MATHÉMATIQUES, INTERROGATION N° 0

Samedi 14 septembre 2024 (8h45 – 9h45)

1. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a. Démontrer la propriété suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \big(x+y>2a \implies (x>a \text{ ou } y>a)\big)$.

b. Énoncer la négation de la proposition $\mathscr{P}$ suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \big((x>a \text{ ou } y>a) \implies x+y>2a\big)$$

La propriété $\mathscr{P}$ est-elle vraie ? On justifiera avec soin sa réponse.

---

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers naturels a_n, b_n, c_n, d_n tels que :

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}$$

---

3. On cherche à déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (m,n) \in \mathbb{Z}^2,\ f(m+n)+f(m-n) = 2f(m)+2f(n) \qquad (\mathbf{E})$$

a. Soit $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ une solution de (**E**). On pose $\lambda := f(1)$.

i. Déterminer $f(0)$.

ii. Calculer $f(2)$ puis $f(3)$ en fonction de λ.

iii. Conjecturer l'expression de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$, en fonction de λ puis démontrer ce résultat.

iv. En déduire l'expression de $f(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$ en fonction de λ.

b. Déterminer les solutions de (**E**).

---

4. On recherche toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall y \in \mathbb{R}_+^*,\ f\big(xf(y)\big) = f(xy)+x \qquad (\mathbf{E})$$

a. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une solution de (**E**). Établir que $\forall x>0,\ \forall y>0,\ f(y)-y = f(x)-x$.

INDICATION : On pourra commencer par appliquer la relation au couple $\big(f(x), y\big)$.

b. Déterminer les solutions de (**E**).

---

5. Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $u_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} := \dfrac{u_n}{n} + \dfrac{1}{n^2}$. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

INDICATION : On pourra commencer par établir que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est majorée en appliquant la méthode de majoration a priori étudiée en TD.

---

6. Démontrer l'unicité dans l'exercice 2. On pourra utiliser l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$, sans la redémontrer.

CORRIGÉ

1. a. On raisonne par contraposition. Soit x et y dans $\mathbb{R}$ tel que $x \leqslant a$ et $y \leqslant a$. En sommant, on aboutit à $x+y \leqslant 2a$. D'où le résultat.

b. La négation de $\mathscr{P}$ est :

$$\exists x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ \big((x > a \text{ ou } y > a) \text{ et } x+y \leqslant 2a\big)$$

Posons $x := a+1$ et $y := a-1$. On a $x > a$ et $x+y = 2a$. Ainsi $\mathscr{P}$ est fausse.

2. On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}(n)$ la proposition suivante :

$$\exists (a_n, b_n, c_n, d_n) \in \mathbb{N}^4,\ \left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}$$

▷ Comme $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^0 = 1 = 1 + 0\times\sqrt{2} + 0\times\sqrt{3} + 0\times\sqrt{6}$, $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit alors $(a_n, b_n, c_n, d_n) \in \mathbb{N}^4$ tel que

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}$$

On a

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{n+1} &= \left(a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\\ &= (2b_n + 3c_n) + (a_n + 3d_n)\sqrt{2} + (2d_n + a_n)\sqrt{3} + (c_n + b_n)\sqrt{6}\end{aligned}$$

Posons alors $a_{n+1} := 2b_n + 3c_n$, $b_{n+1} := a_n + 3d_n$, $c_{n+1} := 2d_n + a_n$ et $d_{n+1} := c_n + b_n$.

Puisque $(a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}, d_{n+1}) \in \mathbb{N}^4$, la propriété $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

3. a. i. En choisissant $(n,m) := (0,0)$, on obtient $2f(0) = 4f(0)$ donc $f(0) = 0$.

ii. En choisissant successivement $(n,m) := (1,1)$ et $(n,m) := (2,1)$, on obtient $f(2) = 4f(1) - f(0) = 4\lambda$ puis

$$f(3) = 2f(2) + 2f(1) - f(1) = 9\lambda$$

iii. Par les deux questions précédentes, on conjecture que $f(n) = \lambda n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrons-le par récurrence double sur $n \in \mathbb{N}$. L'initialisation est justifiée par les calculs précédents. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie aux rangs $n-1$ et n. On alors

$$f(n+1) = 2f(n) + 2f(1) - f(n-1) = 2\lambda n^2 + 2\lambda - (n-1)^2\lambda = \left(n^2 + 2n + 1\right)\lambda = (n+1)^2\lambda$$

d'où la formule au rang n.

iv. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$f(n-n) + f(2n) = 2f(n) + 2f(-n)$$

d'où $f(-n) = \frac{f(2n) - 2f(n)}{2} = \lambda n^2$. On en déduit que $\forall n \in \mathbb{Z},\ f(n) = \lambda n^2$.

b. Il s'agit d'effectuer la synthèse. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On note $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall n \in \mathbb{Z},\ \ f(n) := \lambda n^2$. Soit $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$. On a

$$f(n+m) + f(n-m) = \lambda(n+m)^2 + \lambda(n-m)^2 = 2\lambda n^2 + 2\lambda m^2 = 2f(n) + 2f(m)$$

Ainsi, les solutions de (**E**) sont exactement les fonctions de la forme :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{où } \lambda \in \mathbb{R} \\ n &\longmapsto \lambda n^2 \end{aligned}$$

4. a. Soit x et y deux réels strictement positifs. Comme $f(x) > 0$, on déduit de (**E**) que

$$f\big(f(x)f(y)\big) = f\big(f(x)y\big) + f(x) = f(xy) + y + f(x)$$

En permutant x et y, on obtient donc :

$$f\big(f(x)f(y)\big) = f(xy) + x + f(y)$$

d'où $f(y) - y = f(x) - x$.

b. ▷ Continuons l'analyse commencée au 1. Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f(x) = a + x$ où $a := f(1) - 1 \in \mathbb{R}$. Comme on doit avoir $a + x > 0$ pour tout $x > 0$, on a nécessairement $a \geqslant 0$.

▷ Synthèse. Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On pose $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) := x + a$, pour tout $x > 0$. Soit $x > 0$ et $y > 0$. On a

$$f\big(xf(y)\big) = xf(y) + a = x(y + a) + a = xy + a + ax$$

Comme $f(xy) + x = xy + a + x$, on en déduit que f est solution de (**E**) *si et seulement si* $a = 1$.

Ainsi, l'unique solution de (**E**) est la fonction :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+^* \\ x &\longmapsto x + 1 \end{aligned}$$

5. ▷ On démontre par une récurrence simple que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \geqslant 0$.

▷ Soit $\mathrm{M} := \max(u_1, u_2, 1)$. Montrons par récurrence que $u_n \leqslant \mathrm{M}$.

† On a bien $u_1 \leqslant \mathrm{M}$ et $u_2 \leqslant \mathrm{M}$ par le choix de M.

† Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Supposons que $u_n \leqslant \mathrm{M}$. On a

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant \mathrm{M}$$

car $\mathrm{M} - \frac{\mathrm{M}}{n} = \frac{n-1}{n}\mathrm{M} \geqslant \frac{n-1}{n} \geqslant \frac{1}{n^2}$ puisque cette dernière inégalité est équivalente à $n(n-1) \geqslant 1$, propriété qui est bien vérifiée pour $n \geqslant 2$.

▷ On a donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{\mathrm{M}}{n} + \frac{1}{n^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme $\frac{\mathrm{M}}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on déduit du théorème d'encadrement que $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

COMMENTAIRE

Le choix de M *vient d'une étude au brouillon : pour démontrer facilement l'hérédité à partir du rang* n_0*, il suffit d'avoir*

$$\forall n \geqslant n_0, \ \frac{\mathrm{M}}{n} + \frac{1}{n^2} \leqslant \mathrm{M}$$

i.e. $\mathrm{M} \geqslant \frac{1}{n(n-1)}$ *pour tout* $n \geqslant n_0$*. Si on choisit* $n_0 = 2$ *et* $\mathrm{M} \geqslant 1$*, alors on sait démontrer l'hérédité. De plus, il suffit d'avoir* $\mathrm{M} \geqslant u_1$ *et* $\mathrm{M} \geqslant u_2$ *pour initialiser la récurrence. D'où le choix, par exemple, de la constante* $\mathrm{M} := \max(u_1, u_2, 1)$.

6. Démontrons le lemme suivant :

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4,\ a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0 \implies a = b = c = d = 0$$

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4$ tel que $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$. On a alors

$$a + b\sqrt{2} = -\sqrt{3}\left(c + d\sqrt{2}\right)$$

Supposons $c + d\sqrt{2} \neq 0$ et $c - d\sqrt{2} \neq 0$. On a alors

$$-\sqrt{3} = \frac{a + b\sqrt{2}}{c + d\sqrt{2}} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{(c + d\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})} = \frac{(a + b\sqrt{2})(c - d\sqrt{2})}{c^2 - 2d^2} = u + \sqrt{2}v$$

où $(u,v) \in \mathbb{Q}^2$ (nous ne détaillerons pas ce calcul). En élevant au carré, on obtient :

$$3 = u^2 + 2v^2 + 2uv\sqrt{2}$$

Puisque $\sqrt{2}$ est irrationnel, on en déduit que $uv = 0$ et donc que $3 = u^2$ ou $3 = 2v^2$. La relation $3 = u^2$ est absurde car $\sqrt{3}$ est irrationnel. Écrivons $v = \frac{p}{q}$ avec $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $p \wedge q = 1$. Supposons que $3 = 2v^2$. On a alors $3q^2 = 2p^2$. Comme $3 \wedge 2 = 1$, on déduit du lemme de Gauss que 2 divise q^2 donc divise q. Soit q' dans $\mathbb{Z}$ tel que $q = 2q'$. On obtient alors $6q'^2 = p^2$ et donc 2 divise p^2 donc 2 divise p. Comme $p \wedge q = 1$, ceci est absurde. On en déduit que $c + d\sqrt{2} = 0$ ou $c - d\sqrt{2} = 0$. Comme $\sqrt{2}$ est irrationnel, ceci implique que $c = d = 0$. On a donc $a + b\sqrt{2} = 0$ puis, de façon analogue, $a = b = 0$.

Venons-en à l'unicité demandée. Soit $n \in \mathbb{N}$, $(a_n, b_n, c_n, d_n) \in \mathbb{N}^4$ et $(a'_n, b'_n, c'_n, d'_n) \in \mathbb{N}^4$ tels que

$$\left(\sqrt{2} + \sqrt{3}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2} + c_n\sqrt{3} + d_n\sqrt{6} = a'_n + b'_n\sqrt{2} + c'_n\sqrt{3} + d'_n\sqrt{6}$$

d'où

$$(a_n - a'_n) + (b_n - b'_n)\sqrt{2} + (c_n - c'_n)\sqrt{3} + (d_n - d'_n)\sqrt{6} = 0$$

Comme $a_n - a'_n$, $b_n - b'_n$, $c_n - c'_n$ et $d_n - d'_n$ sont des entiers relatifs, on déduit du lemme qu'ils sont nuls. On en conclut l'unicité dans le 2.

COMMENTAIRE

Le fait que $uv = 0$ se justifie facilement par l'absurde : supposons uv non nul. On aurait alors

$$\sqrt{2} = \frac{3 - u^2 - 2v^2}{2uv} \in \mathbb{Q}$$

car u et v sont rationnels donc $3 - u^2 - 2v^2$ et $2uv$ le sont aussi et donc leur quotient également. Ce qui contredit l'irrationnalité de $\sqrt{2}$. On remarque l'intérêt d'avoir posé des variables u et v telles que $-\sqrt{3} = u + \sqrt{2}v$ afin de simplifier les calculs : ce qui importe surtout est que u et v soient des rationnels.