

COMPOSITION # 4

Samedi 17 janvier 2026 (8h-12h)

- ⇒ L'usage de la calculatrice est interdit durant l'épreuve.
- ⇒ Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
- ⇒ Si le candidat découvre ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le précisera dans sa copie.
- ⇒ Le candidat laissera libre la première page de sa copie.
- ⇒ Je m'autorise à enlever des points à tout candidat ne respectant pas les consignes suivantes :

souligner les justifications essentielles et encadrer les résultats importants

Sujet 1

Matrices magiques

- ⇒ Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.
- ⇒ Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $A_{i,j}$ le coefficient de A sur la ligne i et la colonne j .
- ⇒ Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite semi-magique si les sommes par lignes et par colonnes de la matrices A sont toutes égales, autrement dit :

$$\exists \phi(A) \in \mathbb{R}, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n A_{i,j} = \sum_{j=1}^n A_{j,i} = \phi(A)$$

- ⇒ On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est magique lorsqu'elle est semi-magique et qu'elle vérifie de plus

$$\sum_{i=1}^n A_{i,i} = \sum_{i=1}^n A_{i,n+1-i} = \phi(A)$$

C'est-à-dire les sommes de la diagonale et de l'anti-diagonale valent aussi $\phi(A)$.

- ⇒ On note $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices semi-magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- ⇒ On note $\mathcal{G}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices magiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie I – Quelques exemples

On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Justifiez que $J \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R})$ et donnez la valeur de $\phi(J)$.
2. On considère la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- a. Montrer que A est inversible et déterminer A^{-1} .
- b. Vérifier que A et A^{-1} sont dans $\mathcal{H}_3(\mathbb{R})$. Donner $\phi(A)$ et $\phi(A^{-1})$.
3. Déterminer $\mathcal{H}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{G}_2(\mathbb{R})$.

Partie II – Opérations sur les matrices semi-magiques

On note U la matrice-colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

1. Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est semi-magique si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$AU = \lambda U \quad \text{et} \quad A^T U = \lambda U$$

Le cas échéant, montrer que λ est unique et exprimer λ en fonction de $\phi(A)$.

2. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R})$, on a $AJ = JA = \phi(A)J$.
3. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ et λ, μ dans $\mathbb{R}$.
 - a. Prouver que $\lambda A + \mu B \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R})$, et montrer que $\phi(\lambda A + \mu B) = \lambda \phi(A) + \mu \phi(B)$.
 - b. Que peut-on dire de $\lambda A + \mu B$ dans le cas où A et B sont dans $\mathcal{G}_n(\mathbb{R})$?
4. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$.
 - a. Montrer que $AB \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ et $\phi(AB) = \phi(A)\phi(B)$.
 - b. Établir que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ et exprimer $\phi(A^p)$ en fonction de p et $\phi(A)$.
 - c. Dédire du II.1. que l'inverse A^{-1} d'une matrice A semi-magique et inversible est elle-même semi-magique. Exprimer $\phi(A^{-1})$ en fonction de $\phi(A)$.
 - d. Une matrice $A \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ telle que $\phi(A) \neq 0$ est-elle nécessairement inversible ?

Partie III – Puissances impaires des matrices magiques de taille 3

On admet que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, il existe $(\lambda_A, \mu_A) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$A^3 = (\text{tr}A)A^2 + \lambda_A A + \mu_A I_3$$

1. Soit $A \in \mathcal{G}_n(\mathbb{R})$. Exprimer $\phi(A)$ en fonction de $\text{tr}A$.
2. On suppose dans cette question que $A \in \mathcal{G}_3(\mathbb{R})$ et que $\phi(A) = 0$.
 - a. Montrer que $\mu_A = 0$. INDICATION : Utiliser les II.3. et II.4.
 - b. En déduire, pour tout entier naturel p impair, que A^p est magique.
3. On suppose dans cette question que $A \in \mathcal{G}_3(\mathbb{R})$. On considère la matrice $B := A - \frac{\phi(A)}{3}J$.
 - a. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k \in \mathcal{H}_3(\mathbb{R})$ et $\phi(B^k) = 0$.
 - b. Exprimer, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, A^p en fonction de B^p et J .
 - c. En déduire que, pour tout p impair, A^p est magique.

Sujet 2

Densité naturelle

⇒ Pour $A \subset \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, on note $kA := \{ka; a \in A\}$. Ainsi $2\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels pairs. On notera $\bar{A}$ le complémentaire de A dans $\mathbb{N}$, c'est-à-dire $\mathbb{N} \setminus A$.

⇒ Pour $A \subset \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $\pi_A(n) := \frac{|A \cap [0, n]|}{n+1}$, où $|A \cap [0, n]|$ désigne le cardinal de $A \cap [0, n]$.

Ce nombre rationnel est la *proportion* d'éléments de A appartenant à $[0, n]$.

⇒ On dit que A admet une *densité* si la suite $(\pi_A(n))_{n \geq 0}$ converge.

⇒ On note alors $d(A)$ sa limite, appelée densité de A . On notera que $d(A) \in [0, 1]$

Partie I – Quelques exemples

1. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Exprimer en fonction de $\lfloor x \rfloor$ le cardinal de l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}; k \leq x\}$.
2. Démontrer que $\lfloor x \rfloor \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} x$.
3. Justifier que $\mathbb{N}$ admet une densité et calculer celle-ci.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que $\pi_{2\mathbb{N}}(n) = \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1}{n+1}$ et en déduire que $2\mathbb{N}$ admet une densité.
5. Soit A une partie de cardinal fini de $\mathbb{N}$. Justifier que A admet une densité que l'on calculera.

6. Soit $C := \{i^2; i \in \mathbb{N}\}$, ensemble des carrés parfaits.

Calculer $\pi_C(n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$ puis en déduire que C admet une densité.

7. Plus généralement, soit $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante, telle que $f(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^\alpha$ avec $\alpha > 1$.

a. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq f(0)$. Justifier l'existence et l'unicité de $k_n \in \mathbb{N}$ tel que $f(k_n) \leq n < f(1 + k_n)$.

b. Démontrer que $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ en croissant puis que $k_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n^{\frac{1}{\alpha}}$.

c. Montrer que l'ensemble $\{f(i); i \in \mathbb{N}\}$ admet une densité que l'on calculera.

8. Soit $E := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \llbracket 2^{2i}, 2^{2i+1} \rrbracket$. Calculer $\pi_E(2^{2n})$ et $\pi_E(2^{2n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble E admet-il une densité ?

Partie II – Un exemple lié à la numération en base 2

Dans cette partie, on fixe $k \in \mathbb{N}$. On rappelle qu'un entier naturel n non nul s'écrit de façon unique en base deux. Plus précisément, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, et tout $n \in \llbracket 2^m, 2^{m+1} \rrbracket$,

$$\exists! (c_0, \dots, c_{m-1}) \in \{0, 1\}^m, \quad n = 2^m + c_{m-1}2^{m-1} + \dots + c_12^1 + c_02^0$$

Dans cette partie, on s'intéresse à l'ensemble E_k des entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $c_0 + \dots + c_{m-1} = k$ (on se souviendra que l'entier m dépend de n).

On choisira par convention que $1 \in E_0$.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$. Exprimer le cardinal de $E_k \cap \llbracket 2^m, 2^{m+1} \rrbracket$ au moyen des coefficients binomiaux.

2. En déduire que

$$\forall m \geq k, \quad |E_k \cap \llbracket 0, 2^{m+1} \rrbracket| = \binom{m+1}{k+1}$$

3. Démontrer que A_k admet une densité que l'on calculera.

INDICATION : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pourra considérer l'unique $m \in \mathbb{N}$ tel que $2^m \leq n < 2^{m+1}$.

Partie III – Propriétés de la densité naturelle

1. Soit A et B des parties de $\mathbb{N}$ admettant une densité.

a. Montrer que $\bar{A}$ admet une densité et que $d(\bar{A}) = 1 - d(A)$.

b. Établir que, si $A \cap B = \emptyset$, alors $A \cup B$ admet une densité et $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$.

La réciproque est-elle vraie ?

c. Montrer que, si $A \subset B$, alors $B \setminus A$ admet une densité que l'on précisera.

2. Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \dots, A_m$ des parties de $\mathbb{N}$ deux à deux disjointes et admettant une densité. Justifier que $A_1 \cup \dots \cup A_m$ admet une densité donnée par

$$d\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m d(A_i)$$

3. Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathbb{N}$ 2 à 2 disjointes admettant une densité et $A := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$.

- Démontrer que la suite de terme général $u_m := \sum_{i=0}^m d(A_i)$ converge. On notera $\sum_{i=0}^{+\infty} d(A_i)$ sa limite.
- Au moyen d'un contre-exemple, montrer que A n'admet pas nécessairement une densité.
- On suppose dans cette question que A admet une densité. Démontrer que $\sum_{i=0}^{+\infty} d(A_i) \leq d(A)$.

Justifier au moyen d'un contre-exemple que cette inégalité peut-être stricte.

4. Soit $A \subset \mathbb{N}$ admettant une densité et $k \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que kA admet une densité qui vaut $\frac{d(A)}{k}$.

Partie IV – Densité de l'ensemble des nombres premiers

⇒ On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

⇒ On note $(p_n)_{n \geq 1}$ la suite strictement croissante des nombres premiers.

⇒ Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_k := \bigcap_{i=1}^k \overline{p_i \mathbb{N}}$.

1. Démontrer que, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$ et n dans $\mathbb{N}$, $\pi_{\mathbb{P}}(n) \leq \frac{k}{n+1} + \pi_{A_k}(n)$.

INDICATION : Commencer par justifier l'inclusion $\mathbb{P} \subset \{p_1, \dots, p_k\} \sqcup A_k$.

2. Établir par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que A_k admet une densité qui vaut $\prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$.

INDICATION : On pourra remarquer que $A_k \cap p_{k+1} \mathbb{N} = p_{k+1} A_k$ et $A_{k+1} = A_k \setminus p_{k+1} A_k$.

3. Justifier que $d(A_k) \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$ et en déduire que $\mathbb{P}$ admet une densité que l'on précisera.

INDICATION : Montrer que $\prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{-1} \geq \prod_{i=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_i} + \dots + \frac{1}{p_i^k}\right) \geq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k}$.