0,1/6]$, on a $f_{n+1}(x)\leqslant f_n(x)$ d'où $f_n(x_{n+1})\geqslant 0$. Comme f_n est strictement croissante et s'annule en x_n, on en déduit que $x_{n+1}\geqslant x_n$. La suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est donc convergente car décroissante et majorée par $1/6$.

c. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $0\leqslant x_n\leqslant 6^{-n}$ donc $x_n^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. On en déduit que $x_n=\dfrac{1-x_n^n}{6}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{6}\cdot$

11. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Puisque $p\geqslant 2$, on a

$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^p}>0\quad\text{et}\quad v_{n+1}-v_n=\frac{2n^{p-1}+n^p-(1+n)^p}{(1+n)^pn^{p-1}}=\frac{(2-p)n^{p-1}-\sum_{k=0}^{p-2}\binom{k}{p}n^k}{(1+n)^pn^{p-1}}<0$$

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont donc respectivement croissante et décroissante.

De plus, $v_n-u_n=\frac{1}{n^{p-1}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$. Les deux suites sont donc bien adjacentes.

12. a. On reconnaît une récurrence linéaire d'ordre deux à coefficients constants. L'équation caractéristique associée est $r^2-5r+6=0$ et admet pour racines 2 et 3. Ainsi, il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a_n=\alpha 2^n+\beta 3^n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. En tenant compte des conditions initiales, on trouve sans peine en résolvant un système que $\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=2^n+3^n$. Comme $0<2<3$, on a $a_n\sim 3^n$.

b. On a $v_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\sim\dfrac{3^{n+1}}{3^n}=3$ d'où $v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}3$.

13. ▷ Cas 1 : $\beta>0$. On a alors $u_n=\frac{n^\alpha}{1+n^\beta}\sim\frac{n^\alpha}{n^\beta}=n^{\alpha-\beta}$.

▷ Cas 2 : $\beta<0$. On a alors $u_n=\frac{n^\alpha}{1+n^\beta}\sim n^\alpha$.

▷ Cas 3 : $\beta=0$. On a alors $u_n=\frac{n^\alpha}{2}\cdot$

14. ▷ Cas 1 : $\alpha>0$. On a alors $\ln u_n\sim\frac{\lambda n^\beta}{n^\alpha}=\lambda n^{\beta-\alpha}$.

† Cas1.1 : $\beta>\alpha$. On a $\ln u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ d'où $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.

† Cas1.2 : $\beta<\alpha$. On a $\ln u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ d'où $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

† Cas1.3 : $\beta=\alpha$. On a $\ln u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\lambda$ d'où $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}e^\lambda$.

▷ Cas 2 : $\alpha<0$. On a alors $\ln\left(1+\frac{\lambda}{n^\alpha}\right)=-\alpha\ln n+\ln(\lambda+n^\alpha)$. Comme $\ln(\lambda+n^\alpha)\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ln\lambda$ et $-\alpha\ln n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ d'où $\ln u_n\sim-\alpha n^\beta\ln n$.

† Cas2.1 : $\beta\geqslant 0$. On a $\ln u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$ d'où $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$.

† Cas2.2 : $\beta<0$. On a $\ln u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ d'où $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$.

▷ Cas 3 : $\alpha=0$. On a alors $u_n=\frac{n^\alpha}{2}\cdot$

15. On a

$$\ln u_n=\frac{1}{n}\ln\left(e^n\frac{1+e^{-2n}}{2}\right)=1+\frac{1}{n}\ln\left(1+e^{-2n}\right)-\frac{\ln 2}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$$

par opérations sur les limites usuelles. Ainsi $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}e$ par continuité de l'exponentielle en 1.

16. Comme $v_n\sim u_n$, on a $v_n-u_n=o(u_n)$. Puisque $u_n=\mathrm{O}(1)$, on a $v_n-u_n=o(1)$, ie $v_n-u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$.

17. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\ln u_n = n \ln \frac{1-e^{-2n}}{1+e^{-2n}} = n\ln\left(1-e^{-2n}\right) - n\ln\left(1+e^{-2n}\right)$.
Comme $e^{-2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, on a $n\ln\left(1+\varepsilon e^{-2n}\right) \sim \varepsilon n e^{-2n}$ (où $\varepsilon = \pm 1$). Par croissances comparées, $ne^{-2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où $\ln u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ par continuité de l'exponentielle en 0.

ENSEIGNEMENTS À TIRER DE CES EXERCICES

- ▷ *Pour montrer qu'une suite converge vers 0, on s'intéresse à sa valeur absolue. C'est plus simple en cas d'encadrement car il suffit alors de majorer.*
- ▷ *Sur les exercices 7., 8., 9., 10., 11. et 12. Ils illustrent les principaux cas de figure : suites récurrentes (explicitable au 12., études qualitatives aux 7. et 9.), suites définies implicitement (8. et 10.) et suites définies explicitement (11.) Les techniques d'étude varient : théorème de la limite monotone pour l'étude qualitative des suites récurrente d'ordre un ou des suites définies implictement, théorème d'encadrement, etc.*

CORRIGÉ DES EXERCICES CLASSIQUES PLUS TECHNIQUES

1. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$ et $p := \lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Comme $\sqrt{n}-1 < p \leqslant \sqrt{n}$, on a

$$0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}-1} + \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Et l'on déduit du théorème d'encadrement que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\sqrt{n+1}\binom{2n+2}{n+1}}{4\sqrt{n}\binom{2n}{n}} = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\frac{2n+1}{2(n+1)} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}$$

Comme $(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 \geqslant 4n(n+1)$, on a $2n+1 \geqslant 2\sqrt{n(n+1)}$ d'où $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$. Ainsi $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

b. On note $\mathscr{P}(n)$ l'inégalité $u_n \leqslant \sqrt{\frac{n}{2n+1}}$.

- ▷ $\mathscr{P}(1)$ est vraie car $u_1 = \frac{1}{2} \leqslant \sqrt{\frac{1}{3}}$ (puisque $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{3}$).
- ▷ Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie pour un $n \geqslant 1$ fixé. En utilisant l'expression de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ calculée à la question précédente, on a $u_{n+1} = \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}} u_n$, donc

$$u_{n+1} \leqslant \frac{2n+1}{2\sqrt{n(n+1)}}\sqrt{\frac{n}{2n+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n+1}{n+1}}$$

  Pour en déduire $\mathscr{P}(n+1)$, il suffit alors de montrer que $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2n+1}{n+1}} \leqslant \sqrt{\frac{n+1}{2n+3}}$. Or cette inégalité est équivalente à $(2n+3)(2n+1) \leqslant 4(n+1)^2$, et cette dernière inégalité est vraie car $(2n+3)(2n+1) - 4(n+1)^2 = 4n^2+8n+3-(4n^2+8n+4) = -1$.

On a ainsi démontré par récurrence que $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

c. Puisque $\frac{n}{2n+1} \leqslant \frac{1}{2}$, on déduit de la question précédente que $u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ pour tour $n \geqslant 1$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée, et comme on a déjà montré qu'elle est croissante, elle est convergente. Notons ℓ sa limite. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_1 = \frac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$, en passant à la limite dans cet encadrement on obtient $\frac{1}{2} \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. a. Comme $\mathrm{I}_{n+1} \subset \mathrm{I}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{M}_{n+1} \leqslant \mathrm{M}_n$ et $m_{n+1} \geqslant m_n$.

b. Comme f est bornée, $(\mathrm{M}_n)_{n\geqslant 1}$ et $(m_n)_{n\geqslant 1}$ le sont aussi et on déduit du a. que ces suites convergent. Pour f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

on a clairement $m_n = 0$ et $\mathrm{M}_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = n^2$ si n est pair et $u_n = 0$ sinon. Pour tout $n \geqslant 2$, puisque $n-1$ ou n est pair, on a

$$\frac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \geqslant \frac{(n-1)^2}{n} \geqslant \frac{4(n/2-1)^2}{n}$$

ainsi $\dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ mais (u_n) n'admet aucune limite.

5. On prouve par une récurrence sans difficulté que $\forall n \geqslant 0,\ u_n > 0$. Posons alors $v_n = \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \geqslant 0$,

$$v_{n+2} = \frac{1}{3} v_{n+1} + \frac{2}{3} v_n$$

Les racines de l'équation caractéristique $z^2 - \frac{z+2}{3} = 0$ sont 1 et $-\frac{2}{3}$, il existe donc λ et μ dans $\mathbb{R}$ tels que $\forall n \geqslant 0,\ v_n = \lambda + \mu\left(-\frac{2}{3}\right)^n$. On a donc $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda$. Puisque $v_0 = \lambda + \mu$ et $v_1 = \lambda - \frac{2\mu}{3}$, on aboutit à

$$\lambda = \frac{2v_0 + 3v_1}{5} = \frac{\ln\left(u_0^2 u_1^3\right)}{5}$$

et, par continuité de l'exponentielle, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left(u_0^2 u_1^3\right)^{\frac{1}{5}}$.

6. Envisageons plusieurs cas.

- ▷ Cas 1 : $a = 1$. La suite est constante égale à 1.
- ▷ Cas 2 : $0 < a < 1$. On a $0 < a^n < 1$ et la suite est nulle.
- ▷ Cas 3 : $a > 1$. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n - 1 < \lfloor a^n \rfloor \leqslant a^n$, d'où, puisque $a^n - 1 < 0$,

$$\left(a^n - 1\right)^{1/n} < \lfloor a^n \rfloor^{1/n} \leqslant a$$

Comme $a > 1$, $\dfrac{1}{n}\ln\left(a^n - 1\right) = \ln(a) + \dfrac{1}{n}\ln\left(1 - a^{-n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(a)$ d'où $\left(a^n - 1\right)^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et, par encadrement, $\lfloor a^n \rfloor^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathrm{E}_n = \{u_p\,;\, p \geqslant n\}$.

a. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Comme $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée, E_n est borné et puisque $\mathrm{E}_n \neq \varnothing$, E_n admet des bornes inférieure et supérieure.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $\mathrm{E}_{n+1} \subset \mathrm{E}_n$, on a $\sup \mathrm{E}_{n+1} \leqslant \sup \mathrm{E}_n$ et $\inf \mathrm{E}_{n+1} \geqslant \inf \mathrm{E}_n$ i.e. $v_{n+1} \leqslant v_n$ et $w_{n+1} \geqslant w_n$. Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\mathrm{E}_n \subset \mathrm{E}_0$ donc $\sup \mathrm{E}_n \geqslant \inf \mathrm{E}_0$ et $\inf \mathrm{E}_n \leqslant \sup \mathrm{E}_0$. Ceci signifie que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement minorée et majorée : on déduit du théorème de la limite monotone qu'elles convergent.

d. ▹ Supposons que $\ell = \mathrm{L}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $w_n \leqslant u_n \leqslant v_n$ (car $u_n \in \mathrm{E}_n$), on déduit du théorème d'encadrement que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell = \mathrm{L}$.

▹ Supposons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et notons x sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant n_0$, $u_n \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$, d'où $\mathrm{E}_n \subset [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$. Ainsi, pour $n \geqslant n_0$, on a $x-\varepsilon \leqslant w_n \leqslant v_n \leqslant x+\varepsilon$. On en déduit que les suites $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers x d'où $x = \ell = \mathrm{L}$ par unicité de la limite.

8. a. Il suffit d'étudier les variations de $x \mapsto x(1-x)$ ou de remarquer que $\forall x \in \mathbb{R},\ x(1-x) = \frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$.

b. ▹ Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et $(1-u_n)u_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{4}$, on a $0 \leqslant u_n < 1$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $u_{n+1} < u_n$. On aurait alors

$$u_{n+1}(1-u_n) < u_n(1-u_n) \leqslant \frac{1}{4}$$

ce qui est absurde. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant u_{n+1}$.

▹ Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1, elle converge vers un élément ℓ de $[0,1]$. En passant à la limite dans la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ (1-u_n)u_{n+1} \geqslant \dfrac{1}{4}$, on obtient $(1-\ell)\ell \geqslant \frac{1}{4}$ et l'on déduit du a. que $\ell = \frac{1}{2}\cdot$

9. a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathrm{HR}(n)$ la proposition $u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

▹ HR(0) est vérifiée car $(u_0, u_1, u_2) = (0, 1, 1)$.

▹ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathrm{HR}(n)$ vérifiée. Par croissance de la racine carrée, on a

$$u_{n+3} = \sqrt{u_{n+2} + u_{n+1}} \geqslant \underbrace{\sqrt{u_n + u_{n+1}}}_{=\,u_{n+2}}$$

Ainsi $\mathrm{HR}(n+2)$ est vraie.

b. On prouve par une récurrence double facile que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée par 2. On déduit de la question précédente et du théorème des suites monotones que cette suite converge vers un réel positif ℓ. En passant à la limite dans la relation de récurrence, on trouve que $\ell = \sqrt{2\ell}$ d'où $\ell = 2$ car $\ell \geqslant u_1 > 0$.

10. On prouve par une récurrence double facile que $\forall n \geqslant 0,\ \ u_n > 0$. Posons alors $v_n = 1/u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = \frac{v_{n+1}+v_n}{2}\cdot$ On reconnaît une récurrence linéaire d'ordre deux d'équation caractéristique $2r^2 - r - 1 = (2r+1)(r-1) = 0$. Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \lambda + \mu\left(-\frac{1}{2}\right)^n$. En tenant compte des conditions initiales, on trouve $v_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ d'où

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{3 \times 2^n}{2^{n+1} + (-1)^n}$$

11. a. Pour $x \geqslant 3$, on a $f(x) - 3 = \dfrac{2x^2 - 3 - 3(x+2)}{x+2} = \dfrac{2x^2 - 3x - 9}{x+2} = \dfrac{2(x-3)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{x+2} \geqslant 0$ donc $[3, +\infty[$ est stable par f.

b. ▹ Comme $u_0 \in [3, +\infty[$, on déduit de la question précédente que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[3, +\infty[$.

▷ Pour $x \geqslant$, on a

$$f(x) - x = \frac{2x^2 - 3 - x(x+2)}{x+2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{x+2} = \frac{(x-3)(x+1)}{x+2} \quad (\star)$$

Ainsi $\forall x \geqslant 3,\ f(x) \geqslant x$ d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

c. Par le théorème de la limite monotone, $\exists \ell \in \overline{\mathbb{R}},\ u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Montrons que $\ell = +\infty$ en raisonnant par l'absurde : supposons $\ell \in \mathbb{R}$. Comme f est continue, on a $f(\ell) = \ell$. Comme $\ell \geqslant u_0 = 5$ par croissance de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on déduit de $(\star)$ une absurdité.

12. Remarquons que $u_n > 0$ et v_n APCR. La suite définie APCR par $w_n := \sqrt{u_n v_n}$ convient car

$$\frac{u_n}{w_n} = \frac{w_n}{v_n} = \sqrt{\frac{u_n}{v_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

13. a. La suite de terme général $v_n := \frac{2^n}{5}$ convient clairement.

b. La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison -3 d'où $\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = (-3)^n w_0 = (-3)^n \left(u_0 - \frac{1}{5}\right)$.

c. ▷ Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2^n}{5} + (-3)^n \left(u_0 - \frac{1}{5}\right)$ et $|2| < |-3|$ avec $u_0 - \frac{1}{5} \neq 0$, on a $u_n \sim \left(u_0 - \dfrac{1}{5}\right)(-3)^n$.

▷ On a donc $u_{n+1} - u_n = 2^n - 4u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $2^n = o((-3)^n)$, on déduit de la question précédente que $u_{n+1} - u_n \sim -4\left(u_0 - \frac{1}{5}\right)(-3)^n$.

d. ▷ Cas 1 : $u_0 = \frac{1}{5}\cdot$ On a alors $u_n = \frac{2^n}{5}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

▷ Cas 2 : $u_0 \neq \frac{1}{5}\cdot$ Par la question précédente, $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $-4\left(u_0 - \frac{1}{5}\right)(-3)^n$ APCR. Comme cette expression est de signe alterné, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.

Ainsi $\{u_0\,;\,(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est monotone}\} = \left\{\frac{1}{5}\right\}$.