

COMPOSITION # 5

Samedi 7 février 2026 (8h-12h)

- ⇒ L'usage de la calculatrice est interdit durant l'épreuve.
- ⇒ Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
- ⇒ Si le candidat découvre ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le précisera dans sa copie.
- ⇒ Le candidat laissera libre la première page de sa copie.
- ⇒ Je m'autorise à enlever des points à tout candidat ne respectant pas les consignes suivantes :

souligner les justifications essentielles et encadrer les résultats importants

Sujet 1**Nombres parfaits**

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{D}_n$ l'ensemble des diviseurs positifs de n et $S(n) := \sum_{d \in \mathcal{D}_n} d$.

On écrira plus simplement

$$S(n) = \sum_{d|n} d$$

Par exemple, $S(6) = 1 + 2 + 3 + 6$. Un entier $n \in \mathbb{N}^*$ est dit :

- ⇒ *déficient* si $S(n) < 2n$ ⇒ *parfait* si $S(n) = 2n$ ⇒ *abondant* si $S(n) > 2n$

On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Partie I – Préliminaires

1.
 - a. Déterminer le plus petit nombre parfait.
 - b. Donner le plus petit entier abondant.
 - c. Déterminer $E := \{n \in \llbracket 13, 20 \rrbracket ; n \text{ est déficient}\}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Démontrer que $S(n) \geq n + 1$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $S(n) = n + 1 \iff n \in \mathbb{P}$.

4. Dans cette question, on fixe p dans $\mathbb{P}$ et on pose $u_n := \frac{S(p^n)}{p^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
- Justifier que $S(p^n) = 1 + p + \dots + p^n$. Le nombre p^n est-il abondant, parfait ou déficient ?
 - Établir que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante et vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < \frac{p}{p-1}$.
5. Déterminer le sens de variation de $x \mapsto \frac{x}{x-1}$ sur $]1, +\infty[$.

Partie II – Propriétés arithmétiques de la fonction S

- Soit m et n deux entiers naturels non nuls premiers entre eux.
 - Monter que tout diviseur de mn s'écrit de manière unique $d_1 d_2$ où d_1 et d_2 sont respectivement des diviseurs de m et n .
 - En déduire que $S(mn) = S(m)S(n)$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition première. Calculer $S(n)$ en fonction des p_i et α_i .
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - Justifier que $S(n) = \sum_{d|n} \frac{n}{d}$.
 - Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $m | n$. Démontrer que

$$\frac{S(n)}{n} \geq \frac{S(m)}{m} \quad \text{et} \quad \left(\frac{S(n)}{n} = \frac{S(m)}{m} \iff m = n \right)$$

Partie III – Nombres parfaits pairs

- Soit n un nombre parfait pair. On l'écrit sous la forme $n = 2^{k-1}m$ avec $k \geq 2$ et m impair.
 - Démontrer que $(2^k - 1)S(m) = 2^k m$.
 - En déduire que

$$\frac{S(m)}{m} \geq \frac{S(2^k - 1)}{2^k - 1} \geq \frac{2^k}{2^k - 1}$$
 - Établir que $m = 2^k - 1$ et $m \in \mathbb{P}$.
- On suppose dans cette question que $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ avec $k \geq 2$ et $2^k - 1 \in \mathbb{P}$. Justifier que n est parfait.
- Soit $k \geq 2$ tel que $2^k - 1 \in \mathbb{P}$. Démontrer que $k \in \mathbb{P}$.

INDICATION : Reasonner par l'absurde.

Partie IV – Nombres parfaits impairs, théorèmes de Touchard et d'Euler

Les quatre questions qui suivent sont indépendantes. On y expose quelques propriétés des nombres parfaits impairs. On ignore encore à ce jour s'il en existe.

1. Soit $(p, q) \in \mathbb{P}^2$ tel que $p < q$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$. On pose $n := p^\alpha q^\beta$.

a. Démontrer que $\frac{S(n)}{n} < \frac{p}{p-1} \frac{q}{q-1}$.

b. En déduire que tout nombre parfait impair admet au moins trois facteurs premiers distincts.

INDICATION : Reasonner par l'absurde en utilisant le I.5.

2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $n := 6k - 1$.

a. En travaillant modulo 3, justifier que n n'est pas un carré d'entier.

b. En déduire que

$$S(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d < \sqrt{n}}} \left(d + \frac{n}{d} \right)$$

c. En conclure que $S(n) \equiv 0 [3]$ puis que n n'est pas parfait.

3. Dans cette question, on fixe un entier naturel n parfait et impair.

a. Dans cette question, on suppose que $n \equiv -1 [4]$. En adaptant la méthode suivie à la question précédente, démontrer que

$$S(n) = \sum_{\substack{d|n \\ d < \sqrt{n}}} \left(d + \frac{n}{d} \right) \equiv 0 [4]$$

et en déduire une absurdité.

b. Justifier que $n \equiv 1 [6]$ ou $n \equiv 3 [6]$. En déduire que $n \equiv 1 [12]$ ou $n \equiv 9 [12]$.

c. Démontrer finalement le théorème de Touchard : si n est un entier parfait impair, alors $n \equiv 1 [12]$ ou $n \equiv 9 [36]$.

4. On considère un entier n parfait et impair. On note $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition première.

a. Montrer qu'il existe un unique $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que α_i soit impair. On note $p := p_i$ et $\alpha := \alpha_i$.

INDICATION : Justifier l'unicité de $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ tel que $S(p_i^{\alpha_i})$ soit pair en partant de $S(n) = 2n$.

b. En déduire l'existence de $m \in \mathbb{N}$ impair tels que $n = p^\alpha m^2$.

c. On suppose dans cette question que $p \equiv -1 [4]$. Justifier que $S(p^\alpha) \equiv 0 [4]$.

d. En déduire que $p \equiv 1 [4]$ puis $\alpha \equiv 1 [4]$.

Sujet 2**Matrices magiques et équilibrage optimal d'un réseau**

Dans tout ce problème, on fixe n dans $\mathbb{N}^*$.

⇒ On note $\sigma(M)$ la somme de tous les coefficients d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\sigma(M) := \sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{i,j}$$

⇒ On note $\mathcal{H}_n$ l'ensemble des matrices semi-magiques H de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, i.e. des matrices vérifiant

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \sum_{k=1}^n H_{i,k} = \sum_{k=1}^n H_{k,j}$$

Pour H semi-magique, on note $\phi(H)$ la valeur commune de ces sommes.

⇒ On note $\mathcal{H}_n^0$ l'ensemble des matrices semi-magiques H telles que $\phi(H) = 0$.

⇒ On note

$$U := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \quad \text{et} \quad J := (1)_{1 \leq i, j \leq n} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

$$\text{et} \quad E := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \sum_{i=1}^n x_i = 0 \right\}, \quad \mathcal{E} := \{XU^\top; X \in E\} \quad \text{et} \quad \mathcal{L} := \{UY^\top; Y \in E\}$$

Partie I – Préliminaires

Les quatre questions suivantes sont indépendantes. Les trois dernières pourront simplifier substantiellement certains calculs menés dans les parties II et III.

1. On note

$$\Delta := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V} := \left\{ \begin{pmatrix} \alpha+\beta & \alpha-\beta \\ -\alpha+\beta & -\alpha-\beta \end{pmatrix}; (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \right\} \quad \text{et} \quad \mathcal{X} := \left\{ \begin{pmatrix} x^2+y & -x^2 \\ -x^2 & y+x^2 \end{pmatrix}; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

- L'ensemble $\mathcal{X}$ est-il inclu dans $\mathcal{H}_2(\mathbb{R})$?
- L'ensemble $\mathcal{X}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
- Établir que $\mathcal{V}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- Démontrer que $\mathcal{H}_2 = \text{Vect}(I_2, \Delta)$.
- Établir que $\mathcal{H}_2^0$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{H}_2$ et trouver un supplémentaire de $\mathcal{H}_2^0$ dans $\mathcal{H}_2$.
- Établir que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{V}$.

2. Exprimer $UU^\top$ en fonction de J .

3. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que $M \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, MU = \lambda U \quad \text{et} \quad M^T U = \lambda U$$

4. Vérifier que $E = \{X \in \mathbb{R}^n; U^T X = 0\}$.

Partie II – Structure de $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$

1. Justifier que $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{H}_n^0(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Établir que $\mathcal{H}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{H}_n^0(\mathbb{R}) \oplus \text{Vect } J$.

3. Démontrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

4. Les ensembles $\mathcal{L}$ et $\mathcal{C}$ sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

5. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $H \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ et $(X, Y) \in E^2$ tels que $M = H + XU^T + UY^T$. On note $X := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

a. Démontrer que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{k=1}^n M_{i,k} = \phi(H) + nx_i$.

b. En déduire $\phi(H)$ en fonction de $\sigma(M)$.

c. Établir que

$$X = \frac{1}{n^2}(nI_n - J)MU \quad \text{et} \quad Y = \frac{1}{n^2}(nI_n - J)M^T U$$

6. Démontrer que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{H}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{C} \oplus \mathcal{L}$.

Partie III – Interprétation géométrique

Pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose

$$\langle A, B \rangle := \text{tr}(AB^T) \quad \text{et} \quad \|A\| := \sqrt{\langle A, A \rangle}$$

1. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.

a. Exprimer $\langle A, B \rangle$ en fonction des coefficients de A et B .

b. En déduire que $\|A\|$ est bien défini.

2. Démontrer que, pour tout $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^3$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\langle A, B \rangle = \langle B, A \rangle \quad \text{et} \quad \langle A, B + \lambda C \rangle = \langle A, B \rangle + \lambda \langle A, C \rangle$$

3. Soit $(H, K) \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R}) \times (\mathcal{C} \oplus \mathcal{L})$. Vérifier que $\langle H, K \rangle = 0$ et en déduire que

$$\|H + K\|^2 = \|H\|^2 + \|K\|^2$$

4. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note $M = H + XU^T + UY^T$. Justifier que

$$\min_{N \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R})} \|M - N\| = \|M - H\| \quad \text{et} \quad \forall N \in \mathcal{H}_n(\mathbb{R}), N \neq H \implies \|M - N\| > \|M - H\|$$

C'est-à-dire que H est la matrice de $\mathcal{H}_n(\mathbb{R})$ la plus proche de M au sens de la norme $\| \cdot \|$.

Ces calculs sont utilisés dans les problèmes d'équilibrage optimal des réseaux.